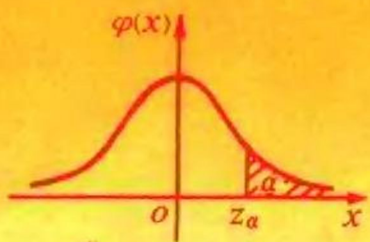
GAI LÜ
TONG JI
FANG FA
DAO LUN

概率统计方法导论

主编 黄光谷 孙清华

曹阳 胡端平 姚振华



中国地质大学出版社

概率统计方法导论

主　编　黄光谷　孙清华　曹　阳
　　　　胡端平　姚振华
副主编　方　瑛　宋占奎　穆汉林
　　　　范允正　柯　云
编　委　（姓氏笔划为序）
　　　　方楚泽　江程水　郑　列
　　　　陈少辉　欧阳光　俞国华
　　　　熊德之

中国地质大学出版社

·（鄂）新登字 12 号·

内 容 提 要

本书是为了帮助读者解决学习概率统计课程的困难而编写的。全书共分九章，包括了高等学校工科各专业学习概率论与数理统计的所有基本内容，各章都按内容提要、答疑辅导、题型归类、习题提示四部分编写。内容由浅入深，按题型与解法作了归纳，富有启发性，便于自学。可供工科、理科、农林、财经等类各专业本科、专科学生、自学者作为学习该课程的辅导书和教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率统计方法导论/黄光谷等主编—武汉：
中国地质大学出版社，1994.6
ISBN 7-5625-0945-x

Ⅰ.概…
Ⅱ.黄…
Ⅲ.①概率 ②统计
Ⅳ.O211

中国地质大学出版社出版发行
（邮政编码 430074 武汉洪山区鲁磨路 31 号）
湖北省农垦园青印刷厂印刷 新华书店经销
1994 年 6 月第 1 版 1994 年 6 月第 1 次印刷
开本 787×1092 1/32 印张 11.25
字数 250 千字 印数 1—8000 册
定价：5.95 元

前　言

概率论与数理统计(简称概率统计)是工科、理科、农林与财经等类各专业必修的专业基础课,在科学技术与国民经济中有广泛的应用,其重要性是众所周知的。由于教学时数少,学生学习该课程不习惯,习题难做,普遍反映该课程难学。本书就是为了指导读者解决学习概率统计的困难而编写的。

全书共分为九章,包括了概率统计课程的全部内容。为了配合使用通用教材,便于读者阅读,编写本书时,我们参照了国家教委批准的高等工业学校《概率论与数理统计课程教学基本要求》和教材的系统性,仅在个别部分作了少量的拓广与加深,并对通用新教材[1]的前九章习题全部作了提示。本书又是《数学方法导论》丛书的最新分册(详见封底),保留了该丛书的优点与风格:即以提炼方法为主,有分析引导,有说明议论,故名曰"方法导论"。各章前三部分仍为内容提要、答疑辅导、题型归类,力求叙述简明、针对性强、归类恰当。对难易不同的习题,分别作了强弱不同的提示,以减少读者学习及解题的困难并便于教师参考,希望读者自行完成解题的全部过程。

由于我们水平有限,加上时间仓促,书中可能有不妥之处,恳请读者多提宝贵意见,以便再版时修改。

编　者

1994 年 6 月

目　录

第一章　概率论的基本概念

一、内容提要

1. 随机试验

具有下列三个特性的试验称为**随机试验**（简称试验）：

1）可以在相同条件下重复地进行；

2）每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

3）进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

2. 样本空间、样本点

随机试验E的所有可能结果组成的集合称为E的**样本空间**,记为S. 样本空间的元素,即E的每个结果,称为**样本点**

3. 随机事件

试验E的样本空间S的子集称为E的**随机事件**,简称事件. 在每次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时,称这一事件发生.

4. 基本事件

由一个样本点组成的单点集,称为**基本事件**. 随机事件包括基本事件与由基本事件组成的复合事件.

5. 必然事件与不可能事件

样本空间S包含所有的样本点,它是S自身的子集,在每次试验中它总是发生的,称为**必然事件**. 简言之,必然事件即

样本空间 S.

空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，它在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**. 简言之，不可能事件即空集 $\varnothing$.

必然事件和不可能事件事实上不是随机的事件，只是看作随机事件.

6. 事件之间的关系与事件的运算

(1) 包含关系　若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A，记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

(2) 相等关系　若事件 B 包含事件 A，事件 A 也包含事件 B，即 $B \supset A$ 且 $A \supset B$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A = B$.

(3) 事件的和　事件 A 与事件 B 至少有一发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的**和**，记为 $A \cup B$.

n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生，这一事件称为 $A_1, A_2 \cdots, A_n$ 的**和**，记为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$，简记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$.

(4) 事件的积　事件 A 与事件 B 同时发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的**积**，记为 $A \cap B$ 或 AB.

n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生，这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**积**，记为 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$，简记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$.

(5) 事件的差　事件 A 发生而事件 B 不发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的**差**，记为 $A - B$.

(6) 互不相容　若事件 A 与事件 B 不能同时发生，亦即 $AB = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是**互不相容**的.

(7) 互逆关系　若在任何一次试验中，事件 A 与事件 B 必有且仅有一个发生，亦即事件 A 与事件 B 满足 $A \cup B = S$，

$A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B **互逆**，又称 A 是 B 的**对立事件**(或 B 是 A 的对立事件)，记为 $A = \overline{B}$(或 $B = \overline{A}$).

7. 事件的运算规律

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A, AB = BA$

(2) 结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(AB)C = A(BC)$

(3) 交对并的分配律　$A(B \cup C) = AB \cup AC$

并对交的分配律

$$A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C)$$

(4) 重迭律　$A \cup A = A, AA = A$

(5) 两次求逆律　$\overline{\overline{A}} = A$

(6 互逆律　$A \cup \overline{A} = S, A\overline{A} = \varnothing$

(7) 差化积　$A - B = A\overline{B}$

(8) 吸收律　若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B, AB = A$

(9) 反演律(莫根定理)

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

概率论中事件之间的关系及运算与集合论中集合之间的关系及运算是一致的. 为了便于对照，特列出下面的表格(见下页).

8. 频率的定义及性质

(1) 频率的定义　设随机事件 A 在 n 次试验中出现 n_A 次，则比值 $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$ 叫做事件 A 在这 n 次试验中出现的**频率**.

(2) 频率的性质　设随机试验 E 的样本空间为 S，A、B 为 E 的两个随机事件，则在 n 次试验中的频率具有下列性质：

1) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

记号	概　率　论	集　合　论
S	样本空间　必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
e	基本事件	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 的余集
$A \subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	集合 A 与集合 B 相等
$A \cup B$	事件 A 与 B 至少有一个发生	集合 A 与 B 的和集
$A \cap B$	事件 A 与 B 同时发生	集合 A 与 B 的交集
$A - B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	集合 A 与 B 的差集
$AB = \varnothing$	事件 A 和事件 B 互不相容	集合 A 与 B 没有相同的元素

2) $f_n(S) = 1$;

3) 若 A、B 互不相容,即 $AB = \varnothing$,则 $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$.

9. 概率的定义及性质

(1) 概率的定义　设 E 是随机试验,S 是它的样本空间,对于 E 的每一事件 A 赋予一实数,记为 $P(A)$,称为事件 A 的概率,如果它满足下列条件:

1) 对于每一事件 A,有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

2) $P(S)=1$;

3) 对于两两互不相容的事件 $A_k, k=1,2,3,\cdots$,有

$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$　　(有限可加性)

$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots$　　(可列可加性)

(2) 概率的性质

1) $P(A) = 1 - P(\overline{A})$;

2) $P(\varnothing) = 0$;

3) 设 A、B 为任意两事件,则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$(称为概率的加法公式);

4) 设 A,B 为两事件,且 $A \subset B$,则 $P(A) \leqslant P(B)$.

10. 古典概型

设试验 E 的样本空间为 $S=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$,如果每一个基本事件的概率相等,即 $P(e_1) = P(e_2) = \cdots = P(e_n)$,则称为**等可能概率**(或称为**古典概型**).

古典概型中事件 A 的概率的计算公式为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{ 中所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}.$$

11. 条件概率

设 A,B 为随机试验 E 的两个事件,且 $P(A) > 0$,则称 $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**.

计算条件概率 $P(B|A)$ 常用的有两种方法:

(1) 在样本空间 S 中,先计算 $P(AB)$、$P(A)$,再按公式 $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$,计算 $P(B|A)$;

(2) 在样本空间S的缩减样本空间S_A中计算B发生的概率.(例见习题提示第19题)

12. 概率的乘法公式

设$P(A)>0$,则$P(AB)=P(B|A)P(A)$,利用此公式可计算两事件A,B同时发生的概率$P(AB)$.

13. 全概率公式

(1) 划分的定义　设S为随机试验E的样本空间,B_1, $B_2,\cdots,B_n$为E的一组事件.若

1) $B_iB_j=\varnothing(i\neq j)$;

2) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$,则称$B_1,B_2,\cdots,B_n$为样本空间$S$的一个划分.

显然,若$B_1,B_2,\cdots,B_n$是S的一个划分,则对任一试验E,事件$B_1,B_2,\cdots,B_n$中必有且仅有一个发生.

(2) 全概率公式　设事件$B_1,B_2,\cdots,B_n$为样本空间S的一个划分,且$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则对任一事件A,有

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i).$$

14. 贝叶斯公式(逆概率公式)

设事件$B_1,B_2,\cdots,B_n$为样本空间S的一个划分,且$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则对任一事件$A(P(A)>0)$,有

$$P(B_k|A)=\frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)}=\frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A/B_i)P(B_i)}$$

15. 事件的独立性

(1) 两事件A,B相互独立的定义及性质

定义　设A,B是两事件,如果$P(AB)=P(A)P(B)$,则称A,B为**相互独立事件**.

定理　设 A,B 为两事件，且 $P(A)>0$，则 A,B 相互独立的充要条件是

$$P(B|A)=P(B).$$

(2) 三个事件两两相互独立的定义

定义　设 A,B,C 为三个事件，如果下列三个等式

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

$$P(BC)=P(B)P(C),$$

$$P(AC)=P(A)P(C)$$

同时成立，则称 A,B,C 三事件**两两相互独立**.

(3) 三个事件相互独立的定义

定义　设 A,B,C 为三个事件，如果下列四个等式

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

$$P(BC)=P(B)P(C)$$

$$P(AC)=P(A)P(C)$$

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

同时成立，则称三事件 A,B,C **相互独立**.

二、答 疑 辅 导

1. 如何通过已知事件表达其他事件？

答：设 A,B,C 为已知事件，则

(1)“A 发生而 B 与 C 都不发生”可表为 $A\overline{B}\overline{C}$，或 $A-B-C$，或 $A-(B\cup C)$.

(2)“A 与 B 都发生而 C 不发生”可表为 $AB\overline{C}$，或 $AB-C$，或 $AB-ABC$.

(3)“A,B,C 三事件都发生”可表为 ABC.

(4)“A,B,C 三事件都不发生”可表为 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$，或

$\overline{(A \cup B \cup C)}$.

(5)"A,B,C 三事件至少有一发生"可表为 $A \cup B \cup C$，或 $A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC$.

(6)"A,B,C 中至少有两个发生"可表为 $AB \cup BC \cup AC$，或 $AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC$.

(7)"A,B,C 中不多于一个发生"表为 $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$，或 $\overline{(AB \cup BC \cup AC)}$.

(8)"A,B,C 中不多于两个发生"表为 $\overline{ABC}$ 或 $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C}$.

(9)"A,B,C 中恰好有一个发生"表为 $A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$.

(10)"A,B,C 中恰好有两个发生"可表为 $AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$，或 $AB \cup BC \cup AC - ABC$.

2. 两事件 A,B 相互独立的概念定义为 $P(AB) = P(A)P(B)$ 或 $P(B|A) = P(B)$. 定义看起来很简单，但实际上很难理解，试举例说明之.

答： $P(AB) = P(A)P(B)$ 或 $P(B|A) = P(B)$ 是独立的数学定义. 在现实生活中很少根据这一点来判断事件的独立性. 而往往需要从事件的实际关系中去分析. 以下例说明之.

例 一袋中装有 a 只黑球和 b 只白球，采用有放回摸球. 求：(1) 在第一次摸得黑球的条件下，第二次摸出黑球的概率；(2) 第二次摸得黑球的概率.

解 记 $A = \{$第一次摸得黑球$\}$，$B = \{$第二次摸得黑球$\}$，$AB = \{$连续二次摸得黑球$\}$，$\bar{A}B = \{$第一次摸得白球，第二次摸得黑球$\}$，则有 $B = AB + \bar{A}B$，且有 $AB \cap \bar{A}B = \varnothing$，由古典概率易求得：

$$P(A)=\frac{a}{a+b},P(AB)=\frac{a^2}{(a+b)^2},P(\overline{A}B)=\frac{ab}{(a+b)^2}.$$

故 $$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{a^2}{(a+b)^2}\Big/\frac{a}{a+b}=\frac{a}{a+b}.$$

$$P(B)=P(AB+\overline{A}B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$$
$$=\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{ab}{(a+b)^2}=\frac{a}{a+b}.$$

说明 $P(B|A)=P(B)$.

即事件 A 发生与否，对事件 B 发生的概率没有影响.

故从独立的数学定义来讲，事件 A 与 B 是相互独立的. 而从直观的实际意义来讲也很自然，因为这里采用的是有放回的摸球，所以第二次摸球时，袋中球的组成与第一次摸球时完全一样. 故第一次摸球的结果实际上不影响第二次摸球的结果.

在解决实际问题时，判定两事件是否独立，往往不必根据定义来判定，而是根据实际问题的实质来判定.

3. 两事件 A，B 相互独立与 A，B 互不相容这两个概念有何关系？对立事件与互斥事件又有何区别？

答：我们说两个事件 A，B 相互独立，其实质是一个事件 B 出现的概率与另一事件 A 是否出现没有关系.

而说 A，B 互不相容，则是指 B 的出现必然导致 A 的不出现，或 A 的出现必然导致 B 的不出现，即 $AB=\varnothing$，从而 B 出现的概率与另一事件 A 是否出现密切相关.

那种认为“两事件相互独立必定互不相容”的认识是错误的.

因为，当在 $P(A)>0$，$P(B)>0$ 的条件下，若 A，B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)>0$，而若 A，B 互不相容，则 $P(AB)=0$，两种概念出现矛盾.

说明在 $P(A)>0, P(B)>0$ 的情况下，相互独立不能互不相容.

因此，在一般情况下(即在 $P(A)>0, P(B)>0$ 的情况下)，相互独立与互不相容(即互斥)是两个互不等价，完全不同的概念.

对立事件与互斥(互不相容)事件的区别如下：

1) 两事件对立，必定互斥，但互斥不一定对立；

2) 互斥的事件适用于多个(两个以上)事件，但对立只适用于两个事件.

4. 在定义三个事件 A、B、C 的独立性时，要求下列四个等式同时成立，则称 A, B, C 相互独立.

$$\text{即}\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(AC)=P(A)P(C) \end{cases} \tag{1}$$

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C). \tag{2}$$

这四个式子是否都是必须的？由(1)能否推出(2)，由(2)能否推出(1)?

答：回答是否定的，由(1)不能推出(2)，由(2)也不能推出(1)，即要 A, B, C 三事件相互独立，必须要求(1)、(2)同时成立. 具体例子请参考习题提示的第 30 题.

5. 条件概率是不是概率？它与无条件概率有何区别？

答：条件概率是一种概率，可以验证，它满足概率定义中的三个条件. 具体地说，$P(B|A)$ 是在原条件组 S 的基础上又加上"A 发生"这个条件下 B 发生的概率. 它与无条件概率(普通概率)$P(B)$ 的区别，就在于后者发生的条件，还是原来的条件组 S. 这里所谓"无条件"是指"无新条件"，原来的条件组 S 并非可无.

6. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$吗?

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$吗?

答:一般而言,上述两式都不对.应为$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$;

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$.

这就是概率的加法公式与乘法公式.

特殊情况下,题设两式是成立的.即当$A\cap B=\varnothing$(A与B互斥)时,有$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$;当A与B互相独立时,$P(B|A)=P(B)$,这时就有$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

7. 计算概率问题,经常用到排列与组合、加法原理与乘法原理,而且很易弄错.(1)怎样判断是排列问题还是组合问题?(2)何时用加法原理?何时用乘法原理?

答:这两个问题,虽然是中学数学里已学过的内容,但对大学生和成年读者也是容易弄错的问题,值得重视,应该继续下功夫搞清楚,以免在计算概率问题时导致错误.

(1)排列与组合的区别,主要在于排列与顺序有关,而组合与顺序无关.根据这一点,结合问题的具体含义去分析,就可得出正确的答案.下面给出三个问题,由读者去分析、完成并进行比较、体会其中的区别.

1)有10个同学两两握手,问共握了几次手?如果两两互赠照片一张,总共需多少张?

2)有10个同学,每两人互通了一次电话,问共打了几次电话?如果每两人中各给对方写信一封,问共写了多少封信?

3)从5本不同的书里选两本,一共有多少种不同的选法?如果选两本分送给甲、乙两人,一共又有多少种送法?

(答案:1)C_{10}^2,A_{10}^2;2)C_{10}^2,A_{10}^2;3)C_5^2,A_5^2.)

(2) 加法原理与乘法原理的选用．类似于多元微分学中复合函数链式法则的“分线相加，连线相乘”法则，举例说明如下：

设某台机器需要 5 个工人管理，其中至少要有两个熟练工人．现从 9 个工人中选出 5 人去管理这台机器，已知这 9 个工人中有 4 个是熟练工人，问有几种选法？

回答这个问题，可分如下几步处理．

1) 从 9 个工人中选出 5 个工人，其中有两个熟练工人，应有 $C_4^2 \cdot C_5^3$ 种方法；

2) 从 9 个工人中选出 5 个工人，其中有 3 个熟练工人，应有 $C_4^3 \cdot C_5^2$ 种方法；

3) 从 9 个工人中选出 5 个工人，其中有 4 个熟练工人，应有 $C_4^4 \cdot C_5^1$ 种方法；

故依题意共有(图 1-1)

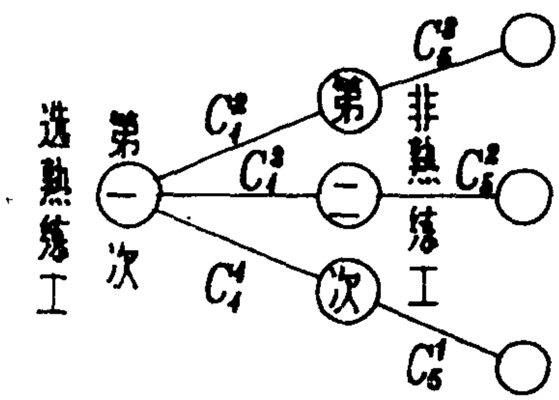


图 1-1

$$C_4^2 \cdot C_5^3 + C_4^3 \cdot C_5^2 + C_4^4 \cdot C_5^1 = 105(\text{种}).$$

由此可见，在一个比较复杂的问题中，往往需要将加法原理与乘法原理并用．

8. 什么是“实际推断原理”？它有什么作用？它与小概率事