应用泛函分析引论

陈殿杰 编

重庆大学出版社

应用泛函分析引论

陈殿杰　编

重 庆 大 学 出 版 社

内容简介

本书根据“全国工科院校泛函分析讨论会”制订并修改的《应用泛函分析》教学大纲编写。第一章为预备知识，第二章至第四章为基础部分，包括度量空间、赋范空间和内积空间。第五章至第七章为应用部分，包括逼近理论初步、有界线性算子谱理论初步和Banach空间微分学初步。每节后面附有一定数量习题。

本书可供工科院校研究生和高年级本科生作教材，亦可供广大工程技术人员参考。

应用泛函分析引论

陈殿杰　编

责任编辑　涂光裕　谢晋洋

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

科学技术文献出版社重庆分社印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：9.375　字数：211千

1987年12月第1版　　1987年12月第1次印刷

印数：1—4500

标准书号：ISBN 7-5624-0049-0 / O·15　　统一书号：13408·20

定　价：1.55元

前　言

随着科学技术的高速发展，"泛函分析"的理论和方法已不仅仅为专业数学工作者感兴趣，而且也吸引着众多技术科学的研究者和工程技术人员。因此，从工科高年级学生、工科研究生以及中级工程技术人员所具备的数学基础的实际出发，写一本既适合他们阅读，又能介绍"泛函分析"的基本内容，还要包含一些应用基础的教科书或参考书，就是一项有意义的工作，这也是本书期望达到的目的。

我们假定读者通晓初等微积分和线性代数基本知识，而一些必不可少的其它基础，则提要地写在第一章中，在使用本书时，可以或详或略酌情处理。第二至四章是介绍"泛函分析"中三大空间及其线性算子理论的基础知识，这是学习"泛函分析"的各类专业人员都必须掌握的。第五至七章分别介绍了逼近理论、有界线性算子谱理论和非线性泛函分析的初步知识，适合力学类、机械类、计算类、测量类以及控制类等专业人员选用。行文力求明白易懂，但又不失去推理的严密性，极少数需要用到更深入知识的重要定理省略了证明。每一节（第七章除外）后面都附有一定数量的习题，估计工科高年级学生和研究生完成它们的大多数不会有什么困难。

本教材虽经多次教学实践，也作了一些大的改动，但终因成书时间仓促，又限于编者本人水平，错漏难免，恳请专家、读者指正。

黄智明教授、陶琨教授在百忙中仔细审阅了全书，贺绍信副教授、章芸讲师对本书写法曾提出若干有益的建议，在此，谨向他们致以诚挚的感谢。

陈殿杰　1987年1月。

目　录

第一章　预备知识

一、集合

集合是数学中最基础的概念之一。粗略地说，凡是具有某种特殊性质的、确定的事物的全体就是一个集合（或简称集）。

集合用单个大写字母A，B，X，Y，…表示，有时，也用大括号表示。例如，$\{1, 2, 3, 4\}$表示以数1，2，3，4为元素的集合；$\{f(t)|_{t\in[a,b]}\}$ 表示定义在闭区间$[a,b]$上的全体函数的集合。

在集论中，常使用下述记号：

ϕ，**空集**。

$a\in A$，a是集A的元（读作a属于A）。

$b\notin A$，b不是集A的元（读作b不属于A）。

$A=B$，集A与集B**相等**（二集由完全相同的元组成）。

$A\neq B$，集A与集B**不等**（二集中至少包含互不相同的一个元）。

$A\subset B$，A是B的**子集**（读作A被B包含，或B包含A），A的每一个元都是B的元。也可记为$B\supset A$。

$A\subsetneqq B$，A是B的**真子集**：A的所有元都属于B，但B至少有一个元不属于A。

$A\cup B=\{x|_{x\in A\text{或}x\in B}\}$，$A$与$B$的**并集**（见图1-1）。

$A\cap B=\{x|_{x\in A\text{且}x\in B}\}$，$A$与$B$的**交集**（见图1-2）。

$A\cap B=\phi$，集A与集B是互相**分离**的（即二集无公共元）。

$A-B=\{x|_{x\in A\text{但}x\notin B}\}$，$A$与$B$的**差集**， 这里 B可以是也可以不是A的子集(见图1-3)。

$A^c=X-A=\{x|_{x\in X\text{但}x\notin A,\ A\subset X}\}$称 A 在X中的**补集** (或**余集**)，如果避免混淆，可以记为C_XA(见图1-4)。

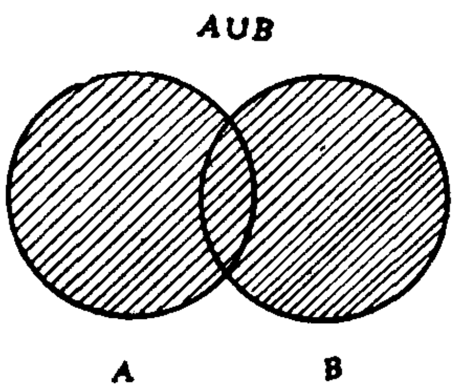

图1-1 两个集合A与B的并

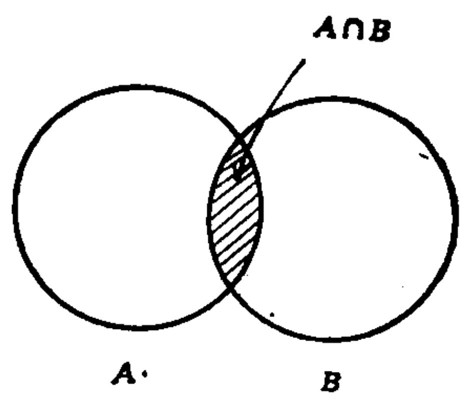

图1-2 两个集合A与B的交

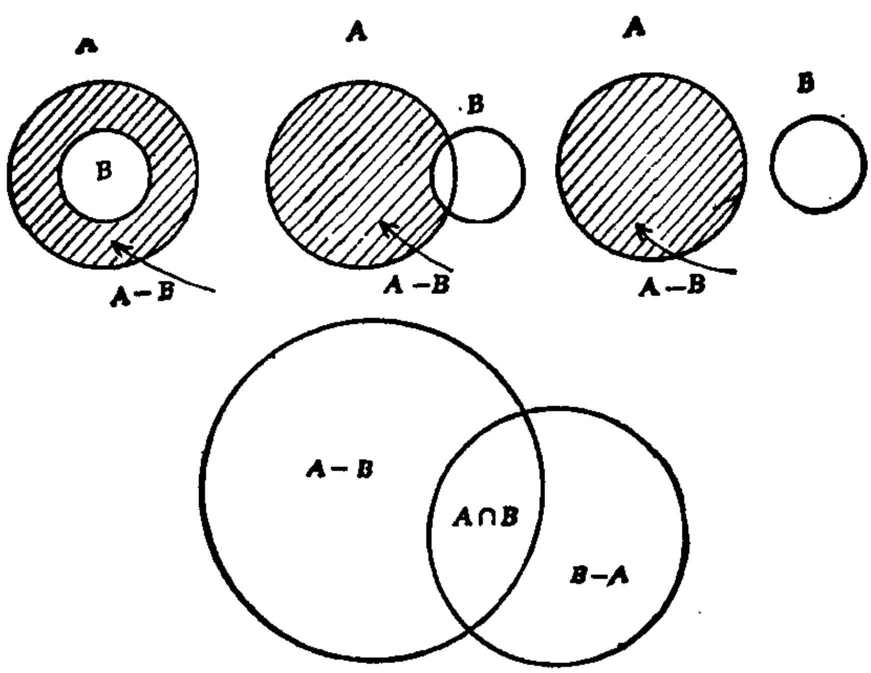

图1-3 集A与集B的差集

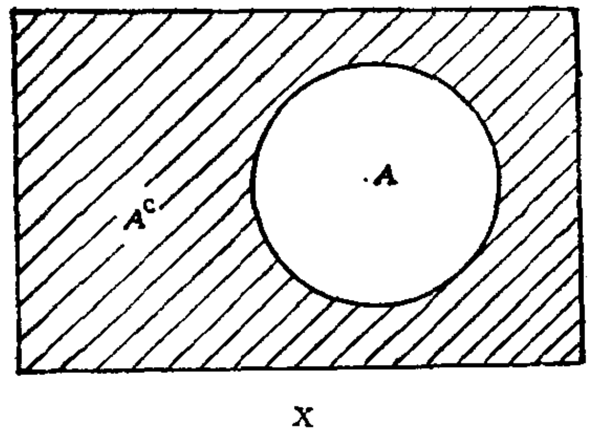

图1-4　集X的子集A在X中的余集

从上面的定义，可以直接推得下述关系：

1^0　$A\cup A=A$，$A\cap A=A$。

2^0　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$。

3^0　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$。

4^0　$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C$。

5^0　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$（见图1-5）。

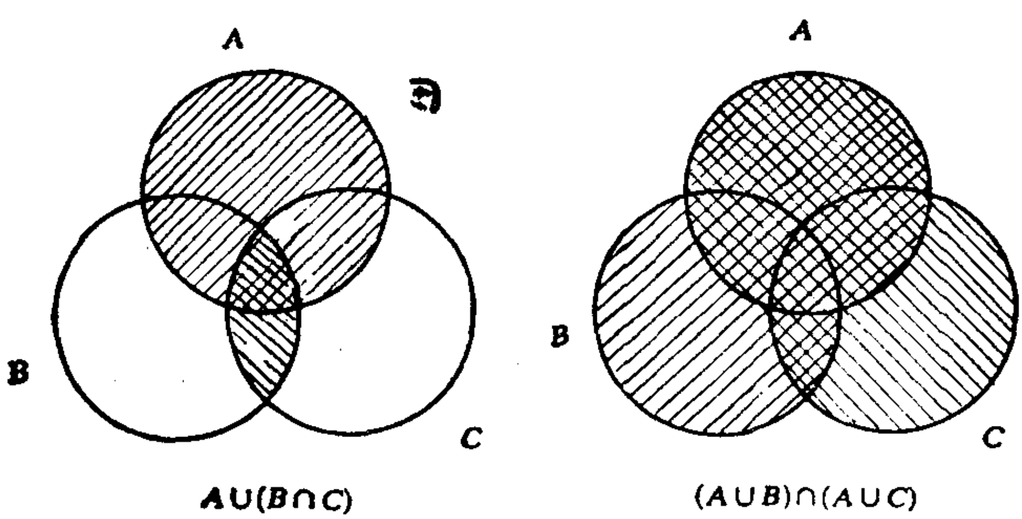

图1-5　5^0式示意图

6^0　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$（见图1-6）。

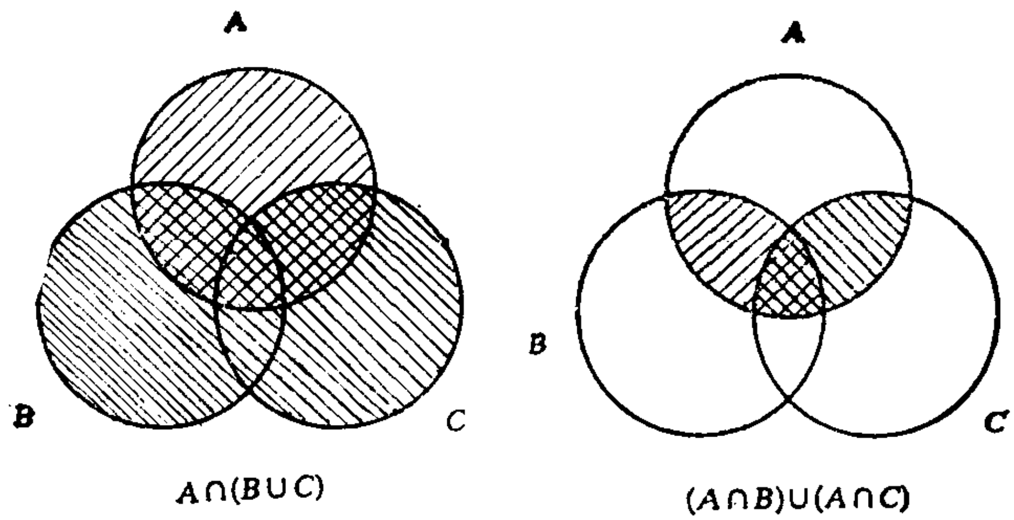

图1-6　6^0式示意图

7^0　$A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$。

8^0　$A\cup B\supset A$，$A\cup B\supset B$。

此外还可以推得一些显然的事实：

$A\subset B\Longleftrightarrow A\cup B=B\Longleftrightarrow A\cap B=A$。

$A\subset C$且$B\subset C\Longleftrightarrow A\cup B\subset C$。

$C\subset A$且$C\subset B\Longleftrightarrow C\subset A\cap B$。

$(A^c)^c=A$，$X^c=\phi$，$\phi^c=X$

命题1　(**De Morgan法则**)：对于集X中的子集$A_n(n=1,2,\cdots)$有

$$(\text{I})\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c\text{；}\quad(\text{II})\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^c\text{。}$$

证：(I)设$x\in\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c$，则$x\notin A_n(n=1,2,\cdots)$，于是$x\in A_n^c(n=1,2,\cdots)$，因此

$$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c\text{，推得}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c$$

反之，设$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n^c$，则$x\in A_n^c(n=1,2\cdots)$，所以，

$x \notin A_n$ $(n=1, 2\cdots)$，$x \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$，于是 $x \in \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$，推得 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c \subset \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$，总之

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$$

（Ⅱ） 对（Ⅰ）取补集，得到

$\left[\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c\right]^c = \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c$，于是 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c$，换 A_n 为 A_n^c，有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n^c)^c\right]^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$$

命题2 对于集 E 与任意一列集 $A_n (n=1, 2, \cdots)$ 分配律成立，亦即

$$E \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap A_n)$$

读者自证。

Cartan积 二非空集 X 和 Y 的Cartan积 $X \times Y$ 是所有序对 (x, y) 作成的集，其中 $x \in X$，$y \in Y$（图1-7）。

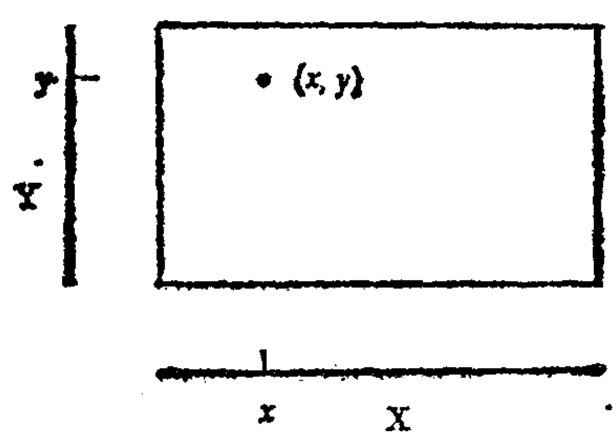

图1-7 积集 $X \times Y$ 构成示意图

设 A 是一集合，如果构成集 A 的元的个数为有限（重复的

元只算一个），则称A为**有限集**，否则称A为**无限集**。

我们规定空集ϕ也是有限集。

称集A为**可数**（或**可列**）**集**，如果A是有限集，或者可以作出正整数与A的元的一个对应；A的每一个元对应着唯一的一个正整数，反之，每一个正整数对应着A唯一一个元。

不可数的无限集称为**不可数集**。

例如：正整数集N，全体正偶数的集，全体有理数的集，具有有理实部且有有理虚部的复数集，具有有理系数、次数低于n的多项式的全体作成的集等都是可数集。而实数集R，闭区间$[a, b]$中的全体实数集，定义在区间$[a, b]$上全体连续实函数作成的集等都是不可数集。

我们有下述结论：

1^0　任意无限集都包含一个可数集。因此，可数集是无限集中"最小"的集。

2^0　可数集的任何无限子集仍是可数的。因此，可数集的任意子集都是可数集。

3^0　二可数集的并集、交集、差集都是可数集。容易证明，可数多个可数集之并集仍是可数集。

二、映射

设X和Y是两个集合，$A\subset X$是任意子集，T是A，Y元素间的一个对应法则；如果对于任一$x\in A$，依照法则T，Y中有唯一确定的元$y\in Y$与之对应，则称T为**"X到Y中"的映射**，记为

T：$X\longrightarrow Y$，或$x\longmapsto Tx$。

集合$A\subset X$称为映射T的**定义域**，记为$\mathscr{D}(T)$。T的象作成的

集合$\{y\in Y|_{y=Tx,\ x\in D(T)}\}$称为映射$T$的**值域**，记为$\mathscr{R}(T)$（图1-8）。

任意子集$B\subset\mathscr{D}(T)$的**象集**$T(B)$是所有象Tx作成的集合，其中$x\in B$。显然，$T(\mathscr{D}(T))=\mathscr{R}(T)$。

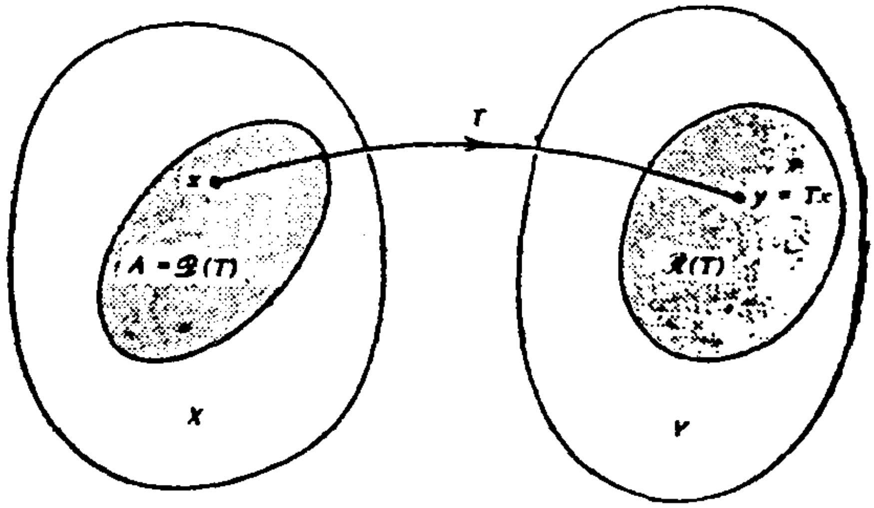

图1-8　映射T示意图

一点$y_0\in Y$的逆象是使得$Tx=y_0$的所有$x\in\mathscr{D}(T)$的集合.子集$Q\subset Y$的**逆象集**是使得$Tx\in Q$的一切$x\in\mathscr{D}(T)$的集合。（注意：点$y_0\in Y$的逆象可以是空集、一点、或者$\mathscr{D}(T)$的子集，这取决于y_0或T。）

特别，如果$\mathscr{R}(T)=Y$，则称T为“**从$\mathscr{D}$(T)$\subset$X到Y上**”**的映射**，又称**满射**（图1-9）。

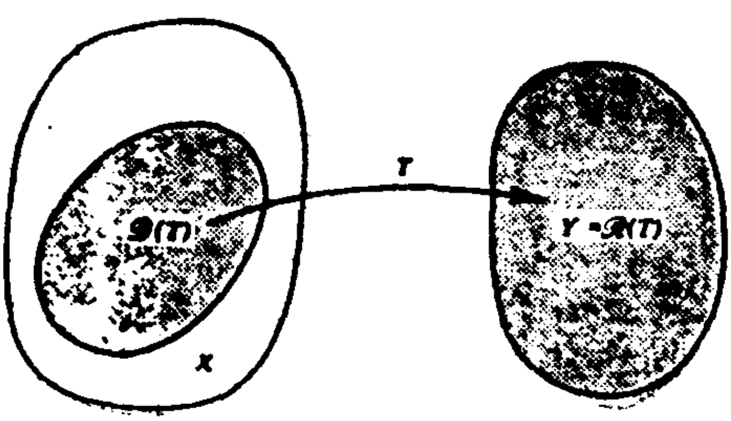

图1-9　满射T示意图

显然，T：$\mathscr{D}(T) \longrightarrow \mathscr{R}(T)$总是满射。

我们称映射T为**单射**或**一一映射**，如果对于任意$x_1, x_2 \in \mathscr{D}(T)$，当$x_1 \neq x_2$时，蕴含$Tx_1 \neq Tx_2$。亦即，$\mathscr{D}(T)$中不同的元有不同的象，于是$\mathscr{R}(T)$中任意点的逆象是单点(图1-10)。

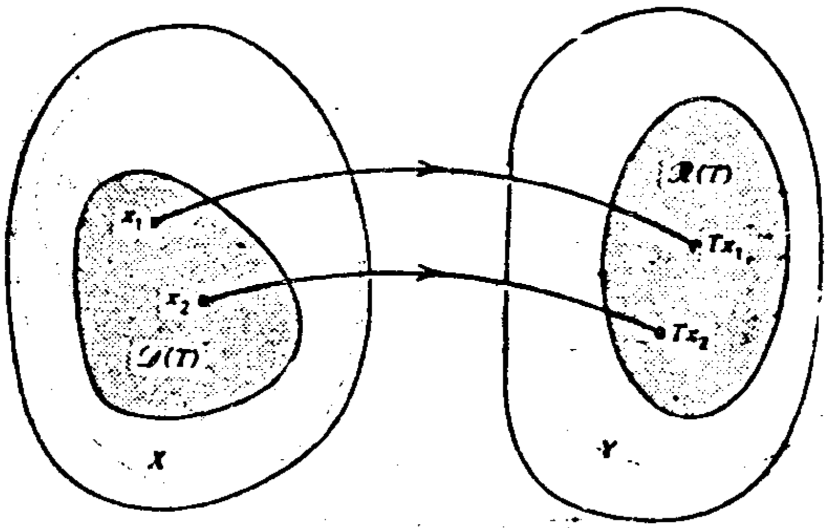

图1-10　T：$D(T) \to R(T)$单射的说明

称T是双射，如果T既是单射又是满射。假设T：$\mathscr{D}(T) \longrightarrow Y$是双射，则可以定义一个从$Y$到$\mathscr{D}(T)$的映射，称为映射$T$的**逆映射**，记为$T^{-1}$，于是$T^{-1}$：$Y \longrightarrow \mathscr{D}(T)$(图1-11)。给定元$y_0 \in Y$，通过$T^{-1}$，必有唯一的元$x_0 \in \mathscr{D}(T)$与之对应。

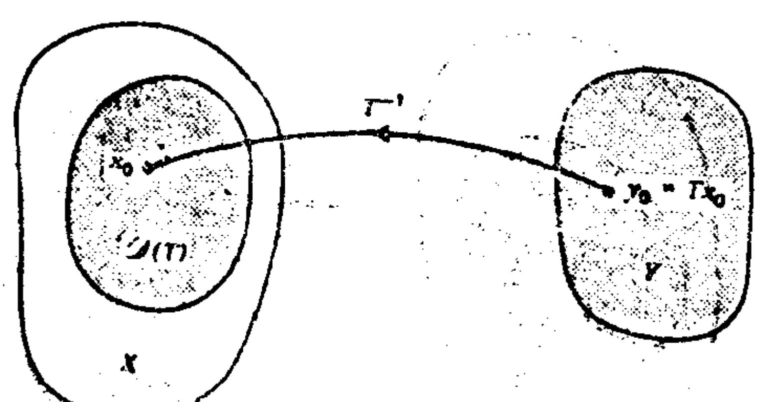

图1-11　双射的逆T^{-1}

就一个单射T：$\mathscr{D}(T)\longrightarrow Y$来说，它不一定是满射，但它必是从定义域$\mathscr{D}(T)$到其值域$\mathscr{R}(T)$的满射，因而是双射。据前讨论，其逆映射$T^{-1}$：$\mathscr{R}(T)\to\mathscr{D}(T)$存在，亦即给定$y_0\in\mathscr{R}(T)$，必有$x_0\in\mathscr{D}(T)$，且$Tx_0=y_0$，或$x_0=T^{-1}y_0$，显然，这个“逆”的概念更普遍一些，今后，我们经常这样使用它(图1-12)。

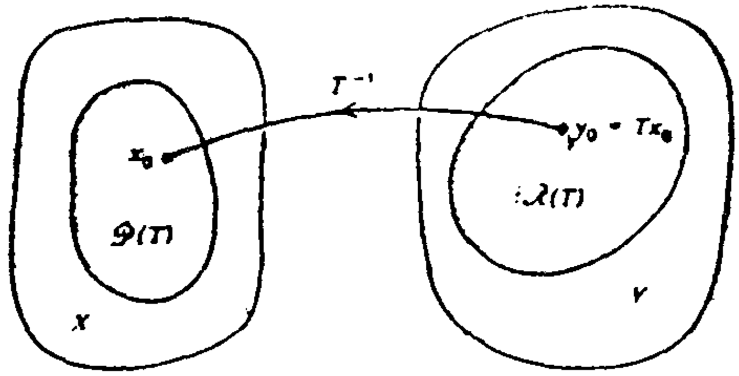

图1-12 逆映射T^{-1}：$R(T)\to D(T)$

两个映射T_1和T_2称为是**相等的**，如果$\mathscr{D}(T_1)=\mathscr{D}(T_2)$，并且对于一切$x\in\mathscr{D}(T_1)=\mathscr{D}(T_2)$，都有$T_1x=T_2x$。

把映射T：$\mathscr{D}(T)\to Y$**限制**在子集$B\subset\mathscr{D}(T)$上，限制$T|_B$是$B\to Y$的映射，它是限制x在集B中而得到的映射。所以，对于所有的$x\in B$，有$T_Bx=Tx$(图1-13)。

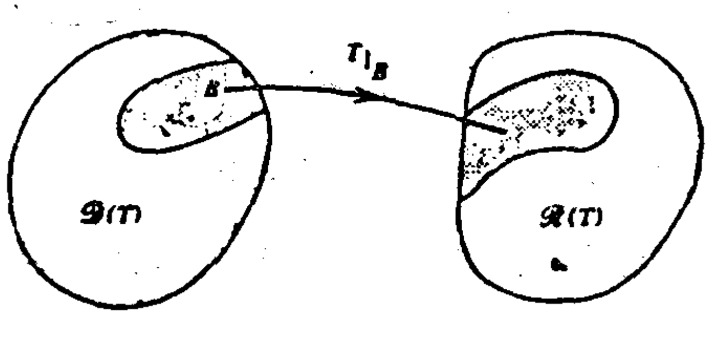

图1-13 映射的限制$T|_B$

映射T从$\mathscr{D}(T)$到集$E\supset\mathscr{D}(T)$的**延拓**是映射$\tilde{T}$，使得

$\tilde{T}|_{D(T)} = T$，即对于所有的$x \in \mathscr{D}(T)$，有$Tx = \tilde{T}x$。

T的延拓称为是**真延拓**，如果$\mathscr{D}(T)$是$\mathscr{D}(\tilde{T})$的真子集，于是$\mathscr{D}(\tilde{T}) - \mathscr{D}(T) \neq \phi$。

下面讨论两个映射的**复合**。如果有两个映射T：$X \to Y$，U：$Y \to Z$，则

$$x \longmapsto U(Tx)$$

称为"从X到Z里"的映射，记为$U \cdot T$或简记为UT。因此，我们有

$$UT: \quad X \to Z \qquad\qquad (x \in X)$$
$$x \longmapsto U(Tx)$$

这时，也称元UTx为映射U和T的**复合式积**(图1-14)。

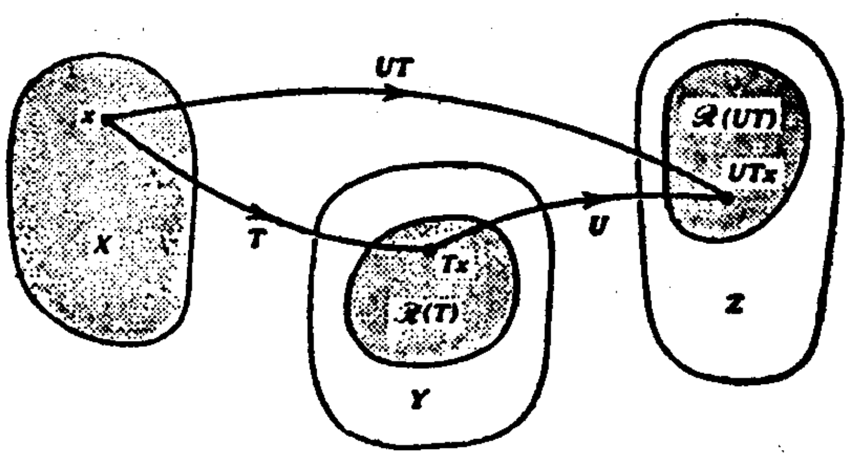

图1-14　映射T与映射U的复合UT

注意：这里两个映射的次序不可颠倒。否则，TU有时甚至毫无意义。

一般地，如果T：$X \to Y$且U：$Y \to X$，则UT：$X \to X$，同时TU：$Y \to Y$亦有意义。但如果$X \neq Y$，则它们并不相同，甚至，如果$X = Y$，这两个映射UT和TU也不一定相同。

三、集簇

一个实数或复数序列 $\{x_n\}$，总可以将一个正整数n和一个实数或一个复数x_n联系起来而得出。这个过程，可以看作正整数集$N=\{1, 2\cdots\}$到实数域R或复数域C里的映射，x_n是n的象，集N叫作该序列的**指标集**。

这个“指标化”的过程可以推广。可以取任意一个非空集I(有限、可数或不可数)来取代前面的集N，并且作I与另一个任意非空集X的映射，这就得到了X的元的**集簇**，记为$(x_\alpha)_{\alpha\in I}$，或简记为(x_α)，这里$x_\alpha\in X$是$\alpha\in I$的象。当然，可能有在I中$\alpha\neq\beta$，但$x_\alpha=x_\beta$。我们称集I为该集簇(x_α)的**指标集**。集簇的一个**子簇**可以这样得到：只要限制指标映射到指标集I的非空子集上。

如果X的元是一个已知集的子集，则可得到一个**子集簇** $(B_\alpha)_{\alpha\in I}$，其中B_α是α的象。

集簇(B_α)的并集$\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha$是其元属于至少一个$B_\alpha$的集合；而交$\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha$是其元属于每一个$B_\alpha$，$\alpha\in I$的集合。如果$I=N$，则化为我们熟知的情形：

$$\bigcup_{\alpha=1}^{\infty}B_\alpha\text{和}\bigcap_{\alpha=1}^{\infty}B_\alpha$$

若$I=\{1, 2\}$，则分别为$B_1\cup B_2$，$B_1\cap B_2$。

注意区分由集X的子集而产生的集簇，X的元是集簇的元，同时也是指标集在指标映射下的象。