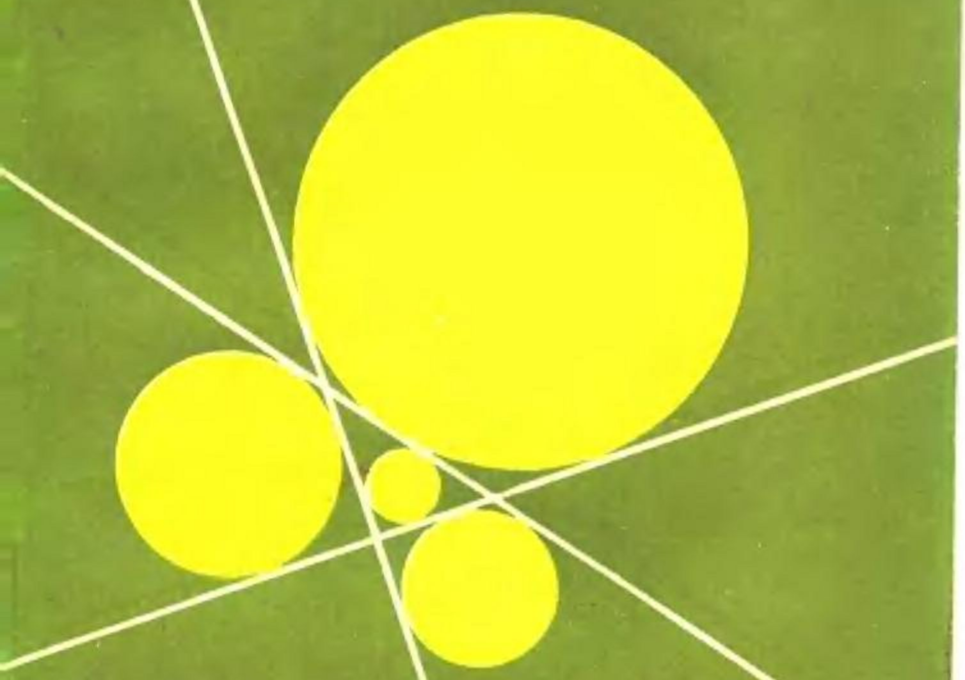
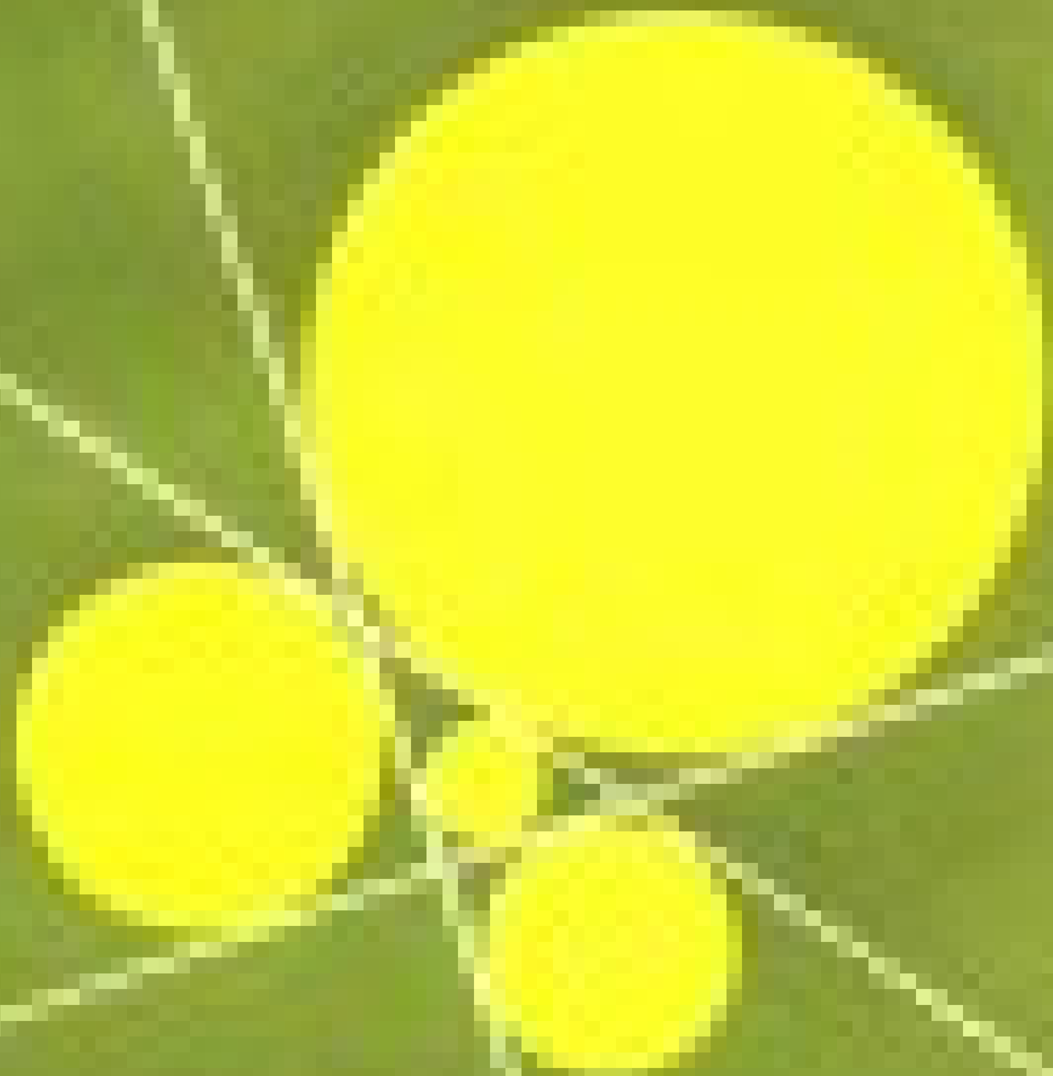
勾股数及其推广

蒋 声 陈瑞琛 编著



人民教育出版社

勾股数及其推广



勾股数及其推广

蒋 声 陈瑞琛

人民教育出版社

内 容 简 介

本书介绍边长为整数的直角三角形、边长为整数且有一角为120°或60°的三角形、边长和面积都是整数的三角形，以及棱长和对角线长都是整数的长方体，最后简介费尔马大定理. 书中材料新颖，内容环绕中学数学教学，富有启发性，可供中学数学教师、中学生、师范院校师生和广大数学爱好者阅读.

勾股数及其推广

蒋 声 陈瑞琛 编著

责任编辑 易熔

*

人民教育出版社出版发行

新华书店总店科技发行所经销

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 2.875 字数 56,000

1990年 2月第 1版 1990年 2月第 1 次印刷

印数 1—1,400

ISBN 7-107-10511-6

G·1667 定价1.00元

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

一、从"勾三股四弦五"谈起

1. 勾股数

我国古代的《周髀算经》是从周公与商高的对话谈起的，其中商高讲了这样一句话：

"故折矩以为勾广三，股修四，径隅五".

在商高的话里，揭示了一种特殊的直角三角形的两条直角边的长度分别是 3 和 4，斜边的长度是 5. 我国古代把直角三角形的两条直角边分别叫做勾、股，斜边叫做弦. 所以，上述直角三角形的三边长度，常被简单地说成"勾三股四弦五".

《周髀算经》中还谈到，"勾股各自乘，并而开方除之"，就得到弦的长，用现代记号可写成

$$a^2+b^2=c^2,$$

其中 a，b 是直角边长，c 是斜边长. 这一事实，我们通常称为**勾股定理**.

一般说来，直角三角形中，任意两边长度是整数时，第三边的长度未必也是整数. 因而，三边的长度都是整数的直角三角形特别令人感兴趣.

如果一个直角三角形的三边长度 a，b，c 的数值都是整数，就把这样的三角形叫做**商高三角形**（即整数边直角三角形），而把对应的整数组 a，b，c 叫做一组**勾股弦数**，简称**勾股数**或**商高数**.

例如，3，4，5 就是最简单的一组勾股数：

$$3^2+4^2=5^2.$$

在《周髀算经》和我国另一本较早的数学书《九章算术》中，除 3，4，5 外，还出现了下列各组勾股数：

$$5^2+12^2=13^2;\qquad 7^2+24^2=25^2;$$

$$15^2+8^2=17^2;\qquad 21^2+20^2=29^2;$$

$$20^2+99^2=101^2;\qquad 48^2+55^2=73^2;$$

$$60^2+91^2=109^2.$$

唐代王孝通《辑古算经》中有下列数组：

$12^2+35^2=37^2;\qquad 13^2+84^2=85^2.$

元代李治《测圆海镜》中有

$$9^2+40^2=41^2.$$

在国外，通常把勾股定理叫做**毕达哥拉斯定理**，并将勾股数叫做**毕达哥拉斯数**，三边长度都是整数的直角三角形叫做**毕达哥拉斯三角形**．这样称呼，是由于一般认为最先严格证明勾股定理的是古希腊哲学家、数学家毕达哥拉斯(公元前六世纪)．不过，根据专家考证，早在公元前两千年左右古代巴比伦的一块泥板上面刻着的一个奇怪的数表，就是一个勾股数表，一共记载着十五组勾股数．这说明勾股数早已进入人类知识的宝库．

在上面写出的这些勾股数中，最容易记住的一组是3，4，5．还有 5，12，13 这一组，也不难记住．但要记住更多的勾股数，就得费点脑筋了．有没有什么公式或定理，能够一举提供大批勾股数，甚至全部勾股数呢？

2. 平方差公式的启发

我们的目标是求三个正整数 a, b, c，使它们满足勾股定理：

$$a^2+b^2=c^2.$$

但是，在我们所熟悉的代数公式中，并没有直接处理两数平方和的公式，倒是有一个关于两数平方差的公式. 因此，不妨尝试把勾股定理改写成

$$c^2-b^2=a^2,$$

并且拿它与平方差公式对照：

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y).$$

容易看出，如果

$$\begin{cases} x-y=1, & (1) \\ x+y=a^2, & (2) \end{cases}$$

那么只要令

$$c=x,\quad b=y, \tag{3}$$

就能使 a,b,c 满足勾股定理了. 从(1)～(3)式得

$$c=\frac{1}{2}(a^2+1),\quad b=\frac{1}{2}(a^2-1). \tag{4}$$

为了使 b 和 c 都是正整数，必须且只须 a 是大于 1 的奇数. 可以直接验证，如果 a 是大于 1 的任意奇数，b 和 c 由(4)式确定，则 a,b, c 确实满足勾股定理. 这样就得到一个很方便的法则：

法则 1 设 a 是大于 1 的任意奇数，取

$$b=\frac{1}{2}(a^2-1),\quad c=\frac{1}{2}(a^2+1),$$

则数组 a,b,c 是勾股数.

法则1表明，任何一个大于1的奇数都能作为某个商高三角形的一条直角边的长度.

例如取 $a=3$，则由法则1得

$$b=\frac{1}{2}(3^2-1)=4, \quad c=\frac{1}{2}(3^2+1)=5;$$

而如果改取 $a=5$，则得到

$$b=\frac{1}{2}(5^2-1)=12, \quad c=\frac{1}{2}(5^2+1)=13.$$

类似地，还可从法则1求出勾股数(7, 24, 25)，(9, 40, 41)，(11, 60, 61)，(13, 84, 85)，等等. 当 $a>13$ 时，斜边长 c 已经大于100了.

3. 巧用乘法公式

用法则1求出的勾股数，都受到条件 $c-b=1$ 的限制. 我们已经从实例中看到，确实存在一些不满足上述限制条件的勾股数，如

$$8^2+15^2=17^2, \qquad 20^2+21^2=29^2,$$

等等. 可见法则1有很大的局限性，需要设法另找其它能导出勾股数的公式.

除平方差公式外，有没有其他涉及平方数的公式呢？

你可能立刻想起下面两个公式：

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2,$$

$$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2.$$

从这两个基本公式推出另一个常用的公式：

$$(x-y)^2+4xy=(x+y)^2. \tag{1}$$

如果 $x-y$ 和 $x+y$ 都是正整数，并且 $4xy$ 是一个正整数的平方，(1)式就与 $a^2+b^2=c^2$ 的形式相符了. 为了满足这些要求，

最简单的办法是令 $x=m^2, y=n^2$，使(1)式成为

$$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2,$$

其中 m, n 是正整数，并且 $m>n$. 这样又得到下面的法则:

法则 2 任意取正整数 m, n，使 $m>n$. 令

$$a=m^2-n^2,$$

$$b=2mn,$$

$$c=m^2+n^2,$$

则数组 a, b, c 是勾股数.

例 1 取 $m=2, n=1$，得 $a=3, b=4, c=5$.

例 2 取 $m=4, n=1$，得 $a=15, b=8, c=17$.

以上两个求勾股数的法则，都曾经被一些大数学家研究过. 古希腊数学家毕达哥拉斯已经知道了法则 1. 古希腊的另一位数学家丢番图(Diophantus)已经知道了法则 2. 又如果在法则 1 中把大于 1 的奇数 a 写成 $2n+1$(n 是任意正整数)，那么法则 1 中的公式可以变形成

$$a=2n+1,$$

$$b=2n(n+1),$$

$$c=2n^2+2n+1,$$

这就成为我国清朝末年黄宗宪《悯笑不计》书中发表的一组公式. 可以看出，在导出这些法则和公式时，我们只用了初中代数里的一些非常简单的知识，通过合理的思考、探索，居然也能独立得到某些名人所得出的结果.

4. 基本勾股数

在求得某些勾股数之后，有一种迅速扩大成果的简单方法：设 a, b, c 是一组勾股数，那么

$$a^2+b^2=c^2; \tag{1}$$

任意取一个正整数 k，把(1)式两边同乘以 k^2，得

$$(ka)^2+(kb)^2=(kc)^2,$$

所以 ka, kb, kc 也是一组勾股数. 例如，从勾股数(3, 4, 5)出发，可得到无穷多组新的勾股数：(6, 8, 10)，(9, 12, 15)，…，$(3k, 4k, 5k)$，…. 一般地，把任何一组勾股数中的各个数同时乘以某个正整数，结果仍得到一组正整数.

另一方面，像(6, 8, 10)这样的勾股数，其中的三个数含有不等于 1 的公约数，将这三个数分别除以它们的公约数，得到的数组(3, 4, 5)仍是勾股数. 当最大公约数是 1 时，不能利用同除以公约数的方法导出新的勾股数.

如果在一组勾股数 a, b, c 中，三个数的最大公约数是 1，就称这组数为**基本勾股数**，或者称为**本原勾股数**.

以基本勾股数为三边长的三角形，叫做**基本商高三角形**. 基本商高三角形是一切与它相似的商高三角形中最小的一个.

知道了一组基本勾股数 a, b, c，随之也就知道了一切与它成比例的勾股数 ka, kb, kc（k 是任意正整数）. 所以，对于任意勾股数的研究，可以归结为对基本勾股数的研究.

基本勾股数有一些简单而重要的性质.

性质 1 基本勾股数 a, b, c 中，任意两个数互质.

证明 设 a 与 b 的最大公约数为 d，则可设

$$a=md, \quad b=nd,$$

其中 m, n 是正整数. 由此得到

$$c^2=a^2+b^2=(md)^2+(nd)^2$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$=(m^2+n^2)d^2,$$

这说明 d 也是 c 的约数．但因 a,b,c 是基本勾股数，所以它们的最大公约数等于 1，因而 $d=1$，由此推出 a 与 b 互质．

类似地可以证明 a 与 c 互质，b 与 c 互质．

性质 2 基本勾股数 a,b,c 中，斜边长 c 必为奇数，另两个数 a 和 b 中一个是奇数，一个是偶数．

证明 根据性质 1，a 与 b 互质，所以 a 和 b 不能都是偶数．下面证明 a 和 b 也不能都是奇数．用反证法．假定 a 和 b 都是奇数，那么可设

$$a=2m-1,\quad b=2n-1,$$

其中 m,n 都是正整数．于是

$$a^2+b^2=(4m^2-4m+1)+(4n^2-4n+1)$$
$$=4(m^2-m+n^2-n)+2,$$

因而 a^2+b^2 是偶数，但不是 4 的倍数．这个数应该等于 c^2，所以 c 不能是奇数，因为奇数的平方仍是奇数；c 也不能是偶数，因为偶数的平方是 4 的倍数．这与 c 是正整数相矛盾，所以 a 和 b 不能都是奇数，因而只能一个是奇数，一个是偶数．由此进而推出 c 一定是奇数．

性质 3 设在基本勾股数 a,b,c 中，b 是偶数，则 $\frac{c+a}{2}$ 和 $\frac{c-a}{2}$ 是互质的正整数．

证明 根据性质 2，c 和 a 都是奇数，因而 $c+a$ 和 $c-a$ 都是偶数，故可设

$$c+a=2u,\quad c-a=2v,$$

其中 u 和 v 都是正整数．若 u 和 v 的最大公约数是 d，则可

设

$$u=pd,\quad v=qd,$$

其中 p,q 是正整数. 因而

$$c=u+v=(p+q)d,$$

$$a=u-v=(p-q)d,$$

可见 d 也是 c 和 a 的公约数. 但是根据性质 1, c 与 a 互质, 所以 $d=1$. 这就推出 u 与 v 互质, 即 $\frac{c+a}{2}$ 和 $\frac{c-a}{2}$ 是互质的正整数.

5. 确定一切勾股数的公式

利用法则 1 和法则 2, 已经能求出很多勾股数, 但是还不能求出一切勾股数. 现在我们来推导可确定一切勾股数的公式.

为了确定一切勾股数, 可以设法先确定一切基本勾股数.

根据性质 2, 在 a 与 b 中有一个且只有一个是偶数. 为了确定起见, 不妨设 b 是偶数. 由

$$b^2=c^2-a^2,$$

两边同除以 4, 得

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{c+a}{2}\cdot\frac{c-a}{2}.$$

令

$$b=2w,\quad c+a=2u,\quad c-a=2v,$$

上式化为

$$w^2=uv, \tag{1}$$

其中 w,u,v 都是正整数, 并且 u 与 v 互质, $u>v$(因为 $a>0$). 通过把 w,u,v 分解成质因数的乘积, 可知方程(1) 的一般解

是

$$w=mn,\ u=m^2,\ v=n^2,$$

其中 m 和 n 是互质的正整数，$m>n$. 由此得到

$$b=2w=2mn,$$

$$a=u-v=m^2-n^2,$$

$$c=u+v=m^2+n^2.$$

由于 a 是奇数，所以 m 和 n 必须一个是偶数，另一个是奇数. 总之，我们已经证明了下面的重要结果：

定理 一切基本勾股数可用下面的公式确定：

$$a=m^2-n^2,$$

$$b=2mn,$$

$$c=m^2+n^2,$$

其中 m 和 n 是互质的正质数，$m>n$，并且 m 和 n 这两个数中一个是偶数，另一个是奇数.

推论 一切勾股数可用下面的公式确定：

$$a=(m^2-n^2)k,$$

$$b=2mnk,$$

$$c=(m^2+n^2)k,$$

其中 m 和 n 是互质的正整数，$m>n$，并且 m 和 n 两数一奇一偶；k 是任意正整数. 当 $k=1$ 时得到基本勾股数.

在上面的公式中，正整数 m, n, k 叫做**参数**.

根据上述定理计算基本勾股数，在 $c<100$ 的范围内共得十六组，如下表所示：

对表中各组数进行仔细的观察和比较，可以发现一些明显的规律，从而归纳出勾股数的某些性质. 关于勾股数的性

参数号	m	n	a	b	c
1	2	1	3	4	5
2	3	2	5	12	13
3	4	1	15	8	17
4	4	3	7	24	25
5	5	2	21	20	29
6	5	4	9	40	41
7	6	1	35	12	37
8	6	5	11	60	61
9	7	2	45	28	53
10	7	4	33	56	65
11	7	6	13	84	85
12	8	1	63	16	65
13	8	3	55	48	73
14	8	5	39	80	89
15	9	2	77	36	85
16	9	4	65	72	97

质，我们将在下一节中讨论.

练 习 一

1. 证明：若 b 是偶数，$b>0$，则数组 $b, \left(\frac{b}{2}\right)^2-1, \left(\frac{b}{2}\right)^2+1$ 是勾股数. 任意写出三组这样的勾股数.

2. 黄宗宪《惆笑不计》(1906 年出版) 书中提出下面的公式：$a=2(m+1), b=m^2+2m, c=m^2+2m+2$，$m$ 是正整数. 验证这组公式给出的 a,b,c 是勾股数.

3. 写出四组勾股数，使它们都有一条直角边的长度是12，但

是斜边长各不相同.

4. 写出四组勾股数，使它们的斜边长都是 65，但是直角边的长度各不相同.

5. 已知 a,b,c 是一组勾股数(c 是斜边长). 求一组新的勾股数，使其斜边长的数值等于 c^2.

6. 证明：勾股数 9，12，15 不能表示成法则 2 中的形式(即 $a=m^2-n^2, b=2mn, c=m^2+n^2$, m 和 n 是正整数，$m>n$)，因而不能从法则 2 得到一切勾股数.

二、商高三角形和勾股数的性质

上一节已经介绍了勾股数的求法，并且列举了一些勾股数的实例. 现在我们来讨论勾股数和商高三角形的某些一般性质.

1. 商高三角形的边长、周长和面积

性质 1 任何商高三角形必有一条直角边的长度是 4 的倍数.

证明 根据勾股数的计算公式，如果不计两直角边的顺序，恒有

$$b=2mnk,$$

其中 m 和 n 两数中一个是奇数，另一个是偶数；k 是正整数. 因而 b 总是 4 的倍数，即商高三角形恒有一条直角边是 4 的倍数.

性质 2 任何商高三角形的两条直角边中，必有一边的长度是 3 的倍数.

证明 不计两直角边的顺序，总能由下列公式计算商高三角形的两条直角边的长度:

$$a=(m^2-n^2)k, b=2mnk,$$

其中 m,n 是互质的正整数，$m>n$，k 是正整数.

如果 m 和 n 中至少有一个是 3 的倍数，那么 b 是 3 的倍数.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com