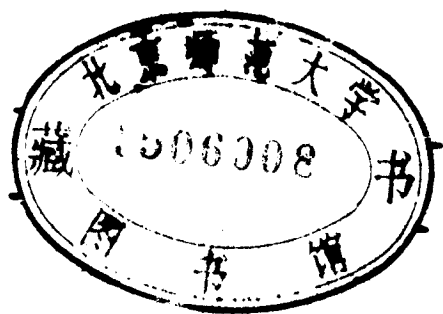




# 实变函数论中的反例

程 庆      汪远征



河南大学出版社

---

## 实变函数论中的反例

程 庆 汪远征

责任编辑 卞 庸

---

河南大学出版社出版

(开封市明伦街85号)

河南省新华书店发行

中国科学院开封印刷厂印刷

---

开本:787×1092毫米1/32 印张:7.75 字数:195千字

1989年1月第1版 1989年1月第1次印刷

印数:1—3000 定价:1.30元

---

ISBN7-81618-128-9/O·10

741/53/03

## 前 言

数学中所谓的“反例”，就是用以否定错误命题而举的例子。比如，对于“直线上的任何集都是 Lebesgue 可测集”这一命题，如果想要肯定它，就需要按照数学的逻辑加以证明；而如果想要否定它，就需要举出一个不是 Lebesgue 可测集的直线上的集来，即举出一个反例来。众所周知，对于上述命题，反例确实存在，于是该命题被否定，从而“直线上的集是否都是 Lebesgue 可测集”这一问题得到解决。由此可见，通过证明肯定正确命题与通过反例否定错误命题，在数学研究中是同等重要的。

本书就是专门列举实变函数论中的反例的。这些反例大致可分为以下三类：用来否定似是而非的命题的；用来说明命题和定理的条件、结论不可更改的；用来纠正直观上可能产生的错觉的。如果说一般的实变函数论教材是让读者从正面学习这门学科，那么本书可以说是帮助读者从“反面”对这门学科有更深刻更透彻的理解。

全书内容参照通行的实变函数论教材分为九章。由于本书的读者对实变函数论的内容已有基本了解，所以每章开始仅给出本章反例所涉及的定义。至于定理，一般不再专门列出，只是在反例中用到时才给以叙述。

本书适于学习实变函数论的大专学生、函授生和自学者使用。对于讲授这门课程的教师，本书也是一本有用的参考

书。

由于编者水平有限，本书错误和不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

本书稿经孙荣光教授认真审阅，在此表示衷心的感谢。

编者

1987年11月

# 目 录

<b>第一章 集合与映射</b> .....	( 1 )
1. 集合运算中“消去律”不成立.....	( 4 )
2. 集合运算中“移项”法则不成立.....	( 5 )
3. 集合运算中“去括号”法则不成立.....	( 5 )
4. 差对于交的分配律不成立.....	( 6 )
5. 并对于差以及差对于并的分配律均不成立.....	( 6 )
6. 对称差对于交的分配律不成立.....	( 7 )
7. 并对于对称差以及对称差对于并的分配律均不成立.....	( 7 )
8. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus B_n)$ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus B_n)$ .....	( 7 )
9. $\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{\infty} E_{ij} \neq \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{ij}$ .....	( 8 )
10. 非单调的收敛集列.....	( 8 )
11. $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \lim_{n \rightarrow \infty} E_n \subseteq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ .....	( 10 )
12. $\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n \cup \varliminf_{n \rightarrow \infty} B_n \subseteq \varliminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n)$ $\subseteq \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n \cup \varliminf_{n \rightarrow \infty} B_n \subseteq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n)$ .....	( 10 )
13. $\varliminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) \subseteq \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n \cap \varliminf_{n \rightarrow \infty} B_n$ $\subseteq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) \subseteq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \cap \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} B_n$ .....	( 11 )

$$14. \overline{\lim (A_n \setminus B_n)} \subseteq \overline{\lim A_n} \setminus \underline{\lim B_n} \dots\dots\dots (12)$$

15. 不可列集\dots\dots\dots (13)

16.  $\overline{A} = \overline{B}$  且  $\overline{C} = \overline{D}$ , 但

$$\overline{A \cup C} \neq \overline{B \cup D}, \overline{A \cap C} \neq \overline{B \cap D},$$

$$\overline{A \setminus C} \neq \overline{B \setminus D} \dots\dots\dots (14)$$

17.  $\overline{A} = \overline{B}$ ,  $\overline{C} = \overline{D}$  且  $A \supset C$ ,  $B \supset D$ , 但

$$\overline{A \setminus C} \neq \overline{B \setminus D} \dots\dots\dots (14)$$

18.  $f^{-1}(f(A)) \neq A \dots\dots\dots (15)$

19.  $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$   
 $f(A_1 \setminus A_2) \neq f(A_1) \setminus f(A_2) \dots\dots\dots (15)$

**第二章 欧氏空间中的点集**\dots\dots\dots (17)

1. 无限个开集的交未必是开集\dots\dots\dots (19)

2. 无限个闭集的并未是闭集\dots\dots\dots (19)

3. 对于无限指标集  $I$ ,  
 $(\bigcup_{a \in I} A_a)' \neq \bigcup_{a \in I} A_a'$ ,  $\overline{\bigcup_{a \in I} A_a} \neq \bigcup_{a \in I} \overline{A_a} \dots\dots\dots (20)$

4.  $(A \cap B)' \neq A' \cap B'$ ,  $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B} \dots\dots\dots (20)$

5.  $(A \cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ \dots\dots\dots (20)$

6. 对于无限指标集  $I$ ,  $(\bigcap_{a \in I} A_a)^\circ \neq \bigcap_{a \in I} A_a^\circ \dots\dots\dots (21)$

7.  $b(A \cup B) \neq b(A) \cup b(B)$ ,  
 $b(A \cap B) \neq b(A) \cap b(B) \dots\dots\dots (21)$

8. 对于无限指标集  $I$ ,  $b(\bigcup_{a \in I} A_a)$  不包含于  
 $\bigcup_{a \in I} b(A_a) \dots\dots\dots (22)$

9.  $F$  是闭集但  $(F^\circ) \neq F$ ,

- $G$  是开集但  $(G)^\circ \neq G$  ..... ( 22 )
10. 两个完全集的交未必是完全集 ..... ( 22 )
11. 无限个完全集的并未必是完全集 ..... ( 23 )
12. 疏朗的完全集 ..... ( 23 )
13. 由无理数组成的疏朗完全集 ..... ( 23 )
14. 导集具有连续统势的可列集  $E$ , 使  
 $E \cap E' = \emptyset$  ..... ( 23 )
15. 一阶导集非空、二阶导集为空的集 ..... ( 24 )
16.  $n-1$  阶导集非空、 $n$  阶导集为空的集 ..... ( 24 )
17. 各阶导集互异的集 ..... ( 24 )
18. 导集为不可列集的孤立点集 ..... ( 25 )
19. 不是孤立点集的疏朗集 ..... ( 25 )
20. 余集不是疏朗集的稠密集 ..... ( 25 )
21. 两个不相交的疏朗集, 其中每一集的任一点都是另一集的极限点 ..... ( 26 )
22. 具有中介值性质但不稠密的集 ..... ( 26 )
23. 一系列互不相交的稠密的不可列集 ..... ( 26 )
24. 一系列互不相交的稠密的不可列集 ..... ( 27 )
25.  $[0, 1]$  中无理数组成的不可列闭集 ..... ( 27 )
26. 每个集稠密但交为空集的递减集列 ..... ( 28 )
27.  $[0, 1]$  表为不交稠密集  $A$  与  $B$  之并, 对  $[0, 1]$  中任何开区间  $I$ ,  $I \cap A$  与  $I \cap B$  均具有连续统势 ..... ( 28 )
28. 平面上与任一直线至多相交于两点的稠密集 ..... ( 29 )
29. 单位正方形  $S$  内的稠密子集  $A$ , 使得与  $S$



相交的每条铅直线或水平直线恰与 $A$ 交于一点.....	( 30 )
30. 平面上无界闭集的投影未必是直线上的闭集.....	( 31 )
31. 非 $G_0$ 集的集.....	( 31 )
32. 非 $F_0$ 集的集.....	( 33 )
33. 既非 $G_0$ 集也非 $F_0$ 集的集.....	( 33 )
34. 可列个 $G_0$ 集之并未必是 $G_0$ 集.....	( 34 )
35. 可列个 $F_0$ 集之交未必是 $F_0$ 集.....	( 35 )
36. 关于有限覆盖定理的条件.....	( 35 )
37. 关于闭集套定理的条件.....	( 35 )
38. 关于分离定理的条件.....	( 36 )
39. 关于点到闭集的距离.....	( 36 )
40. 关于两闭集的距离.....	( 37 )
<b>第三章 欧氏空间上的连续函数</b> .....	( 38 )
1. $f$ 不连续但 $ f $ 和 $f^2$ 连续.....	( 39 )
2. $f$ 与 $g$ 都不连续, 但 $f+g$ 与 $fg$ 连续.....	( 40 )
3. 开集的连续象未必是开集.....	( 40 )
4. 闭集的连续象未必是闭集.....	( 40 )
5. 不连续的开函数.....	( 40 )
6. 具有达布性质的不连续函数.....	( 42 )
7. 恰在有理点间断的函数.....	( 42 )
8. 恰在一个给定的可列集上间断的函数.....	( 43 )
9. 仅在一点连续的函数.....	( 44 )
10. 恰在任意给定的有限个点连续的函数.....	( 44 )
11. 恰在整数点连续的函数.....	( 44 )

12.	恰在 Cantor 集上连续的函数	( 44 )
13.	恰在 Cantor 集上间断的函数	( 45 )
14.	恰在正无理点连续的函数	( 45 )
15.	恰在给定的 $F_0$ 集上间断的函数	( 46 )
16.	连续点集与间断点集均在 $[0,1]$ 上稠密且在 $[0,1]$ 内任何开区间中具有连续统势的函数	( 48 )
17.	乌利逊引理中闭集的条件不可少	( 49 )
18.	将疏朗集映成区间的连续函数	( 49 )
19.	一一对应的连续函数, 但反函数不连续	( 50 )
20.	连续但非一致连续的函数	( 51 )
21.	$f$ 与 $g$ 均一致连续, 但 $fg$ 不一致连续	( 51 )
22.	关于连续函数的连续延拓	( 51 )
23.	分别对于各个变量连续的不连续函数	( 52 )
24.	在单位正方形上处处间断而对于其中一个变量连续的函数	( 53 )
25.	区间 $[0,1]$ 到单位正方形 $[0,1] \times [0,1]$ 上的一个连续映射	( 53 )

#### 第四章 抽象测度 ( 55 )

1	不是环的半环	( 61 )
2.	不是代数的环	( 61 )
3.	不是 $\sigma$ 环的环	( 61 )
4.	不是 $\sigma$ 代数的 $\sigma$ 环	( 61 )
5.	不是 $\sigma$ 环的单调类	( 62 )
6.	对并和交运算封闭的类未必是环	( 62 )
7.	对交和差运算封闭的类未必是环	( 62 )

8. 对可列并和可列交运算封闭的类未必是 $\sigma$ 环..... ( 62 )
9. 半环产生的 $\sigma$ 环与它产生的单调类未必相等..... ( 63 )
10. 环上有限可加但非可列可加的集函数..... ( 63 )
11. 环上有限可加集函数在一定条件下成为测度的定理对半环不成立..... ( 63 )
12. 不完备测度..... ( 64 )
13. 关于测度延拓定理的条件..... ( 65 )
14. 有限测度引出的外测度未必有限..... ( 67 )
15. 不满足外测度定义中三条件之一的非负集函数..... ( 67 )
16.  $\sigma$ 有限外测度引出的测度未必 $\sigma$ 有限..... ( 68 )
17. 非正则外测度..... ( 69 )
18. 不具有下连续性的外测度..... ( 70 )
19. 不具有上连续性的外测度..... ( 70 )
20. 两个正则外测度之和未必是正则外测度... ( 71 )
21. 当 $\mu$ 仅在环 $R$ 上有限可加时,  $\mu^*$ ( $\mu$ 引出的外测度)所引出的测度 $\bar{\mu}$ 未必是它的延拓..... ( 72 )
22. 当环 $R$ 上测度 $\mu$ 非 $\sigma$ 有限时,  $\mu$ 在 $S(R)$ 上的延拓的完备化与 $\mu^*$ 可测集类上的 $\mu^*$ 未必相等..... ( 73 )
23. 可测覆盖存在性定理中“ $\sigma$ 有限”的条件不可少..... ( 73 )
24. 广义测度表为两个测度之差时表法不唯一 ( 74 )

- 25. 哈恩分解不唯一..... ( 75 )
- 26. 关于绝对连续等价定理的条件..... ( 75 )
- 27. 关于拉东-尼古丁定理的条件..... ( 76 )
- 28. 非正则的 Borel 测度..... ( 77 )

**第五章 Lebesgue 测度**..... ( 81 )

- 1. 直线上的不可测集..... ( 83 )
- 2. 集  $M$ , 使任意可测集  $E$ , 有  
 $m_*(M \cap E) = 0, m^*(M \cap E) = m(E) \dots$  ( 84 )
- 3. 集  $M$ , 使任意可测集  $E$ , 有  
 $m^*(M \cap E) = m^*(M^c \cap E) = m(E) \dots$  ( 85 )
- 4. 不相交的集  $A$  和  $B$ , 使  
 $m^*(A \cup B) < m^*(A) + m^*(B) \dots$  ( 85 )
- 5.  $[0,1]$  中不交非空集列  $\{E_n\}$ , 使  
 $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) < \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) \dots$  ( 85 )
- 6.  $[0,1]$  中递减集列  $\{A_n\}$ , 使  
 $m^*(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) < \lim_{n \rightarrow \infty} m^*(A_n) \dots$  ( 86 )
- 7.  $[0,1]$  中递减集列  $\{A_n\}$ , 每个  
 $m^*(A_n) = 1$ , 但  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ . ..... ( 87 )
- 8. 平面上与每条直线相交于不可列个点的零测度集..... ( 88 )
- 9. 平面上与每条直线恰交于  $n$  个点的零测度集..... ( 88 )
- 10. 平面上与每条直线恰交于可列个点的零测度集..... ( 90 )

11. 平面上与任一直线至多相交于两点的不可测集..... ( 90 )
12. 平面上与每条直线恰交于  $n$  个点的不可测集..... ( 92 )
13. 平面上与每条直线恰交于可列个点的不可测集..... ( 93 )
14. 非 Borel 集的 Lebesgue 可测集..... ( 93 )
15. 在两个坐标轴上的投影均不可测的平面上的可测集..... ( 94 )
16. 差集包含原点的一个邻域的零测度集..... ( 94 )
17. 和集为区间的零测度集..... ( 96 )
18. 凝点集为全直线的零测度集..... ( 96 )
19. 正测度的疏朗完全集..... ( 97 )
20.  $[0,1]$  中测度可充分小的开集  $G$ , 使得  $\bar{G} = [0, 1]$  ..... ( 98 )
21.  $[0,1]$  中可列个互不相交的疏朗集, 其并的测度为 1 ..... ( 99 )
22. 无界的零测度集..... ( 100 )
23. 不可列的零测度集..... ( 100 )
24. 不可列的稠密的零测度集..... ( 100 )
25.  $[0,1]$  中测度为 1 的第一范畴的集..... ( 101 )
26.  $[0,1]$  中测度为零的第二范畴的集..... ( 102 )
27. 非  $G_\delta$  集的零测度集..... ( 102 )
28. 非  $F_\sigma$  集的零测度集..... ( 102 )
29. 直线上测度有限的集  $E$ , 使对任意区间  $I$ ,  $0 < m(I \cap E) < m(I)$  ..... ( 102 )

30.  $[0,1]$  中可测集列  $\{E_n\}$ , 每个  $m(E_n) \geq a > 0$ ,  
但不存在交集具有正测度的子列 ..... (103)
31. 有理数集排成的一个序列  $\{r_n\}$ , 使得全体开  
区间  $(r_n - \frac{1}{n}, r_n + \frac{1}{n})$  不能覆盖全直线 ... (103)
32.  $(0,1)$  中的数  $\alpha$ , 它不属于每个区间  
 $(r_n - \frac{1}{2^{n+1}}, r_n + \frac{1}{2^{n+1}})$ , 其中  $\{r_n\}$  是  $(0,1)$   
中全体有理数按 Cantor 法排成的序列 ... (105)
33. 直线上使  $E+E$  不可测的可测集  $E$  ..... (106)
34. 平面上使  $E+E$  不可测的可测集  $E$  ..... (107)
35. 直线上使  $E+E$  可测的不可测集  $E$  ..... (108)
36. 平面上使  $E+E$  可测的不可测集  $E$  ..... (109)

**第六章 可测函数** ..... (110)

1. 非 Lebesgue 可测的函数 ..... (111)
2. 非 Borel 可测的 Lebesgue 可测函数 ..... (112)
3. 处处间断的非 Borel 可测的 Lebesgue 可  
测函数 ..... (112)
4.  $f$  不可测但  $|f|$  与  $f^2$  均可测 ..... (112)
5.  $f$  与  $g$  均不可测但  $f+g$  与  $fg$  可测 ..... (113)
6.  $f$  与  $g$  均不可测, 但  $f+g$  可测然而非  
Borel 可测 ..... (113)
7. 对任意实数  $\alpha$ , 集  $E(f=\alpha)$  恒可测, 但  $f$   
不可测 ..... (113)
8. 对任意实数  $\alpha$   
 $m\{x \in (0,1) : f(x) \geq \alpha\} = m\{x \in (0,1) :$

- $g(x) \geq a$ }, 但  $f \neq g$  于  $(0,1)$  ..... (114)
9. 把零测度集映成正测度集的连续函数 ..... (115)
10. 把正测度集映成零测度集的连续函数 ..... (115)
11. 可测集在连续映射下的象未必可测 ..... (115)
12. 可测集在连续映射下的原象未必可测 ..... (116)
13. 连续函数与可测函数的复合函数未必可测 (116)
14.  $f$  在  $R^1$  上几乎处处连续, 但不与任何连续函数几乎处处相等 ..... (117)
15.  $f$  在  $R^1$  上处处不连续, 但与某连续函数几乎处处相等 ..... (117)
16.  $R^1$  上几乎处处等于 0 的可测函数把任意区间映成  $R^1$  ..... (117)
17.  $R^1$  上几乎处处等于 0 的可测函数, 其图形在  $R^2$  中稠密 ..... (119)
18. 几乎处处收敛的 Borel 可测函数列的极限函数未必 Borel 可测 ..... (119)
19. 使  $\left\{f\left(x - \frac{1}{n}\right)\right\}$  不几乎处处收敛于  $f(x)$  的有界可测函数  $f$  ..... (119)
20. 有界可测函数列  $\{f_n\}$ , 其任何子列在任何区间上都不几乎处处收敛 ..... (121)
21. 可测函数列  $\{f_n^{(k)}\}$  处处收敛于  $f^{(k)}$  ( $k=1, 2, \dots$ ), 且  $\{f^{(k)}\}$  处处收敛于  $f$ , 但  $\{f_n^{(k)}\}$  不存在收敛于  $f$  的子列 ..... (122)
22. 可测函数的不可列族, 其上、下确界函数未必可测 ..... (123)

23. Егоров 定理中,  $m(E) < \infty$  的条件不可少 ..... (124)
24. Егоров 定理的结论不能加强为  $m(E_s) = 0$  ..... (124)
25. Егоров 定理对连续指标函数族不成立 ... (125)
26. 在  $[0, 1]$  上处处收敛但在其任一子区间上非一致收敛的可测函数列 ..... (125)
27. 处处收敛但不测度收敛的可测函数列 ..... (126)
28. 测度收敛但处处不收敛的可测函数列 ..... (126)
29.  $\{f_n\}$  测度收敛于  $f$ , 但  $\{f_n^2\}$  不测度收敛于  $f^2$  ..... (128)
30.  $\{f_n\}$  测度收敛于  $f$ , 但  $\left\{\frac{1}{f_n}\right\}$  不测度收敛于  $\frac{1}{f}$  ..... (129)
31.  $\{f_n\}$  测度收敛于  $f$ ,  $g$  连续, 但  $\{g(f_n)\}$  不测度收敛于  $g(f)$  ..... (130)
32.  $\{f_n\}$  测度收敛于  $f$ ,  $g$  连续, 但  $\{f_n(g)\}$  不测度收敛于  $f(g)$  ..... (131)
33. 不存在阶梯函数列处处收敛于它的可测函数 ..... (131)
34. Лузин 定理的结论不能加强为  $m(E \setminus F) = 0$  ..... (132)
35. Лузин 定理的结论不能将连续函数改为多项式 ..... (132)
36. 不存在连续函数列处处收敛于它的可测函



数	(133)
<b>第七章 Lebesgue 积分</b>	(134)
1. $f$ 可积但 $f^2$ 不可积	(136)
2. $f^2$ 可积且 $f$ 可测, 但 $f$ 不可积	(136)
3. $f^p (p > 0)$ 可积但 $f^*(s > 0, s \neq p)$ 不可积	(137)
4. $0 < s < p < \infty$ , 任意 $t \in [s, p]$ , $f^t$ 可积; 任意 $u \in [s, p]$ , $f^u$ 不可积	(138)
5. $g \leq f$ 且 $f$ 可积, 但 $g$ 不可积	(138)
6. L 可积但非 R 可积的函数	(138)
7. L 可积但与任意 R 可积函数都不几乎处处相等的函数	(139)
8. 广义 R 可积但非 L 可积的函数	(139)
9. $R^1$ 上处处有限但在任一区间上都不可积的可测函数	(140)
10. 在任一区间上本性无界的可积函数	(141)
11. $f$ 在直线上非负可积, 使得对任意区间 $(a, b)$ 与实数 $\alpha, m((a, b) \cap \{f \geq \alpha\}) > 0$	(142)
12. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} m(E( f  \geq n))$ 收敛, 但 $f$ 在 $E$ 上不可积	(143)
13. $n \cdot m(E( f  \geq n)) \rightarrow 0$ , 但 $f$ 在 $E$ 上不可积	(144)
14. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f dx$ 绝对收敛, 但 $f$ 在 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 上不可积	(144)
15. 积分具有绝对连续性的不可积函数	(145)
16. 积分中值定理中绝对值符号不可少	(146)