

振动理论

高等学校试用教材

吴福光 蔡承武 徐兆

高等教育出版社

高等学校试用教材

振 动 理 论

吴福光 蔡承武 徐 兆

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是根据理科数学、力学教材编审委员会力学编审组扩大会议讨论通过的教学大纲编写,并经过教学实践后修改而成。

全书共有七章,内容包括:单自由度线性系统的振动,二自由度线性系统的振动,多自由度线性系统的振动,连续系统的振动(分析方法),连续系统的振动(近似方法),非线性系统的振动和随机振动。

本书可作为高等院校有关专业“振动理论”课程的试用教材,也可供广大工程技术人员参考。

高等学校试用教材

振 动 理 论

吴福光 蔡承武 徐 兆

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

祝桥新华印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 15.625 字数 373,000

1987年5月第1版 1987年5月第1次印刷

印数 0,001—3,250

书号 13010·01381 定价 2.80 元

序 言

本书是在作者多年来为力学专业学生讲授振动理论的讲义的基础上,按照理科数学、力学教材编审委员会力学编审组扩大会议讨论通过的综合大学力学专业教学计划和教学大纲编写的,它既可作为高等院校有关专业开设振动理论课的教材,同时,它也是一本振动力学方面的基础读物,供广大工程技术人员参考。

书中第一章至第五章,讲述离散系统和连续系统的线性振动,包含了传统的振动理论的基本内容,其主要部分对于大学本科生学习该课程来说,在份量上是合适的。在这几章里我们还补充了一些近代的材料,这些内容对于从事结构动力分析的工程技术人员来说是很有参考价值的。但是在教学安排上,考虑到初学者的困难和学时的限制,教师也可视具体情况进行删减。书中第六章讲述非线性系统的振动,它概括地介绍了非线性振动理论中的两类基本方法——几何方法和解析方法,其中有一些是最近发展起来的新方法,并讨论了非线性系统的一些特殊物理现象。这些材料可以作为大学高年级选修课或研究生课的内容。书中第七章讲述随机振动,分别对前面讲过的单自由度系统、多自由度系统、连续系统、非线性系统在随机力作用下的响应进行了讨论。本章要求读者具有概率论方面的基础知识。为了突出主要内容,我们把有关的数学预备知识作为附录编在书后。第六章和第七章牵涉到一些比较专门的内容,已有一些专门的著作加以论述,本书力求对这些专门的领域用较少的篇幅作扼要的介绍。

本书在内容编排上着力做到精练更新、逻辑严谨。除对振动理论的经典内容阐述透彻外,尽可能反映振动力学领域中近二十

多年发展起来的一些方法，并在内容上注意反映国内力学家的一些最新研究成果，希望在内容选材方面具有自己的特色。在写作风格上，则力求简明扼要，叙述清晰，同时尽可能自成体系，便于读者自学。

本书第一章至第三章由吴福光撰写，第四章和第五章由蔡承武撰写，第六章和第七章由徐兆撰写，此外，谭忠棠生前曾参加过本书最初阶段的部分撰写工作。本书在出版前，一直以讲义形式在本校力学专业学生中使用，内容不断充实更新，近年来又作了若干修改和补充，它汇集了作者多年来教学和科研工作的成果。

在撰写本书过程中，承蒙中国科学院学部委员胡海昌教授在百忙中阅读了全稿，提出了一些指导性的意见，我们在此谨致谢意。我们向王大钧教授和王文亮副教授表示衷心的感谢，他们曾对书稿提出了许多宝贵的修改意见，为本书的出版付出了辛勤的劳动。我们还向王大钧、王文亮、孙铮、梁思正等表示谢意，他们在审订本书大纲时，提出了许多建设性的意见。最后，我们还要感谢陈树坚副教授，他应聘为本书做了许多细致的编辑加工工作。

恳切希望得到读者的批评指正。

作 者

一九八五年八月于

广州 中山大学

目 录

第一章 单自由度线性系统的振动	1
§ 1.1 单自由度系统振动的运动微分方程	1
§ 1.2 无阻尼的自由振动	4
§ 1.3 能量法	10
§ 1.4 等效质量	13
§ 1.5 粘滞阻尼系统的自由振动	16
§ 1.6 正弦型干扰力作用下的受迫振动·频率响应	21
§ 1.7 等效粘滞阻尼	30
§ 1.8 周期干扰力作用下的受迫振动(富里哀级数方法)	33
§ 1.9 任意干扰力作用下的受迫振动(卷积分方法)·脉冲响应	37
§ 1.10 富里哀变换方法·频率响应和脉冲响应的关系	48
§ 1.11 逐步积分法	52
习题	57
第二章 二自由度线性系统的振动	66
§ 2.1 二自由度系统振动的例子·运动微分方程	66
§ 2.2 无阻尼自由振动	69
§ 2.3 影响系数	75
§ 2.4 坐标的耦合·主坐标	83
§ 2.5 谐干扰力作用下的阻尼受迫振动	92
§ 2.6 无阻尼动力吸振器	97
习题	100
第三章 多自由度线性系统的振动	104
§ 3.1 保守系统微振动的微分方程·质量矩阵和刚度矩阵.....	104
§ 3.2 固有频率和固有振型.....	110
§ 3.3 运动微分方程的位移形式·动力矩阵.....	119
§ 3.4 广义特征值问题的讨论.....	124
§ 3.5 固有振型的正交性·展开定理.....	127

§3.6	坐标的线性变换·系统对初始激励的主坐标响应·····	131
§3.7	无阻尼受迫振动·振型迭加法·····	136
§3.8	谐干扰力作用下的受迫振动·谐影响系数·····	140
§3.9	阻尼受迫振动·坐标解耦·····	146
§3.10	阻尼受迫振动问题的统一解法·····	149
§3.11	瑞利商·固有频率的极值性质·····	155
§3.12	瑞利(Rayleigh)法·····	162
§3.13	李兹(Ritz)法·····	165
§3.14	子空间迭代法·····	171
§3.15	牛顿迭代法·····	175
	习题·····	179
第四章	连续系统的振动(分析方法)·····	184
§4.1	连续系统与离散系统的关系·····	184
§4.2	杆的纵向振动·····	189
§4.3	圆轴的扭转振动·····	197
§4.4	梁的弯曲振动·····	199
§4.5	固有振型的正交性·展开定理·····	208
§4.6	振型迭加法·····	215
§4.7	瑞利商·关于固有频率的变分原理·····	225
§4.8	系统参数的变化与增加约束对固有频率的影响·····	231
§4.9	薄膜的振动·····	233
	习题·····	241
第五章	连续系统的振动(近似方法)·····	244
§5.1	瑞利(Rayleigh)法·····	244
§5.2	李兹(Ritz)法·····	248
§5.3	子空间迭代法·····	256
§5.4	迁移矩阵法·····	261
§5.5	假定振型法·····	270
§5.6	有限单元法·····	275
	习题·····	295
第六章	非线性系统的振动·····	299

§ 6.1	非线性振动的例子	299
§ 6.2	相平面·平衡点	302
§ 6.3	保守系统	308
§ 6.4	非保守系统	322
§ 6.5	摄动法和多重尺度法	341
§ 6.6	平均法和 KBM 法	359
§ 6.7	新的渐近方法	374
§ 6.8	拟谐和系统的受迫振动	391
§ 6.9	参变振动	407
	习题	414
第七章	随机振动	419
§ 7.1	单自由度线性系统的随机振动	419
§ 7.2	多自由度线性系统的随机振动	431
§ 7.3	连续系统的随机振动	443
§ 7.4	非线性系统的随机振动	447
	习题	456
附录		460
§ A.1	随机变量	460
§ A.2	随机过程	467
§ A.3	相关函数和谱密度	474
§ A.4	积分 J_n	486
参考书目		487

第一章 单自由度线性系统的振动

在日常生活和工程实践中,普遍存在着振动现象.各种机器和仪表的振动,水工建筑物,楼房或桥梁的振动,车辆在不平路面上行驶时的颠簸,海轮在海浪冲击下的左右摇摆和前后纵摇等等,都是振动的实例.我们把物体或质点系统按一定规律在其平衡位置附近所作的周期性往复运动,称为振动.

现代工程设计中的一个重要部份是分析和预估结构物的动力特性.系统的振动特性(振动系统的固有参数)是动力特性的一个普遍存在形式.研究工程结构物振动特性的目的,就是要为工程设计提供理论依据.

本章从研究最简单的振动问题——单自由度线性系统的振动开始.一方面,许多实际系统可以足够准确地简化为这样的系统,另一方面,单自由度系统的一些重要概念、特性和研究方法,同时又是研究更复杂系统振动问题的基础.

§1.1 单自由度系统振动的运动微分方程

让我们首先举出具有一个自由度系统振动的若干例子.

悬挂在弹簧上的重物的直线振动(它又是许多实际振动问题的简化模型)(如图 1.1),可借选取重物偏离其平衡位置的位移 x 为广义坐标来描述它的运动.在弹性范围内,弹簧作用在重物上的弹性恢复力为 $-kx$,忽略弹簧的质量,重物的运动微分方程可写为

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (1.1)$$

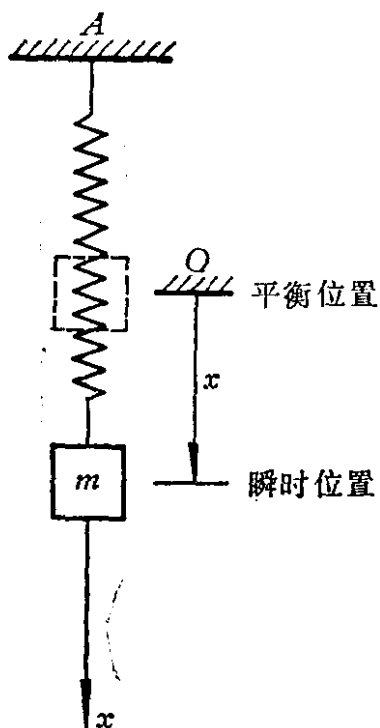


图 1.1

其中 m 为重物的质量, k 为弹簧刚度, 它的物理意义是使弹簧伸长单位长度所需施加的力.

单摆和复摆在其平衡位置附近的摆动(如图 1.2 和 1.3)都是具有一个自由度系统振动的例子. 在理论力学教科书中, 已经得到过它们的微振动方程, 即

$$I_0 \ddot{\varphi} + Pa\varphi = 0, \quad (1.2)$$

其中 I_0 为物体对悬挂点的转动惯量, 对于单摆 $I_0 = ma^2$, 式(1.2)中的 φ 和 a 如图所示.

在分析力学中我们研究过如下的例

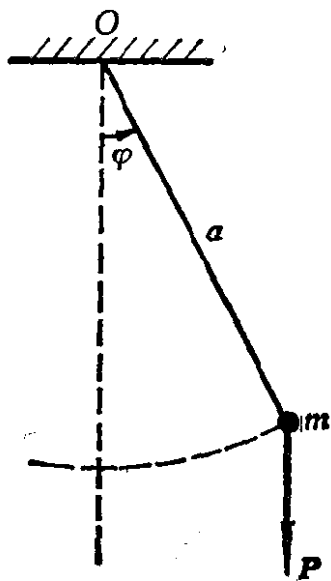


图 1.2

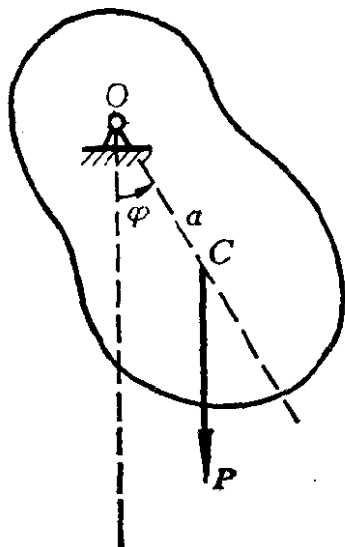


图 1.3

子: 一个重为 P 、半径为 r 的均质圆盘沿着半径为 R 的圆柱表面作无滑动的滚动(如图 1.4). 利用拉格朗日方程, 我们可以求得圆盘在其最低点的平衡位置附近作微振动的方程为

$$\frac{3P}{2g}(R-r)^2 \ddot{\varphi} + P(R-r)\varphi = 0. \quad (1.3)$$

由材料力学知,轴受扭转后,圆盘在弹性恢复力矩的作用下产生扭转振动(如图 1.5),当忽略轴的质量时,系统仅有一个自由度,在弹性范围内,系统的运动微分方程为

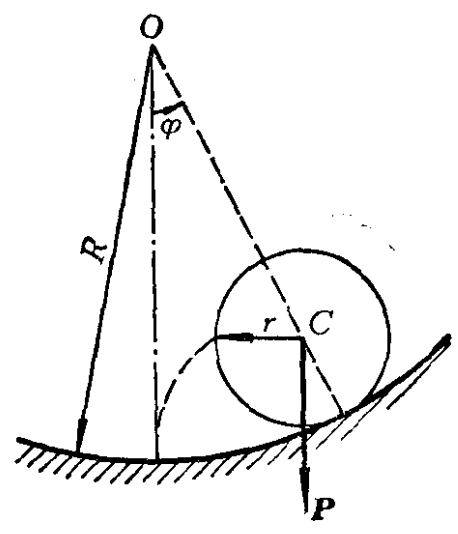


图 1.4

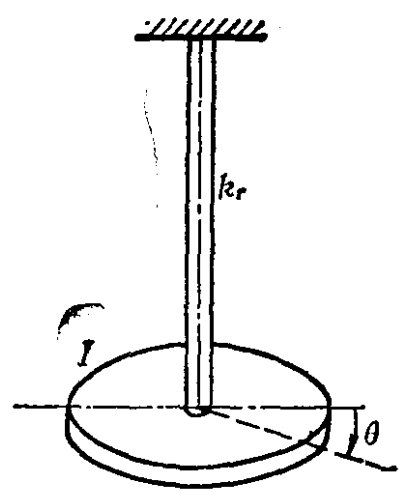


图 1.5

$$I\ddot{\theta} + k_r\theta = 0, \quad (1.4)$$

其中 θ 表示圆盘转过的角度, k_r 为使轴产生单位转角所需施加的扭矩(即轴的扭转刚度).

质量为 m 的重物安放在简支梁的中点处, 设梁中点的静挠度为 λ_0 (如图 1.6). 由于梁中点的挠度 λ 与作用力成正比, 令其比例系数为 k (k 为简支梁以中点挠度为广义位移的刚度), 当不计梁

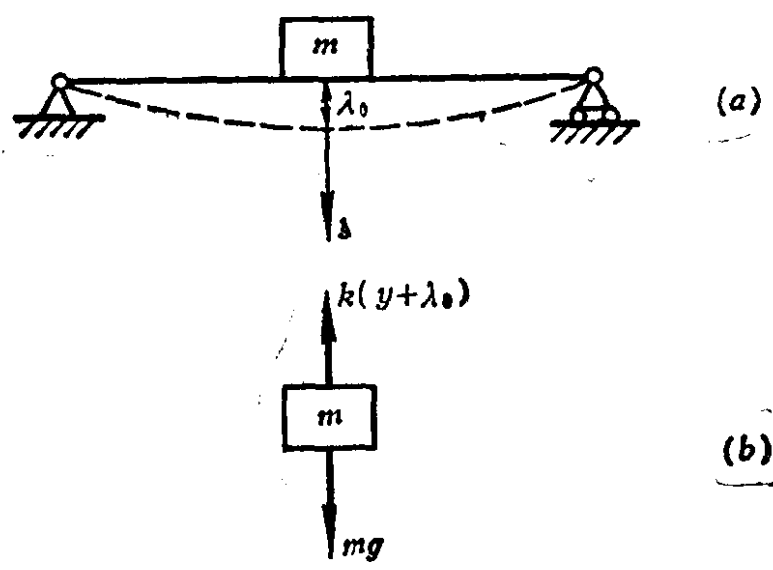


图 1.6

的质量时,梁对重物的反力为 $k(y + \lambda_0)$, 故重物的运动微分方程为

$$m\ddot{y} = -k(y + \lambda_0) + mg,$$

其中 y 为重物偏离其平衡位置的位移. 由于平衡时有 $mg - k\lambda_0 = 0$, 因此上式可写为

$$m\ddot{y} + ky = 0. \quad (1.5)$$

这就是跨中具有一个集中质量的梁的横向振动微分方程, 它与重物悬挂在刚度为 k 的弹簧上的运动微分方程(1.1)相同.

从上述例子中可以看到, 尽管它们的振动方式互不相同, 但从它们的运动微分方程来看, 都具有相同的数学形式. 一般地, 在任一瞬时, 系统的位形可以用一个坐标来确定时, 就称为是单自由度系统, 它在其平衡位置附近作微振动时, 其运动微分方程均可用广义坐标写出为:

$$m\ddot{q} + kq = 0, \quad (1.6)$$

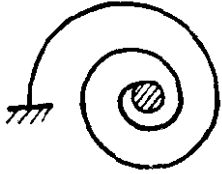
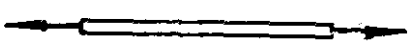
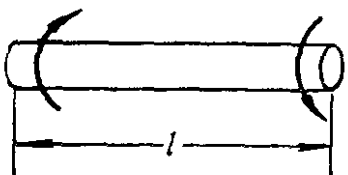
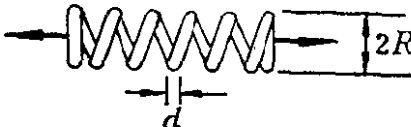
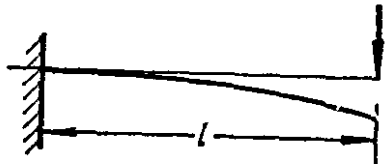
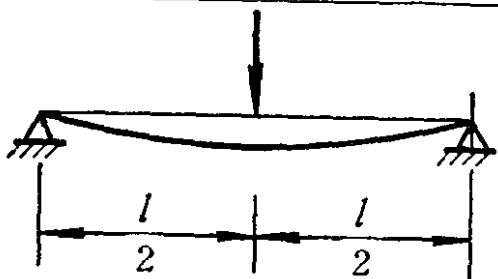
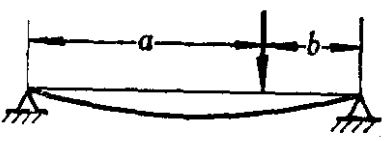
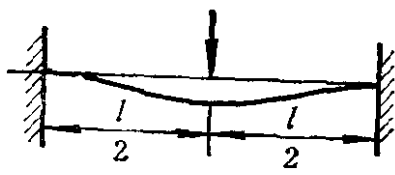
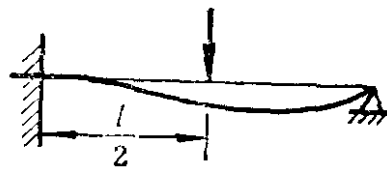
其中 q 为广义坐标, m 和 k 为常数, 分别表示系统的惯性和刚度 (k 亦称为弹簧常数或弹簧刚度). 对于不同的振动形式, 式中的 q 、 m 、 k 各量可根据广义坐标的不同含义作相应的解释. 由于方程(1.1)所描述的质量—弹簧系统的振动最为简单, 因此, 如果从运动微分方程看, 我们可以把图 1.1 所示的一个集中质量和一个无质量的弹簧构成的系统作为单自由度系统振动问题的简化模型.

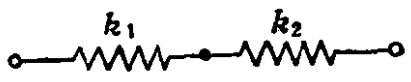
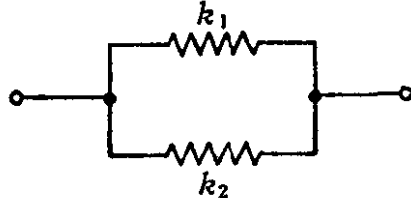
为了应用上的方便, 我们对不同弹性构件的弹簧刚度列表如下, 供读者查阅(见下页表 1.1).

§1.2 无阻尼的自由振动

考察具有一个自由度系统无阻尼自由振动的简化模型 (图 1.1), 它的运动微分方程为

表 1.1

卷 簧		$k = \frac{EJ}{l}$	E : 弹性模量, J : 横截面的惯性矩, l : 卷簧总长
杆的拉伸和压缩		$k = \frac{EF}{l}$	F : 横截面面积
轴的扭转		$k = \frac{GJ_P}{l}$	G : 剪切模量, J_P : 截面极惯性矩
螺旋弹簧		$k = \frac{Gd^4}{64nR^3}$	n : 圈数
悬臂梁弯曲		$k = \frac{3EJ}{l^3}$	J : 截面惯性矩 (下同)
简支梁弯曲		$k = \frac{48EJ}{l^3}$	
		$k = \frac{3EJl}{a^2b^2}$	
超静定梁弯曲		$k = \frac{192EJ}{l^3}$	
		$k = \frac{768EJ}{7l^3}$	

串联弹簧		$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$
并联弹簧		$k = k_1 + k_2$

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

令

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (1.7)$$

可将方程写为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.8)$$

方程(1.8)的通解为

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \quad (1.9)$$

其中积分常数 C_1 和 C_2 由初始条件确定. 设初始条件为

$$t = 0 \text{ 时, } x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0,$$

则

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (1.10)$$

在研究振动问题时,我们常常把方程(1.8)的解写成如下的相角形式

$$x = X \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (1.11)$$

其中 X, α 为任意常数,分别称为振幅和初位相. 我们把式(1.11)所表示的运动称为简谐振动. 对于上述的初始条件,不难确定出

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2}, \quad (1.12)$$

$$\alpha = \arctg \frac{\omega_0 x_0}{\dot{x}_0}. \quad (1.13)$$

从式(1.9)或(1.11)可以看到,重物 m 的运动具有周期性质,振动的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (1.14)$$

设重物在平衡位置时弹簧的静伸长为 λ_0 ,则有

$$mg = k\lambda_0,$$

或

$$k = \frac{mg}{\lambda_0}.$$

代入式(1.14)得

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda_0}{g}}. \quad (1.15)$$

这就是由静伸长求运动周期的关系式.

周期的倒数

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\lambda_0}} \quad (1.16)$$

称为振动的频率,它表示单位时间内往复振动的次数,单位是次/秒(即赫兹),而 T 表示往复振动一次所需的时间,单位是秒.

简谐振动(1.11)可用一个作等速圆周运动的点在直线上的投影来表示,如图1.7所示.设有一质点 M 被限制在半径 $AM = X$ 的圆周上运动, AM 以等角速度 ω_0 绕固定点 A 转动,如果 AM 的初始位置与水平的夹角为 α ,则点 M 在 x 轴上的投影点的运动规律恰好由式(1.11)给出.这里,我们把 ω_0 称为圆频率(或角频率).

从式(1.12)和(1.13)可知,初始条件只用来确定振动的振幅和初位相,系统的圆频率和周期并不受初始条件的影响.从式(1.7)知,圆频率只决定于系统的质量和弹簧刚度,因此常常又把它称为固有频率,它反映了一个振动系统的内在特性.固有频率

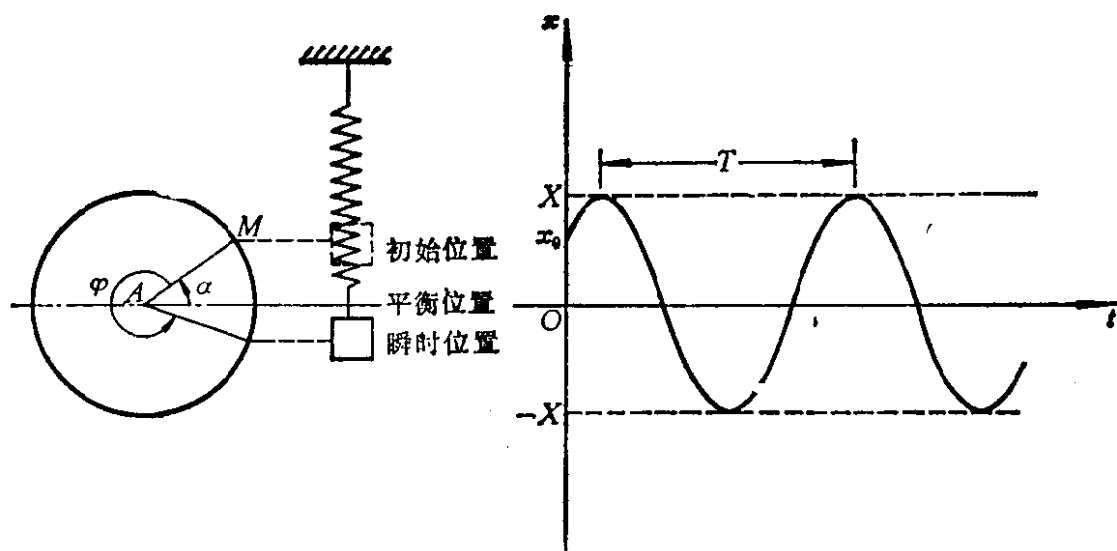


图 1.7

是振动系统的一个重要参数,它也可以用弹簧的静伸长表示如下:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\lambda_0}}. \quad (1.17)$$

例 1.1 柴油机连杆的质量 $m = 3.1$ 千克,用刀刃置于它的曲柄销的内表面上悬挂成一摆,(如图 1.8 所示),测出它作小摆动时的规律为每分钟 59 次,求连杆对于其质心的转动惯量(设质心到悬挂点的距离 $a = 185$ 毫米).

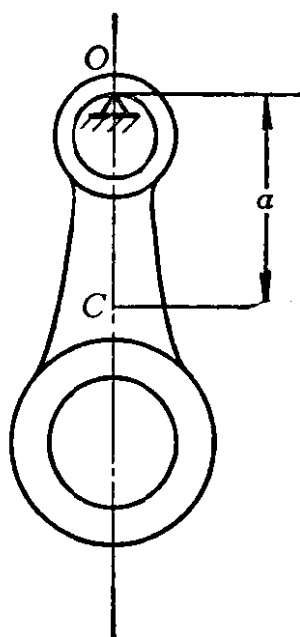


图 1.8

解 连杆作小摆动的运动微分方程为:

$$I_0 \ddot{\varphi} + mga\varphi = 0,$$

其中 I_0 为连杆对悬挂轴的转动惯量. 由此

$$\omega_0^2 = \frac{mga}{I_0}.$$

今已知摆动频率 $f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{59}{60}$ (赫兹),代入上式可求得

$$I_0 = \frac{mga}{\omega_0^2} \approx 0.147 \text{ (千克} \cdot \text{米}^2\text{)}.$$

由于 $I_0 = I_c + ma^2$, 所以连杆对于其质心的转动惯量为

$$I_c = I_0 - m\alpha^2 \approx 0.041 (\text{千克} \cdot \text{米}^2).$$

例 1.2 升降机的厢笼重 P ，以等速 v_0 向下运动(图1.9)。突然，由于吊索上端被嵌住，使厢笼终止了下降，求钢索中的最大应力。设此时钢索长为 l ，又知钢索的弹性模量为 E ，横截面积为 F ，钢索质量略去不计。

解 当升降机等速运动时，钢索中的拉力为 P ，因此，事故发生时钢索的伸长量为

$$\lambda_0 = \frac{Pl}{EF}. \quad (1)$$

由于升降机具有速度 v_0 ，因此厢笼并不立即停止，而是在平衡位置附近振动，初始条件为

$$t = 0 \text{ 时}, x = 0, \dot{x} = v_0. \quad (2)$$

由式(1.12)可求得振动的振幅为

$$X = \frac{v_0}{\omega_0}, \quad (3)$$

其中 ω_0 可由静伸长求出：

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\lambda_0}}. \quad (4)$$

钢索的最大伸长量为

$$\lambda_{\max} = \lambda_0 + X = \lambda_0 + v_0 \sqrt{\frac{\lambda_0}{g}}, \quad (5)$$

式中 λ_0 可由式(1)求得。

钢索的最大应力为

$$\sigma_{\max} = E\varepsilon_{\max} = E \frac{\lambda_{\max}}{l} = \frac{E}{l} \left(\lambda_0 + v_0 \sqrt{\frac{\lambda_0}{g}} \right). \quad (6)$$

上式中 $E \frac{\lambda_0}{l}$ 表示未发生事故时钢索的应力，而 $\frac{Ev_0}{l} \sqrt{\frac{\lambda_0}{g}}$ 则表示

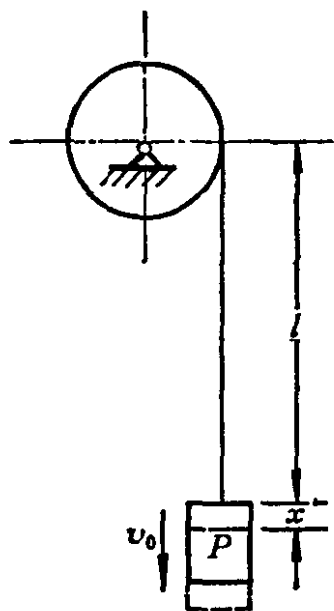


图 1.9