FUBIAN HANSHU

复变函数

上海交通大学应用数学系编

工程数学丛书

上海交通大学出版社

·工程数学丛书·

复变函数

上海交通大学应用数学系编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书是工程数学丛书之一，介绍复变函数的基本理论和在工程技术中常用的复变函数理论工具。内容主要有：复数的概念及运算性质、平面点集和区域、解析函数的概念及柯西-黎曼条件、解析函数与调和函数的关系、复变函数积分的柯西定理、柯西积分公式、高阶导数公式、泰勒级数和罗朗级数、孤立奇点、留数的概念及用留数计算定积分的具体方法、保角映射等。每章配有经精选的习题，书末附有习题答案。可供高等院校有关专业用作教材，也可供自学者选用，供工程技术人员参考。

复 变 函 数

上海交通大学出版社出版

淮海中路1984弄19号

新华书店上海发行所发行

上海交通大学印刷厂印装

开本787×1092毫米 1/32 印张8.125 字数180000

1988年7月第1版 1988年7月第1次印刷

印数：1—8200

ISBN7-313-00237-8/O174 科技书目：177-280

定价：1.35元

序　言

目前，高等院校的工程数学课程，由于内容多、进度快，因此有些重要的内容不得不一带而过，或者删掉，尤其没有足够多的演题时间，从而使学生对课程内容的理解往往只浮于表面。为了弥补这些不足，编者吸取我校在工程数学教学中积累的有益经验，根据高等学校工科数学课程教学指导委员会（原工科数学教材编委会）的编写要求，针对工科院校的具体特点，编写了一套工程数学教材，并拟配以一册这套教材的习题解答，合称《工程数学丛书》。

丛书中的教材共有5册：《线性代数》、《复变函数》、《积分变换》、《概率论与数理统计初步》和《特殊函数与数学物理方程》。这套教材的特点是：内容丰富，说理清楚，重点突出，深浅得当，通俗易懂；对工程数学中的基本概念、基本理论和基本方法的叙述，力求深入浅出、清晰、准确；并配有大量典型例题和类型齐全的习题。本着循序渐进的原则，对全部内容由易到难，由浅入深地作了统筹安排，书中加有“*”号的内容可根据不同情况予以取舍。这对读者逐步地系统掌握工程数学的基本内容，进一步提高分析问题和解决问题的能力均有裨益。

由于上述特点，这套教材具有比较广泛的适用性。除了全日制高等院校以外，函授大学、电视大学、职工业余大学等都可用来作为教材，自学工程数学的广大读者也可选用，从事科研生产的工程师也可参考。

本套丛书主编袁公英，编委有张建元、贺才兴、武霞敏、吴登益、童品苗、陈茵、唐济楫等同志。《复变函数》由贺才兴同志执笔编写。在全套教材编写过程中得到校、系领导的关心、帮助和我系广大教师的大力支持，编者在此一并致以衷心的感谢。

由于编者水平有限，加之时间仓促，疏漏与不当之处在所难免，恳请读者和使用本套教材的教师批评指正。

编　者

于上海交通大学

1987年10月25日

目　录

第一章 复　　数

复数是复变函数的基础。在这一章中，我们首先叙述复数的概念、性质及运算，然后引入复球面与平面点集的概念。关于复数，在初等代数中已有论述，但为了今后的学习，这里须作进一步的叙述和补充。

§1　复数及其表示法

一、复数的概念

形如 $x+iy$ 的数，称为**复数**，其中 x 和 y 是任意实数，$i=\sqrt{-1}$，称为虚数单位。

通常记复数为 $z=x+iy$，实数 x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，记作

$$x=\mathrm{Re}z,\quad y=\mathrm{Im}z。$$

当实部 $x=0$ 时，$z=0+iy=iy$，称为**纯虚数**；当虚部 $y=0$ 时，$z=x+i0=x$，这时 z 就是一个实数。因此，全体实数是复数的一部分，复数是实数的推广。特别，$0+i0=0$。

两个复数之间不能比较大小，但可以定义它们的相等。

设有两个复数，$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，当且仅当

$$x_1=x_2,\quad y_1=y_2$$

时，才有　　$z_1=z_2$。

二、复数的表示法

1. 复平面

因为一个复数 $z=x+iy$ 由一对有序实数 (x,y) 唯一确定，所以在平面上取直角坐标系 xoy，就可以用坐标为 (x,y) 的点 P 表示复数 $z=x+iy$（图1-1），于是复数就与平面上的点一一对应。实数与 x 轴上的点一一对应，x 轴称为**实轴**；纯虚数 iy 与 y 轴上的点一一对应，y 轴称为**虚轴**。这样表示复数的平面称为**复平面**或 **Z 平面**。由于这种对应关系，为方便起见，今后不再区分"数 z"与"点 z"。

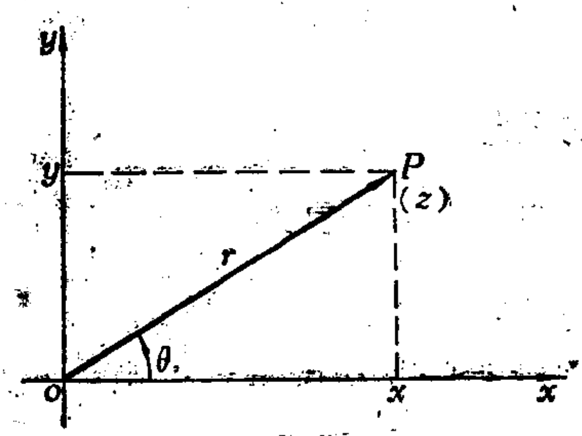

图 1-1

2. 复数的向量表示

如图 1-1 所示，复数 $z=x+iy$ 可以用向量 $\overrightarrow{oP}$ 来表示，x 与 y 分别是向量 $\overrightarrow{oP}$ 在 x 轴与 y 轴上的投影。这样，复数与平面上的向量建立了一一对应关系。

向量 $\overrightarrow{oP}$ 的长度称为复数 $z=x+iy$ 的**模**或**绝对值**，记作

$|z|$或 r，于是

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}。$$

显然有

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|,\quad |z|\leqslant|x|+|y|。$$

当点P不是原点，即$z\neq0$时，向量$\overrightarrow{oP}$与x轴正向的夹角θ称为复数z的**辐角**，记作

$$\theta=\mathrm{Arg}z。$$

这时，有

$$\mathrm{tg}(\mathrm{Arg}z)=\frac{y}{x}。$$

若θ_1为复数z的一个辐角，则$\theta_1+2n\pi$（n为整数）也是复数z的辐角，因此，任何一个复数z都有无穷多个辐角，记作

$$\mathrm{Arg}z=\theta_1+2n\pi\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)。$$

满足$-\pi<\theta_0\leqslant\pi$的辐角$\theta_0$称为$\mathrm{Arg}z$的**主值**，记作

$$\theta_0=\arg z。$$

于是

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2n\pi\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)。$$

数0是唯一的模为零而辐角没有定义的复数。

$\arg z$可以用主值规定在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的反正切函数$\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x}$来确定，其关系如下：

$$\arg z=\begin{cases}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}, & z\text{在第 I 、IV 象限,}\\ \pi+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}, & z\text{在第 II 象限,}\\ -\pi+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}, & z\text{在第 III 象限。}\end{cases}$$

3． 复数的三角表示与指数表示

利用直角坐标与极坐标之间的变换关系

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$$

还可以用模 $r=|z|$ 和辐角 $\theta=\operatorname{Arg}z$ 来表示复数 z，即

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

上式称为复数 z 的**三角表示式**。

利用欧拉公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,$$

由三角表示式可以得到

$$z=re^{i\theta},$$

上式称为复数 z 的**指数表示式**。

在理论研究与应用中，可根据不同的需要采用不同的复数表示式，这会带来极大的方便。

三、共轭复数

复数 $x-iy$ 称为复数 $z=x+iy$ 的**共轭复数**，记作 $\overline{z}$，即

$$\overline{z}=x-iy。$$

z 和 $\overline{z}$ 是关于实轴对称的（图 1-2）。

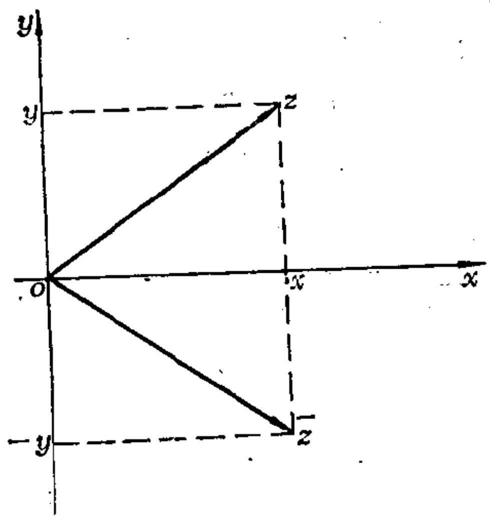

图 1-2

由定义，显然有

(1) $|\bar{z}|=|z|$，

(2) $\mathrm{Arg}\,\bar{z}=-\mathrm{Arg}\,z$，

(3) $\bar{\bar{z}}=z$，

注意，(2)式的意义是：对于 $\mathrm{Arg}\,\bar{z}$ 中的任意一个值，必有 $\mathrm{Arg}z$ 中的一个值，使它们仅相差一个符号；反之亦然。

例 1 试求复数 $2-2i$ 与 $-3+4i$ 的模和辐角。

解 $|2-2i|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$，

$$\mathrm{Arg}(2-2i)=\arg(2-2i)+2n\pi$$

$$=\mathrm{arc\,tg}\frac{-2}{2}+2n\pi$$

$$=-\frac{\pi}{4}+2n\pi \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)。$$

$$|-3+4i|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5,$$

$$\mathrm{Arg}(-3+4i)=\arg(-3+4i)+2n\pi$$

$$=\mathrm{arc\,tg}\frac{4}{-3}+\pi+2n\pi$$

$$=(2n+1)\pi-\mathrm{arctg}\frac{4}{3} \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)。$$

例 2 试将 $z=-1+\sqrt{3}\,i$ 化为三角表示式和指数表示式。

解 因为 z 在第Ⅱ象限，$\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}=-\sqrt{3}$，

所以 $$\theta=\frac{2}{3}\pi,$$

且 $r=|z|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$，

从而 z 的三角表示式为

$$z=2(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi);$$

z 的指数表示式为

$$z=2e^{\frac{2}{3}\pi i}。$$

例 3 试将 $z=1+\cos\theta+i\sin\theta(-\pi<\theta\leqslant\pi)$ 化为三角表示式。

解法一 因为

$$r=|z|=\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}$$
$$=\sqrt{2(1+\cos\theta)}=2\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}}$$
$$=2\cos\frac{\theta}{2},$$

$$\arg z=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\theta}{2},$$

所以 z 的三角表示式为

$$z=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)。$$

解法二 $z=1+\cos\theta+i\sin\theta$

$$=2\cos^2\frac{\theta}{2}+i\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)。$$

§ 2 复数的运算及几何意义

一、复数的加法和减法

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的加法和减法定义如下：

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)。$$

若复数 z_1、z_2 分别用对应的向量 $\overrightarrow{oP_1}$、$\overrightarrow{oP_2}$ 表示，则复数的加减法与向量的加减法一致，于是在平面上以 $\overrightarrow{oP_1}$、$\overrightarrow{oP_2}$ 为边的平行四边形的对角线 $\overrightarrow{oP}$ 就表示了复数 z_1+z_2（图1-3），对角线 $\overrightarrow{P_2P_1}$ 就表示了复数 z_1-z_2。若将向量 $\overrightarrow{P_2P_1}$ 平移至向量 $\overrightarrow{oP_3}$，则向量 $\overrightarrow{oP_3}$ 就表示了复数 z_1-z_2（图 1-4）。

由上述几何解释，显然有下列两个不等式：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,$$

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|,$$

其中 $|z_1-z_2|$ 表示向量 $\overrightarrow{P_2P_1}$ 的长，也就是复平面上点 z_1、z_2 之间的距离。

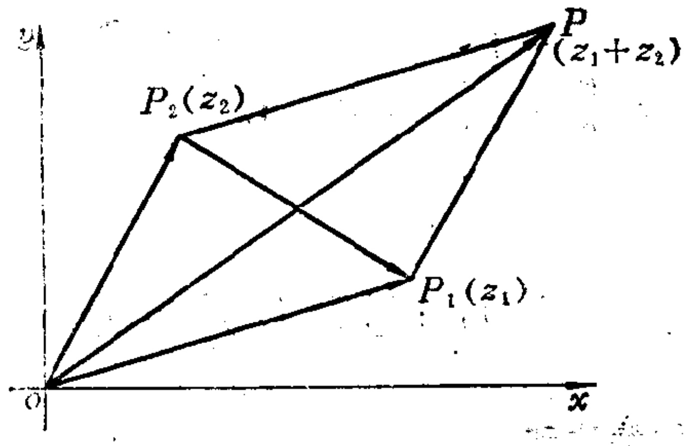

图 1-3

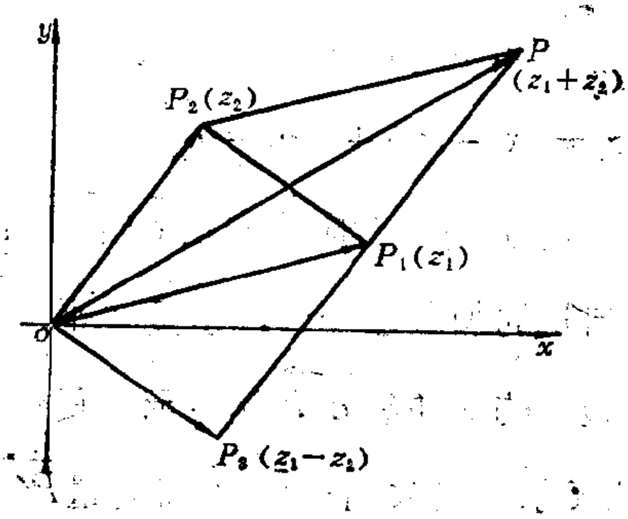

图 1-4

二、复数的乘法和除法

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的乘法和除法定义如下：

$$
\begin{aligned}
z_1z_2&=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)\\
&=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1),
\end{aligned}
$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad(z_2\neq 0)。$$

现在我们利用复数的三角表示式来讨论复数的乘法与除法，并导出复数的积与商的模和辐角公式。

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，则由复数乘法，得

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)\\&\quad+i(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]。\end{aligned}$$

于是得

$$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|,$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2,\qquad (*)$$

即**两个复数乘积的模等于它们模的乘积，两个复数乘积的辐角等于它们辐角的和。**

注意，由于辐角的多值性，等式 (*) 应理解为对于左端 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$的任一值，必有由右端 $\mathrm{Arg}z_1$ 与 $\mathrm{Arg}z_2$ 的各一值相加得出的和与之对应；反之亦然。

上述结论可以有明确的几何解释。利用复数与向量的对应关系，设向量$\overrightarrow{oP_1}$、$\overrightarrow{oP_2}$分别表示复数 z_1、z_2，则将$\overrightarrow{oP_1}$绕 o 点按逆时针方向旋转一个角度 $\mathrm{Arg}z_2$，并伸长(缩短)$|z_2|$ 倍，便得向量$\overrightarrow{oP}$。向量$\overrightarrow{oP}$即表示乘积 z_1z_2（图1-5）。

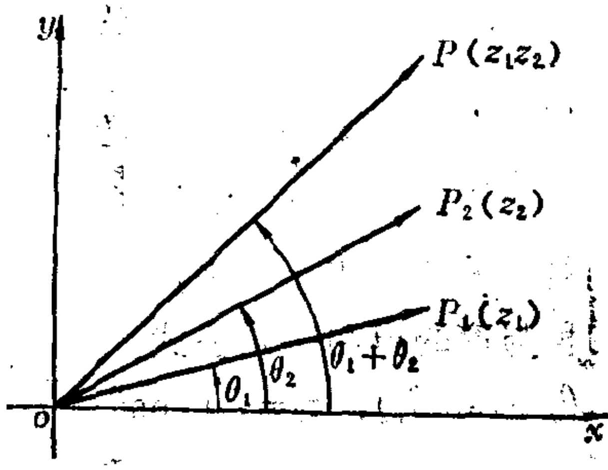

图 1-5

若利用复数的指数表示式

$$z_1=r_1e^{i\theta_1},\quad z_2=r_2e^{i\theta_2},$$

则上述结论可表示为

$$z_1z_2=r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}。$$

运用数学归纳法，可得到 n 个复数 z_1，z_2，$\cdots$，z_n 相乘的公式：

$$\begin{aligned}z_1z_2\cdots z_n&=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\\&\quad+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]\\&=r_1r_2\cdots r_ne^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)},\end{aligned}$$

其中 $z_k=r_k(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)=r_ke^{i\theta_k}\quad(k=1,2,\cdots,n)$。

特别当 $z_1=z_2=\cdots=z_n=z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$时，就得到复数 z 的 n 次幂：

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\quad（n\text{ 为正整数}）。$$

若令$|z|=r=1$，即 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，则得著名的棣莫佛（De Moivre）公式：

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta。$$