流形的热核和热核形式

卢克平 著

河南大学出版社

LIUXINGDEREHE HEREHEXINGSHI

流形的热核和热核形式

卢克平　著

河南大学出版社

（豫）新登字第09号

流形的热核和热核形式
卢克平 著
责任编辑 程庆

河南大学出版社出版
（开封市明伦街85号）
河南省新华书店发行
中国科学院开封印刷厂印刷

开本：787×1092毫米 1/32 印张：7.625 字数：165千字
1993年6月第1版 1993年6月第1次印刷
印数：1—1000 定价：4.50元

ISBN 7-81018-866-6/O·54

内 容 提 要

本书显式构造出一些流形的热核和热核形式，并给出它们的某些初步应用。第一章及第二章简要介绍一些Riemann流形和Kähler流形的基本知识，第三章至第七章是对作者本人一些成果的总结。该书可供从事多复变和微分几何研究和教学的工作者参考。

前　言

1988年我考入中国科学院数学研究所，攻读博士学位，有幸从师于著名数学家陆启铿教授学习多复变与微分几何。先生的渊博学识和高尚品德深深影响了我，教育了我，所受教益终身难忘。本书是在我的博士论文基础上补充修改而成的。在本书出版之际，我谨向我的导师陆启铿教授表示崇高敬意和衷心感激，同时也向张木兰老师表示谢意。

1991年10月我到中国科学技术大学做博士后。本书修订期间，得到过中国科大许多师友的关心和帮助，得到了国家自然科学基金和河南省科委的部分资助；在出版过程中，得到了河南大学孙荣光教授和田继善教授的帮助；责任编辑程庆老师从内容到形式都提出了许多建设性的意见，付出了艰苦细致的劳动，在此一并表示衷心感谢。

限于水平，本书谬误之处在所难免，恳请专家学者批评指正。

卢克平

1992年12月9日

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

引　　言

研究流形的热核对于了解流形的几何与分析性质都十分有用. 众所周知,把热核关于时间变量t积分即可得到流形的Green函数,而Green函数又是在流形上做分析的重要工具. 对于乘积流形而言,其热核就等于各个因子流形热核的积,但对于Green函数来说,积流形的Green函数却没有如此简单明了的关系. 因此有时显式求出某些流形的Green函数就很困难. 但若能写出其热核,那么再求Green函数就是件极简单的事情了. 例如,直接要写出C^n中单位多圆盘的Green函数是比较困难的,若先求出C^1中单位圆盘的热核,再利用热核的积性质求出单位多圆盘的热核,然后对时间变量t积分即得到多圆盘的Green函数[6][7].

对于欧氏空间R^n中通常的Laplace算子Δ以及它的谱理论,已有大量丰富的结果,而且也比较完善. 究其原因,很大程度上在于R^n中许多公式有显式表达.

如,由$\Delta=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$生成的热扩散半群$\{e^{-t\Delta}\}_{t>0}$(即热方程$\dfrac{\partial u}{\partial t}=\Delta u$, $t>0$及初始值$u(x,0)$的解算子)就可以表示为与热核$(4\pi t)^{n/2}\exp\left(-\dfrac{|x|^2}{4t}\right)$的卷积算子. 从这个热核表达式出发,我们就可以很容易得出热半群的许多性质. 诸如$u(x,t)$

$= \ (e^{-t\Delta}f)(x)$关于$t\in R^+$是C^∞光滑的，以及下列估计式

$$\|e^{-t\Delta}f\|_\infty \leqslant (4\pi t)^{n/2}\|f\|_1$$

等等.

由此可见R^n的热核显式表达式对于研究R^n的谱性质和分析性质都是很重要的.

对于一般的Riemann流形M，其上的Laplace-Beltrami算子Δ为二阶椭圆的负定微分算子. 若流形为完备的Riemann流形，则Δ又是自伴的. 自然我们就可以讨论它相对应的热方程. 习知：Riemann流形上的热方程是微分几何中的重要课题之一，它与调和分析、特征值问题以及不变微分算子理论都有着十分密切的联系. 我们把Laplace-Beltrami算子Δ对应的热方程的基本解称为该流形的热核，记之为$H_M(x,y,t)$，x，$y\in M$，$t\in R^+$. 从流形的热核$H_M(x,y,t)$出发，我们可以定义流形M上许多分析对象，比如Poisson核

$$P(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-s}\, s^{-\frac{1}{2}} H_M\left(x,y,\frac{t^2}{4s}\right)ds$$

等，使得R^n上的调和分析的经典理论的许多结果均可搬到完备Riemann流形上去，这方面结果可参见〔31〕、〔57〕、〔59〕等.

流形的热核最重要的意义在于它把流形的谱与其微分几何及其拓扑性质联系起来. 从热核的表达式出发，人们力图得到当时间变量t趋于0时，算子Δ局部迹的渐近展开式。由于渐近展开式的系数具有明显的几何意义，所以通过热核自然地把Δ的谱与流形的几何性质联系起来.

设M为紧致的完备Riemann流形，Δ为作用在函数上的Laplace-Beltrami算子，则Δ具有离散谱

$$0 \leqslant \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots.$$

我们有
$$\operatorname{Trace} e^{t\Delta} = \sum e^{-\lambda_i t}$$
当$t>0$时收敛，并且
$$\operatorname{Trace}\ e^{t\Delta} = \int_M H(x,x,t)\,dv(x),$$

其中dv为M的体积元素.

Minashisundaran[53]证明了：$t\to 0+$时，$H(x,x,t)$的渐近展开式存在，

$$H(x,x,t) \underset{t\to 0+}{\sim} \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{n/2} \sum_{j\geqslant 0} a_j(x) t^j, \tag{1}$$

而且$a_0 \equiv 1$. 所以作用在函数上的热算子有渐近展开式

$$\operatorname{Trace} e^{t\Delta} = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j} = \int_M H(x,x,t)\,dv(x)$$

$$\underset{t\to 0+}{\sim} \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{n/2} \sum_{j\geqslant 0} c_j t^j, \tag{1$'$}$$

并且$c_0 = \mathrm{vol}(M)$为M的体积. 由此可见M的谱完全决定了M的维数与体积. 同样（1′）中其它各项系数c_j亦有其几何意义. 研究比较其它项系数对于更深入了解流形的几何性质是很有帮助的. 需要指出的是流形的谱并不能完全决定该流形的几何，请参见M. Kac[83].

Gaffney在文〔14〕中，把渐近展开式（1）推广到作用在微分形式上的Laplace算子上去. 稍后，Mckean和Singer[18]又把渐近展开式（1）推广到可定向紧带边Riemann流形上满足Dirichlet或者Neumann边值条件的微分形式上. Greiner和Seeley[19][20]又把它推广到一般的椭圆算子和椭圆边值问题上. 在这些推广后的渐近展开式中，其各项系数包

含了更加丰富的几何信息.

例如，Mckean和Singer证明了：在Gaffney关于p形式热核的展开式

$$H(x,x,t)\underset{t\to 0+}{\sim} t^{-n/2}\ \{a_0(p,x)+ta_1(p,x)+\cdots\} \qquad (2)$$

中，系数$a_j(p,x)$为曲率及曲率的协变导数的泛多项式（仅依赖于p，j及维数）. 同时他们还证明了：对于展式

$$\text{Trace } e^{t\Delta}=t^{-n/2}\{\tilde{a}_0(p)+t\tilde{a}_1(p)+t^2\tilde{a}_2(p)+\cdots\}, \qquad (3)$$

流形的Euler示性数等于各个展式中t^0系数$\tilde{a}_{n/2}(p)$的交替和，即

$$\chi(M)=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\tilde{a}_{n/2}(p).$$

另外，Gilkey和Patodi分别独立地利用计算$t^j(j\leqslant 0)$（对于$p=0$，1，…，n的渐近展开式中的t^j，$j\leqslant 0$）的系数的某种组合，证明了对应于（所有$0\leqslant p\leqslant n$）p-形式的谱决定了Chern-Gauss-Bonnet公式中的被积函数，[22][23]从而给出了Chern-Gauss-Bonnet公式的一个新证明.

Patodi[24]利用计算关于0-形式的、1-形式及2-形式的渐近展开式的前三项系数，证明了：对应的谱决定了流形是否为平坦的（有常纯量曲率，有常截曲率，或者是否为Einstein空间等）. 由此可以看出通过微分形式热核更密切地把流形的微分形式对应的谱与其几何拓扑性质联系起来. 因此研究流形的热核与微分形式热核，特别是显式表达出它们是很有意义的事情.

对于一般的完备Riemann流形M，加上某种限制曲率的

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

条件（比如$\mathrm{Ric}(M)\geqslant -k$，$k\geqslant 0$）．对$M$的热核函数，S-T. Yau教授等许多作者做了大量深入的研究，给出了热核的比较定理及热核的各种估计，利用这些估计给出了Green函数的上、下界估计和特征值的一些估计．这方面的工作可参见丘成桐和R. Schen的专著[25]．

对于某些流形显式写出其热核的工作始于陆启铿教授．他利用非常技巧性的方法先后显式给出了单位圆盘、C^n中多圆盘及超球的热核．随后陆启铿教授和洪毅教授合作显式构造出了第I类典型域$R_{\mathrm{I}}(m,n)$的热核．在陆启铿教授的指导和影响下，一些作者开始研究对称空间的热核，并且显式写出了一批对称空间的热核[9]．在本书的第四章，作者显式构造出了酉群及特殊酉群的热核．作为热核的应用，我们定出了酉群的谱．

对于复的范畴，人们有兴趣的是$\bar\partial$-Laplace算子$\square$（即Neumann算子）对应的热核形式，以及$\bar\partial_b$-Laplace算子$\square_b$对应的热核形式．设M为一n维紧Hermite流形，作用在(p,q)形式上的Neumann算子为

$$\square_{p,q}=\bar\partial\bar\partial^*+\bar\partial^*\bar\partial.$$

由于M紧致及$\square_{p,q}$为二阶椭圆微分算子，所以热方程

$$\square_{p,q}\omega=\frac{\partial\omega}{\partial t}$$

的基本解有光滑核$H_{p,q}(Z,W,t)$，其中H为M上的光滑地依赖于$t\in R^+$的两阶可微分的(p,q)形式．

而且$H_{p,q}(Z,W,t)$的局部迹有渐近展开式

$$H_{p,q}(Z,Z,t)\underset{t\to 0+}{\sim}\sum_{j\geqslant -n}C_j(z)t^j. \tag{4}$$

Patodi[27]通过计算渐近展式

$$H_{0,q}(Z,Z,t) \underset{t\to 0+}{\sim} \sum_{j\geqslant -n} C_j'(z)t^j$$

的系数 $C'_j(z)$ ($j\leqslant 0$)，从而证明了 Kähler 流形上的 Hirebruch-Riemann-Roch定理. Gilkey[28]通过计算关于热核的渐近展开式中的第二项系数以及关于$H_{0,1}(Z,Z,t)$和 $H_{1,0}(Z,Z,t)$ 的展式（4）中的第二项系数，证明了$\square_{1,0}$，$\square_{0,1}$及$\square_{0,0}$的谱决定了流形M是否为Kähler流形. Donnelly[29] 和 Gilkey[30]证明了：M的关于$\square_{p,q}$（$0\leqslant p+q\leqslant n$）的谱决定了 M 是否全纯同构于复投影空间 CP^n（带Fubini-Study 度量）. 由此可见，热核和(p,q)型热核形式把Neumann算子$\square_{p,q}$的谱与M的复几何联系起来. 研究复流形的热核和（p, q）形式热核对了解复流形的几何是有帮助的. 在本书的第五章，我们显式写出了C^n中复超球的（0,1）型热核形式，进而得到它的（0,1)-Green形式. 陆启铿教授通过复超球的（0,1)-Green形式，给出了复超球上$\bar\partial$方程解的（不变度量的）积分表示. 在第五章中，我们还显式写出了C^n中单位多圆盘的（0,1）形式热核，从而得到（0,1)-Green式. 作为应用，我们还给出了多圆盘上$\bar\partial$方程解的（不变度量的）积分表示. 需要指出的是，单位多圆盘不是强拟凸域，而是弱拟凸域. 因此我们所给的积分表示在多复变中是有意义的. 在本书的最后一章，我们显式写出了复投影空间CP^n的（0,1）形式热核及（0,1)-Green形式.

陆启铿教授曾证明了下述定理[4].

定理　设M为n维单连通完备的Kähler流形，且M具有常全纯截曲率，则M必双全纯同构于下列流形之一：

(1) 复n维欧氏空间C^n;

(2) n维复超球B^n;

(3) 复n维投影空间CP^n.

上述定理的确切表达见第二章.

由于C^n的热核及(0,1)形式热核的平凡性，因此在双全纯同构意义下，我们求出了n维单连通、常全纯截曲率的完备Kähler流形的(0,1)形式热核.

$\bar{\partial}_b$-Laplace算子$\Box_b$对应的热方程以及它的热核形式与C^n中的拟凸域的几何性质及C-R (Cauchy-Riemann) 流形有着十分密切的关系. 由于$\Box_b=\bar{\partial}_b^*\bar{\partial}_b+\bar{\partial}_b\bar{\partial}_b^*$在一般情况下甚至不是次椭圆 (subelliptic) 的，因此热方程

$$\Box_b\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

的研究自然会更困难. N. K. Stanton和D. S. Tartakoff在这个方向有许多研究，详细可参见他们的文章[61]、[62]、[63]等.

另外一个有意义的问题是向量丛上Laplace算子的热方程. 利用它可以证明指标定理.

对后两类热方程，本书不做介绍. 有兴趣者可参见有关文献.

本书分为两部分. 第一部分包括前两章，为预备知识部分. 第二部分包含后五章，是本书的主要部分，它主要取材于作者的博士论文.

第一章　Riemann 几何初步

我们假定读者已了解微分流形的基本概念，诸如切空间、向量场、外微分形式等．在本章中，我们简要介绍 Riemann 几何的基本常识，以便为后面讨论提供基础，并为复流形的几何研究提供一些背景知识．

本章及以后各章所论及的微分流形均为仿紧的 C^∞ 微分流形。今后一般不再特别注明这条．

§1.1　联　　络

对于 n 维微分流形 M，我们用 $C^\infty(M)$ 记 M 上所有 C^∞ 函数构成的环，用 $\mathscr{D}(M)$ 记 M 上 C^∞ 向量场的集合．它是 C^∞ 函数环 $C^\infty(M)$ 上的模．所谓联络，就是使我们能够对流形上向量场进行“微分”的一种手段．我们欲在流形上做分析和研究其微分几何，微分技术自然成为最重要的概念之一．

定义1　M 上的联络是一个微分算子

$$\nabla:\ \mathscr{D}(M)\times\mathscr{D}(M)\to\mathscr{D}(M)$$

$$(X,\ Y)\mapsto\nabla_X Y$$

使得对于任何 $X,\ Y,\ Z\in\mathscr{D}(M)$，$f,\ g\in C^\infty(M)$，有

(∇_1)　$\nabla_{fX+gY}Z=f\nabla_X Z+g\nabla_Y Z$，

(∇_2)　$\nabla_X fY=(Xf)Y+f\nabla_X Y$．

$\nabla_X Y$ 称为 Y 关于 X 的协变导数，或共变导数．

对于 M 的任一坐标邻域 U，联络 ∇ 就诱导出 U 上的一个联络 ∇^U，设 $\{U, x^1, \cdots, x^n\}$ 为 M 的局部坐标系，则方程

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{1.1}$$

定义了 U 上的 n^3 个 C^∞ 函数 Γ_{ij}^k，它们称为 U 上的联络系数. 设 $\{V, y^1, \cdots, y^n\}$ 为 M 的另一局部坐标系，又有

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)=\tilde{\Gamma}_{ij}^k\frac{\partial}{\partial y^k} \tag{1.2}$$

定义了 V 上的联络系数 $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$. 利用条件 (∇_1) 和 (∇_2)，当 $U\cap V\neq\varnothing$ 时，通过简单计算得

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}=\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial y^\beta}\cdot\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k}\Gamma_{ij}^k+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 x^j}{\partial y^\alpha\partial y^\beta}\cdot\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^j} \tag{1.3}$$

在(1.1)及(1.2)中我们使用了和号的省略.

另一方面，若已给 M 的一个局部坐标邻域的开覆盖及在每个坐标邻域 U 中有 n^3 个 C^∞ 函数 Γ_{ij}^k，使得在任两个相交的坐标邻域中，关系式 (1.3) 成立，则由 (1.1) 可定义 $\nabla^U_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x}$，因而得到 U 上的一个联络 ∇^U. 再由关系式(1.3)知：在 $U\cap V\neq\varnothing$ 上有 $\nabla^U=\nabla^V$. 故由它们唯一确定一 M 上的联络，确切地说是切丛 TM 上的联络. 这就是经典微分几何中定义联络的方法，它与定义 1 是完全等价的.

关于向量场的联络自然可以推广到张量场. 例如，对于一阶微分形式 ω，我们视之为 $\mathscr{D}(M)$ 的对偶空间 $\mathscr{D}^*(M)$ 中的元素，则可定义 $\nabla_X\omega$ 如下：

$$(\nabla_X\omega)(Y)=X\omega(Y)-\omega(\nabla_XY),\quad X,\ Y\in\mathscr{D}(M).$$

一般地，我们有如下定义

定义2 设 ∇ 为 M 上的联络，X，$Y\in\mathscr{D}(M)$.

(1) 若 $f\in C^\infty(M)$，则 $\nabla_Xf\equiv Xf$. (1.4)

(2) 若 ω 为 M 上的一阶微分形式，则

$$(\nabla_X\omega)Y\equiv X\omega(Y)-\omega(\nabla_XY). \tag{1.5}$$

(3) 若 S，T 为 M 上的两个张量场，则

$$\nabla_X(S\otimes T)\equiv(\nabla_XS)\otimes T+S\otimes\nabla_XT. \tag{1.6}$$

由定义 2，我们就可以顺次定义 $(r\cdot s)$ 阶张量场的协变导数了.

有了联络，我们就可以定义挠率张量 T 和曲率张量 R：

$$T(X,\ Y)=\nabla_XY-\nabla_YX-[X,\ Y], \tag{1.7}$$

$$R(X,\ Y)=\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]}. \tag{1.8}$$

其中[，]为 Poisson 括号，即

$$[X,\ Y]=XY-YX.$$

容易验证 T 与 R 均为 $C^\infty(M)$多线性的，即

$$T(fX,\ gY)=fgT(X,\ Y), \tag{1.9}$$

$$R(fX,\ gY)hZ=fghR(Y,\ Y,\ Z), \tag{1.10}$$

$\forall f,\ g,\ h\in C^\infty(M)$，$X,\ Y,\ Z\in\mathscr{D}(M)$.

曲率刻划了协变导数交换次序的差. 为说明这点，我们考查下面简单例子.

取点 $p\in M$ 附近的一局部坐标 $\{x^1,\cdots,\ x^n\}$. 又设 $V=v^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$(今后我们均使用和号的省略)为 p 点附近的向量场. 记

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}V=v^k_{,j}\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com