

地基与基础丛书

土工数值分析

钱家欢 殷宗泽 主编



中国铁道出版社

1981年·北京

地基与基础丛书

土工数值分析

钱家欢 殷宗泽 主编

中国铁道出版社

1991年·北京

内 容 提 要

近年来在岩土工程中,数值分析受到了极大的重视与广泛地应用。本书内容将介绍差分法、有限元法、边界元法、变分法和加权余量法五种数值解法,紧密结合岩土工程的应用。这些内容是作者多年来为岩土工程研究生编写的教材基础上扩充而成的。本书可供土建、铁道、公路、水利等专业工程技术人员及大专院校有关专业师生参考。

地基与基础丛书

土 工 数 值 分 析

钱家欢 殷宗泽 主编

*

中国铁道出版社出版、发行

(北京市东单三条14号)

责任编辑 冯黎明 封面设计 王毓平

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本: 787×1092mm 1/32 印张: 9.625 字数: 219 千

1991年2月 第1版 第1次印刷

印数: 1—2000册

ISBN7-113-00947-6/TU·209 定价: 4.75元

前 言

《土工数值分析》一书是讨论在岩土工程中常采用的五种数值方法，岩土工程因其土质条件的不同，在进行数值分析时怎样根据实际情况选择适当的模型求解，所以先谈本构关系。本书是作者多年来为岩土工程研究生所写教材整理扩充编著而成。

本书第一章为绪论，第二章为土的本构关系，目的使读者对研究土的应力-应变关系，从非线性弹性到弹塑性有初步的认识，在土工数值分析时根据土的应力水平，对选择适当的模型有所帮助。第三章的数学原理叙述两种数学方法（即变分法及加权余量法）与数值分析的紧密关系，以及说明如何进一步求解土工数值分析方法。第四、五、六章分别说明差分法、有限元法及边界元法的本身理论及土工上的应用。第七章是数值分析的混合解法，阐述使用两种数值解同时解一个土工问题，充分发挥了各种数值方法的优越性以及它们的相互配合作用。

本书编写分工如下：钱家欢（第一、四章及第七章第三节），殷宗泽（第二、五章），卢盛松（第三、六章及第七章第一、二节），赵维炳也参加了第四章的编写。全书由钱家欢、殷宗泽审校。

目 录

第一章 绪 论	1
第一节 数值分析的内容与分类	1
第二节 土工与数值分析	2
第二章 土的本构关系	4
第一节 弹性非线性模型	5
第二节 弹塑性模型	29
第三章 数学原理与数值分析	71
第一节 概 述	71
第二节 变分法原理及其应用	71
第三节 加权余量法	111
第四节 变分法、加权余量法在有限元与边界元中 的应用	121
第四章 差 分 法	142
第一节 有限差分公式	142
第二节 稳定渗流问题的差分解法	147
第三节 太沙基固结方程	150
第四节 比奥固结方程	159
第五节 动力固结问题	165
第六节 弹性地基上板的差分解法	176
第五章 有限元法在土力学中的应用	185
第一节 有限元法简介	186
第二节 非线性分析方法	189
第三节 接触面单元	203

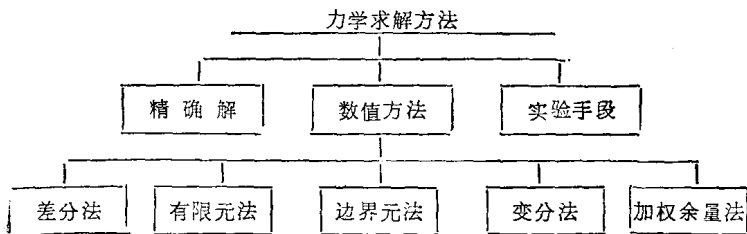
第四节	土体非线性分析	209
第五节	固结有限元法	224
第六章	边界单元法	251
第一节	弹性力学问题的边界元解法	251
第二节	弹塑性问题的边界元解法	263
第三节	粘塑性与徐变问题的边界元解法	272
第七章	数值方法的混合解法	281
第一节	有限元与边界元耦合计算原理	281
第二节	结构与地基系统的有限元、边界元耦合动 力分析	285
第三节	混合法解固结问题	294

第一章 绪 论

第一节 数值分析的内容与分类

“应用力学”领域内的很多课题，工程师和科学工作者近年来一般用数值方法来求解，获得显著成功。这主要由于目前力学课题本身的复杂性——非均质、非线性以及复杂的加荷条件及边界条件，精确解已无能为力。同时，计算机的迅速发展，也使数值分析得到有效而经济的成果。

当然，在量测手段得到改进的今天，少数课题利用实验室的结构模型试验或离心模型试验，也可以得到定性或甚至定量的结果。这样，上述力学求解方法可列成下表：



表中数值方法列出最常用的五种：差分法、有限元法、边界元法、变分法和加权余量法。

差分法转化课题的常微分方程或偏微分方程为差分方程，然后结合初始及边界条件，求解线性代数方程组。这方法比较直观，容易编制程序，所以从40年代末期以来，迄今盛行不衰。

有限元法以研究区域的变分形式，离散所研究的区域，

成为有限数目的单元。对于边界复杂以及材料属非线性的课题，与差分法相比，有特殊的灵活性。

边界元法化微分方程为边界积分方程，使用类似于有限元法的离散技术来离散边界。离散化所引起的误差仅来源于边界，因之提高了计算精度。依靠边界节点上算得的量，即可计算区域内的有关物理量，从而减少了准备工作量及计算量。边界元又有直接法及间接法之分，间接法需要先求取一个虚设的量，多了一道手续，所以本书仅介绍直接法。边界元法的缺点是对变系数或非线性问题的适应性不如有限元法。

顺便指出，差分法、有限元法和边界元法分别由英国三位学者Southwell、Zienkiewicz和Brebbia所开拓和推广应用，功绩是不可磨灭的。香港大学张佑启开展了结构力学有限元法的卓越研究（例如有限条分法等）；同时，他在弹性地基上的研究，事实上奠定了边界元法的基本理论。

变分法是讨论泛函的极值问题。对上述差分法及有限元法都可起推导基本公式的作用；而这方法本身，也是数值方法中最古老的方法。至于加权余量法，可以引入试函数和权函数的方法，从微分方程中直接求出近似的数值解。它的优点是可以避免建立能量方程，使一些无法求得能量方程的课题，也得到了较精确的解答。

第二节 土工与数值分析

土工含意包括岩土力学、地基工程、土石坝以及结构与土的协同作用的工程，如挡土墙、板桩、基础梁和板等内容。

在很多岩土工程的实际问题中，由于岩土的非均质、非线性的性状以及几何形状的任意性、不连续性等因素，在多

数情况下不能获得解析解。最近廿多年来，随着电子计算机的迅速兴起，在岩土工程中，数值分析受到了极大的重视，各种数值方法在岩土工程中都得到了广泛地应用，而岩土工程中的各种复杂问题的解决又深化和丰富了数值分析的内容。

目前，在岩土工程的数值分析中，用的最为普遍的是有限元法和差分法，其他方法如边界元法正在兴起。变分法与加权余量法既可以独立地作为数值方法运用于土工实际问题的求解，又可作为推导前几种数值方法的手段。当数值分析中的差分法首先盛行于工程科学时，土工中的渗流及固结问题在四十年代后期也开始采用差分法成功地解决了某些实际问题，如土坝渗流及浸润线的求法、土坝及地基的固结等。五十年代及六十年代初，弹性地基上的梁与板以及板桩也用差分法来求解。六十年代，土石坝的静力问题用有限元法来求解。由于有限元解法的灵活性，使差分法在土工中的应用暂时趋于停滞。进入七十年代之后，土石坝及高楼（包括地基）成功地使用有限元法解决了抗震分析。七十年代后期及八十年代，边界元法异军突起。这方法除上节中所述的优点外，由于它仅仅离散边界，故特别适宜于半无限域课题，这些是土力学及地基工程学科经常遇到的边界情况。近十年来，地基的静力及动力问题，例如桩基及强夯（即动力固结）等，都使用边界元法得到了有效地解决。

必须指出，在最近四、五年，差分法又有了新进展。任意网格的差分，使这老方法又可以与有限元相匹敌。另外，在某些特定的条件下，有限元法与差分法，有限元法与边界元法相结合来处理一个课题，比它们各自求解更显出优越性。总之，这三种方法的互相渗透和互相配合，使求解土工或其他工程学科课题又达到了一个新阶段，使数值方法解决问题的能力提高到新的水平。

第二章 土的本构关系

本构关系,或者叫本构定律(*Constitutive law*),就是指材料的应力~应变关系。虎克定律是最基本也是最简单的一种本构关系,即假定材料的应力~应变关系是线性弹性的。土力学中常用的计算地基应力和地面沉降的公式,都依据了这一假定。然而,土是散粒体,其本构关系比其它材料复杂得多。有许多仪器可以用来进行土体的应力~应变关系试验,如压缩仪,普通三轴仪,平面应变仪、扭剪仪、真三轴仪等。各种仪器的试验结果表明,土体的变形规律是很复杂的,概括起来讲,有以下几点:

1. 土体变形有十分明显的非线性特性。无论压缩试验测得的 $e \sim p$ 曲线,三轴试验测得的应力~应变曲线,还是野外荷载试验测得的荷载~沉降曲线,都是如此。而且,加荷一开始就呈非线性,差不多没有什么直线变形阶段。这种非线性是由于存在较大的塑性变形。

2. 土体不仅有显著的塑性体积变形,而且剪应力会引起塑性体积变形,这叫剪胀性;另一方面,球应力又会产生剪应变。这种交叉的,或者耦合的效应,在其它材料中是少见的。

3. 土体的应力~应变关系曲线有硬化和软化两种型式。所谓硬化,就是变形随应力而不断增加;所谓软化,就是应力~应变曲线存在着峰值,过了峰值以后,应力虽然减小,变形仍在增加。松砂和正常固结粘土呈硬化型,而紧密砂土和超固结粘土则呈软化型。

4. 应力路径、应力历史、中主应力和固结压力等，对变形均有显著影响。

5. 土体的变形是各向异性的、不仅存在原生的由土体结构的各向异性所带来的变形各向异性，而且对于结构上各向同性的重塑土，在各向受力不同时，也会产生新的变形各向异性。

上面所讲的仅仅是土体在静荷载作用下的不随时间变化的特性。在动荷载作用下，在长期荷载作用下，土还会表现出另外的变形特性。

显然，对土体的应力应变关系采用线性弹性的假定是不合适的。随着试验技术和计算技术的发展，有可能也有必要建立更能反映土体变形特性的计算模型。这种计算模型叫本构模型。上面讲到的土体变形的各种特性，要在本构模型中全部反映出来是不可能的。通常是在分析试验资料的基础上，作出某些简化假定，抓住主要变形特性，来建立本构模型理论。

近二十多年来，已经提出了大量的土体本构模型理论。归纳起来，有两大类：一是弹性非线性理论。它以弹性理论为基础。在各微小的荷载增量范围内，把土看作弹性材料，从一个荷载增量变化到另一个荷载增量，土体的弹性常数发生变化，以考虑非线性；二是弹塑性模型理论。认为土体的变形包括弹性和塑性变形两部分。把弹性理论和塑性理论结合起来建立本构模型。国内已出版了一些专著〔1〕、〔2〕、〔3〕，较详细地介绍各种本构理论。本章着重介绍建立本构模型的基本理论，并对几种主要的模型加以讨论。

第一节 弹性非线性模型

弹性非线性模型假定材料符合弹性力学规律，而用改变

弹性常数的方法来反映非线性特性。应力~应变关系式为

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (2-1)$$

这里刚度矩阵称弹性矩阵，由广义虎克定律

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{pmatrix} \quad \text{对称}$$

$$(2-2)$$

式中包含了弹性模量 E 和泊松比 ν 两个常数。它们可以用另外两个弹性常数，剪切模量 G 和体积模量 K 来代替。它们之间的关系为

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2-3)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2-4)$$

如果弹性常数 E 、 ν 或 G 、 K 为不变量，则应力与应变的关系为线性的；如果它们随应力状态而变，应力~应变关系就成为非线性的了。因此，对弹性非线性模型来说，关系式是现成的，问题仅仅在于如何确定随应力变化的弹性常数。

一、弹性常数的确定

土体的变形试验有许多方法，都可用来确定弹性常数。只是试验方法不同计算弹性常数的公式也不同。但确定的依据都是广义虎克定律。下面介绍由几种不同试验来确定弹性常数的公式。

1. 单轴压缩试验

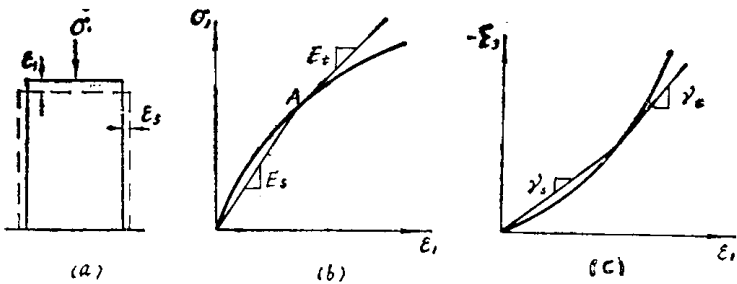


图 2-1

由广义虎克定律，

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{E} \quad (2-5)$$

对单轴压缩试验 $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ 如图 2-1 (a) 所示，因此

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} \quad (2-6)$$

由此

$$E = \frac{\sigma_1}{\epsilon_1} \quad (2-7)$$

以 σ 为纵坐标， ϵ 为横坐标，点绘 σ - ϵ 关系，如图 2-1 (b) 所示，则曲线的斜率即弹性模量 E 。土体的 σ - ϵ 关系是曲线，不是直线，故斜率 E 是变量，随 σ 而变。曲线斜率可有两种

表示方法，割线法和切线法。图 2—1 (b) 中 A 点的割线斜率为 E_s ，叫割线弹性模量；切线斜率为 E_t ，叫切线弹性模量。

(2—7) 式表示的是割线模量 E_s 。切线模量可表示为

$$E_t = \frac{\Delta\sigma_1}{\Delta\varepsilon_1} \quad (2-8)$$

在 $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ 的条件下，由广义虎克定律的另一式

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \nu \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{E} = -\nu \frac{\sigma_1}{E}$$

与 (2—6) 式联列可得

$$\nu = \frac{-\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \quad (2-9)$$

在土力学中膨胀应变为负，故 $-\varepsilon_3$ 数值上为正。以 $(-\varepsilon_3)$ 为纵坐标， ε_1 为横坐标，点绘曲线，如图 2—1 (c) 所示。其斜率为泊松比 ν ，也有割线泊松比 $\nu_s = \frac{-\varepsilon_3}{\varepsilon_1}$ 和切线泊松比 $\nu_t = \frac{-\Delta\varepsilon_3}{\Delta\varepsilon_1}$ 之分。它们都是应力的函数。

割线弹性常数用于表示应力全量和应变全量之间的关系，切线模量和泊松比则用于表示应力增量和应变增量之间的关系。对于增量关系，(2—1) 式须改为

$$\{\Delta\sigma\} = [D]\{\Delta\varepsilon\} \quad (2-1)'$$

式中 $[D]$ 所含常数应为切线弹性常数。

2. 常规三轴试验

在 σ_3 为常量的条件下增加偏应力，可测出偏应力 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 与偏应变 ε_s 之间的关系曲线，如图 2—2 (a) 所示。由 (2—5) 式可见，当 σ_3 不等于 0 时，无法由该式推得简单的弹性模量公式， $(\sigma_1 - \sigma_3) \sim \varepsilon_s$ 的割线斜率不具有割线弹性模量的物理意义。但对于增量分析，该曲线却可以确定增量弹性模量 E_t 。由增量的虎克定律，

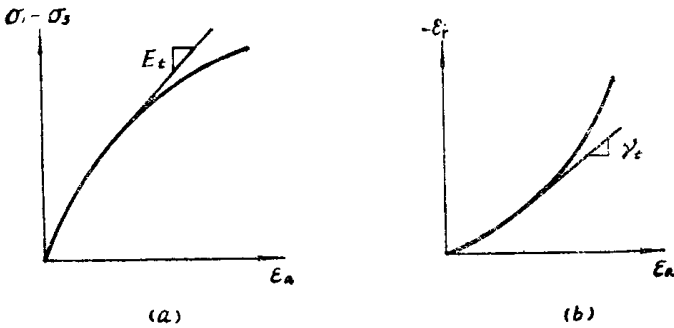


图 2-2

$$\Delta \epsilon_1 = \frac{\Delta \sigma_1}{E_t} - \nu_t \frac{\Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_3}{E_t}$$

对常规三轴试验, $\sigma_2 = \sigma_3 = \text{常量}$, 故 $\Delta \sigma_2 = \Delta \sigma_3 = 0$, 上式成为

$$\Delta \epsilon_1 = \frac{\Delta \sigma_1}{E_t}$$

则

$$E_t = \frac{\Delta \sigma_1}{\Delta \epsilon_1}$$

在加偏应力过程中, 大主应力增量就是偏应力增量 $\Delta \sigma_1 = \Delta(\sigma_1 - \sigma_3)$, 同时大主应变增量等于轴向应变增量 $\Delta \epsilon_1 = \Delta \epsilon_a$,

$$E_t = \frac{\Delta(\sigma_1 - \sigma_3)}{\Delta \epsilon_a} \quad (2-10)$$

因此 $(\sigma_1 - \sigma_3) \sim \epsilon_a$ 曲线的切线斜率是具有 E_t 的物理意义的。

由增量虎克定律的另一个式子

$$\Delta \epsilon_3 = \frac{\Delta \sigma_3}{E_t} - \nu_t \frac{\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_2}{E_t} \quad (2-11)$$

在 $\Delta \sigma_2 = \Delta \sigma_3 = 0$ 的条件下,

$$\Delta \varepsilon_3 = -\nu_t \frac{\Delta \sigma_1}{E_t} = -\nu_t \Delta \varepsilon_1$$

故
$$\nu_t = -\frac{\Delta \varepsilon_3}{\Delta \varepsilon_1} = \frac{-\Delta \varepsilon_3}{\Delta \varepsilon_1} \quad (2-12)$$

点绘侧向膨胀应变 $-\varepsilon_3$ 与轴向压缩应变 ε_1 之间的关系曲线,其切线斜率就是切线泊松比 ν_t ,如图2-2(b)所示。而该曲线的割线斜率并不具有割线泊松比的物理意义。

3. 控制应力路径的三轴试验

如果三轴试验中,不是保持 σ_3 为常量,而是控制 σ_3 与 σ_1 按某种比例增加,则在应用增量的广义虎克定律的公式(2-8)和(2-11)时, $\Delta \sigma_2 = \Delta \sigma_3 \neq 0$,由这两式可解得

$$E_t = \frac{\Delta \sigma_1^2 + \Delta \sigma_1 \Delta \sigma_3 - 2 \Delta \sigma_3^2}{\Delta \varepsilon_1 (\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_3) - 2 \Delta \varepsilon_3 \Delta \sigma_3} \quad (2-13)$$

$$\nu_t = \frac{\Delta \varepsilon_1 \Delta \sigma_3 - \Delta \varepsilon_3 \Delta \sigma_1}{\Delta \varepsilon_1 (\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_3) - 2 \Delta \varepsilon_3 \Delta \sigma_3} \quad (2-14)$$

令
$$m = \frac{\Delta \sigma_3}{\Delta \sigma_1} \quad (2-15)$$

则
$$E_t = \frac{1 + m - 2m^2}{1 + m - 2m \frac{\Delta \varepsilon_3}{\Delta \varepsilon_1}} \cdot \frac{\Delta \sigma_1}{\Delta \varepsilon_1} \quad (2-13)'$$

$$\nu_t = \frac{m - \frac{\Delta \varepsilon_3}{\Delta \varepsilon_1}}{1 + m - 2m \frac{\Delta \varepsilon_3}{\Delta \varepsilon_1}} \quad (2-14)'$$

显然,当 σ_3 为常量,即 $m = 0$ 时,上两式可分解成为(2-10)和(2-12)式。

4. 平面应变试验

作平面应变试验,也可以保持 σ_3 为常量,测出 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 与轴向应变 ε_1 和侧向应变 ε_3 ,但这时 $\sigma_1 - \sigma_3 \sim \varepsilon_1$ 和 $-\varepsilon_3 \sim \varepsilon_1$ 两组曲线的切线斜率不具有切线弹性常数的物理意义。

对于平面应变试验, 当 σ_3 不变时, σ_2 仍然是变化的 $\Delta\sigma_2 \neq 0$ 。由广义虎克定律可推得 $\Delta\sigma_2 = \nu_1 \Delta\sigma_1$,

因此,

$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{(1 - \nu_1^2) \Delta\sigma_1}{E_1}$$

$$\frac{\Delta\sigma_1}{\Delta\varepsilon_1} = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \quad (2-16)$$

可见, 平面应变试验 $(\sigma_1 - \sigma_3) \sim \varepsilon_1$ 曲线的斜率为 $\frac{E_1}{1 - \nu_1^2}$ 。如图 2-3 (a) 所示。还可推得

$$\frac{-\Delta\varepsilon_3}{\Delta\varepsilon_1} = \frac{\nu_1}{1 - \nu_1} \quad (2-17)$$

这表示 $(-\varepsilon_3) \sim \varepsilon_1$ 的切线斜率为 $\frac{\nu_1}{1 - \nu_1}$, 而不是 ν_1 , 如图 2-3 (b) 所示。

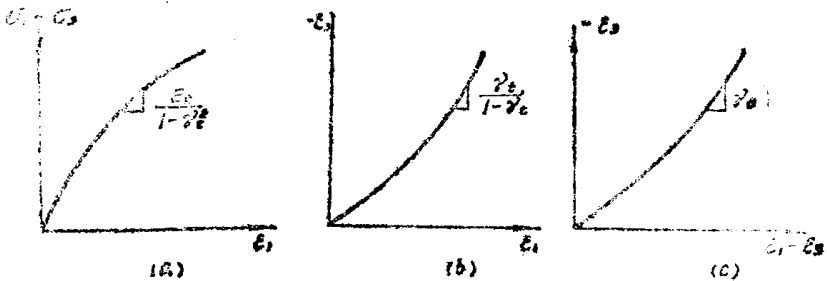


图 2-3

尽管这些曲线的斜率不是弹性常数, 但是可以用来计算 E_1 和 ν_1 。

此外, 由 (2-17) 式可推得

$$\nu_1 = \frac{-\Delta\varepsilon_3}{\Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon_3} \quad (2-18)$$

若点绘 $-\varepsilon_3 \sim (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$ 曲线如图 2-3 (c) 所示, 则曲线