板 壳 振 动 理 论

曹 志 远 编著

VIBRATION THEORY OF PLATES AND SHELLS

CAO ZHI-YUAN

中 国 铁 道 出 版 社

1 9 8 3 年 · 北京

Vibration Theory of Plates and Shells

Cao Zhi-Yuan

The purpose of this monograph is to provide a summary of the basic theories and analysis methods for the vibration of plates and shells. The present book reviews the governing dynamic equations and relation formulas of plate and shell theory, various methods and techniques of dynamic analyses for plate and shell structures, various types of plate and shell vibration problems, the treatment methods for plate and shell structures with various shapes, boundary and added conditions as well as engineering applications of plate and shell dynamic theory. Besides, a series of useful numerical results in form of nondimensional parameters for engineering analyses and corresponding figures and tables as well as approximately 400 references in this field are given in this book. It is intended to be a reference book for teachers, research workers, and engineers, designers who are engaged in the dynamic analysis and design of structures.

Chapters 1, 2, 9 present the basic dynamic theory of elastic body, plate and shell, respectively. Chapters 3 through 5 deal with the vibration of rectangular, circular, annular, elliptical, parallelogram, trapezoid, triangular plates and plates with various boundary and added conditions. Chapters 10 through 13 deal with the vibration of circular and noncircular cylindrical, conical, spherical, shallow, membrance and open shells as well as other shells of revolution and curved panels. Chapter 6 is devoted to general method for free, forced, damping vibrations and internal friction theory of continuum body vibration. Chapters 7,14 discuss various approximate and numerical methods for plate and shell vibration analyses. Chapters 8,14 consider the complicating effects, such as anisotropy, initial stresses, variable thickness, large deflection, elastoplasticity, thermo-elasticity, nonhomogeneity (composite, combined, stiffened, grillages et al.), shear deformation and rotatory inertia as well as the effects of surrounding media (fluid and soil).

内 容 提 要

本书系统地论述了板壳振动的基本理论与分析方法。主要内容包括板壳动力学的有关基本理论，板壳动力分析的各种方法与技巧，板壳振动的各种类型问题，板壳结构的各种形状、边界与特殊情况的处理方法，以及板壳结构的工程应用问题。全书还给出了大量可供实用的数值结果，并附有详细参考文献目录。

读者对象：高等院校工程专业高年级学生、研究生、教师及结构动力学研究人员、设计人员、工程技术人员。

板壳振动理论
曹志远 编著
中国铁道出版社出版、发行
责任编辑 王能远 装帧设计 刘景山
各地新华书店经售
中国铁道出版社印刷厂印
开本：787×1092毫米 1/16 印张：29.5 字数：742 千
1989年4月 第1版 第1次印刷
印数：0001—1,000册 定价：12.55元
ISBN7-113-00114-9/TU·33

前　言

结构分析是各工程技术领域及各工程学科研究与工科高等教育的共同和普遍关心的问题。凡受有载荷的机械或设施，其设计与研究总离不开结构的力学分析这一环节。结构分析分为静力与动力两大部分。目前国内已出版书籍中，在动力学方面，以结构类型而言，大都只涉及一、两、多个自由度离散系统以及弦、杆、轴、梁、拱、环、膜、桁架、框架等简单连续体，尚缺少系统的板、壳内容；凡板壳书籍中，又大都只讨论静力分析，尚缺乏全面的动力学内容。因此需要我国自己编著板壳动力分析方面的专门书籍来补充与完善这两类书籍在这方面的不足。

板壳动力问题是近代许多工程部件设计与研究的关键。诸如，各种动力机械，运输机械，飞机、导弹、火箭的机身、机翼、发动机叶片，卫星与航天器的外壳、天线、集能器，原子反应堆、粒子加速器的主体结构，船舶、舰艇的船身、甲板、货舱，海洋平台，储油罐，地下结构与隧道，化工容器，高炉主体，电厂冷却塔，大跨度结构的屋顶，各种新型建筑结构等等都有各种各样板壳结构。由于它们所承受的各种振动、冲击、风载、波浪、地震、爆炸、移动、气动载荷等均是动力荷载，因此板壳动力学已成为近代与将来工程技术发展的一个必不可少的理论基础。

近半个世纪来，板壳动力学的研究成果显著，但大部份散落在各种文献之中，使初学者难以很快入门。编写本书目的就在于系统介绍有关研究结果，使读者有个全貌了解，并可作为深入研究的基础。本书将介绍板壳动力学的基本理论和分析方法，但限于振动理论，并主要讨论线弹性、小变形的薄板、薄壳问题，而只在适当章节给出一些复杂问题的新近成果。全书分为板与壳两大部份，并按结构类型与分析方法划分章节，读者也可依此直接查阅所需章节内容。我们希望这本书能为在板壳动力学研究与工程应用方面工作的读者提供必要的基础知识。

本书对板壳动力学的有关基本理论，板壳振动理论的各种类型问题，板壳结构的各种形状、边界与特殊情况，板壳结构的工程应用问题，将分门别类予以系统介绍，可作为各类问题初学者的基础。本书将介绍几十种常用的板壳动力分析方法，也可作为一般连续体动力分析的处理方法的参考。本书对每个问题除叙述一般性理论、解法与相应公式外，还尽可能列出较为详尽的数值结果，可供工程设计计算直接查用。在计算方法方面，除了经典解析解外，还更多介绍了许多工程实用的近似解法；鉴于近代计算技术发展，书中特别注意到变分原理与数值解法的论述。此外，书中还介绍了结构动力学近期发展的一些比较成熟的新的理论与方法。这样就有可能兼顾到研究人员对深入性、教学人员对系统性、工程人员对实用性的要求。

本书初稿承蒙钱伟长、钱令希、刘恢先等教授审阅，并提出许多宝贵意见。本书一部分也反映本人近年来和一些兄弟单位共同合作研究的成果。对此表示衷心的感谢。由于作者水平有限，书中难免有许多不妥之处，希读者多加指正。

曹　志　远

一九八六年六月于同济大学

目 录

第一章　弹性体动力学概论

§1.1 引　　言

由于近代科学技术发展，许多机械与设施必须考虑在动荷载条件下的设计计算。结构动力学就是研究在动荷载作用下结构反应的分析方法的一门科学。

结构动力学是结构分析的一个组成部分。当荷载（包括其大小、方向或作用点）随时间迅速改变，结构的力学分析必须考虑质量的惯性力时，其结构分析都属于结构动力学研究范围。结构振动理论主要研究弹性体系在其原来平衡位置附近所作微幅振动，是结构动力学的基础。

结构振动理论一般可分为有限自由度体与弹性体振动两大部分。所有结构都具有一定质量和刚度分布。作为简化，可将结构看成是由具有点质量的刚性体和无质量的变形体组成，并可用有限个位移坐标来表示结构的运动状态，这就是有限自由度体振动理论。而弹性体振动理论则分析质量和刚度都是连续分布的结构，本质上认为结构由无穷多质量点组成，并用空间连续函数来反映结构的运动状态，所以又称为无限多自由度体系，这是一种较前者更为严密的振动理论。弹性体振动研究对象包括杆、轴、索、梁、框、拱、环、膜、板、壳以及三维弹性体等。按连续弹性体分析的板壳振动则是其中比较复杂和困难的一部分。

板与壳是一种二维承弯结构。这些结构的共同特点是其一个方向尺度远小于另二个方向尺度。其小尺度（厚度）方向中点联成一中面，当中面为一平面时则为板；为一曲面时则为壳。这里所讨论的板壳振动，若不作特别说明，一般是指匀质、各向同性、线弹性、等厚度、小挠度、无阻尼的薄板、薄壳情况。

无论哪种弹性构件（其中也包括板与壳）都属于三维连续弹性体在某种位移、应变、应力假定条件下的简化[70]，因此在具体研究板壳构件振动以前有必要介绍一下连续弹性介质动力学的基本方程以及弹性体振动分析的一般方法。

§1.2 弹性体动力学基本方程

弹性体在运动过程中各点将发生位移。在直角坐标系中弹性体内一点的位移可以用它在 x，y，z 三轴上的投影 u，v，w 来表示，一般以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。u，v，w 称为弹性体的位移分量。对于动力学问题而言，三个位移分量同时是空间坐标 x，y，z 及时间坐标 t 的函数。

由于位移，弹性体将发生形变，其中包括长度和角度的改变。在直角坐标系中，弹性体内一点的形变可以用六个应变分量来表示：正应变 ε_x，ε_y，ε_z 分别表示沿 x，y，z 方向微小线段的单位长度伸缩；剪应变 γ_{yz}，γ_{zx}，γ_{xy} 分别表示 y 与 z，z 与 x，x 与 y 两方向微小线段间直角的改变。正应变以伸长为正，缩短为负；剪应变以直角变小为正，变大为负。弹性力学中已经证明，如果已知一点的六个应变分量，则就可以求得经过该点的任一微小线段

的正应变以及经过该点的任意两个微小线段之间的角度的改变，因此这六个应变分量可以完全确定一点的形变状态。对于动力学问题而言，六个形变分量也同时是空间坐标 x，y，z 及时间坐标 t 的函数。

通过几何学方面推导，可以建立形变分量与位移分量之间关系式。如果忽略高阶微量，对于微小形变和位移我们有下列六个几何方程，即哥西（Cauchy）关系式：

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}\quad(1.1a),\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}\quad(1.1b),\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}\quad(1.1c),$$

$$\gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\quad(1.1d),\quad \gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\quad(1.1e),\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\quad(1.1f)$$

由于形变，弹性体内将产生应力。体内某点应力表示经过该点某截面上内力强度，与所取的截面方向有关。在直角坐标系中，可以在一点附近取出一个微小的正六面体，其各面与坐标轴垂直，将每个面上的应力分解为一个正应力和两个剪应力，分别和三个坐标轴平行．共计九个应力分量：正应力σ_x，σ_y，σ_z分别表示作用在垂直于 x，y，z 轴的面上，沿着 x，y，z 轴方向；剪应力τ_{yz}，τ_{zy}，τ_{zx}，τ_{xz}，τ_{xy}，τ_{yx}，其中前一个角码表明作用面垂直于那个坐标轴，后一个角码表明作用方向沿着那个坐标轴。如果某一个面上的外法线方向是沿着坐标轴的正方向，则这个面上的三个应力分量的正方向为沿着坐标轴的正向；负方向为沿着坐标轴的负向。反之亦然。根据微体的力矩平衡，可以得出

$$\tau_{yz}=\tau_{zy},\quad \tau_{zx}=\tau_{xz},\quad \tau_{xy}=\tau_{yx}\qquad(a)$$

这就是剪应力的互等性。

弹性力学中已经证明，如果已知一点的六个应力分量，则就可以求得经过该点的任意截面上的正应力和剪应力。若此截面的外法线N的方向余弦为

$$\cos(N,x)=l,\quad \cos(N,y)=m,\quad \cos(N,z)=n\qquad(b)$$

则截面上应力在三个坐标轴上的投影分别为

$$X_N=l\sigma_x+m\tau_{yx}+n\tau_{zx}\qquad(1.2a)$$

$$Y_N=l\tau_{xy}+m\sigma_y+n\tau_{zy}\qquad(1.2b)$$

$$Z_N=l\tau_{xz}+m\tau_{yz}+n\sigma_z\qquad(1.2c)$$

因此弹性体中上述六个应力分量可以完全确定一点的应力状态。对于动力学问题而言，六个应力分量也同时是空间坐标x，y，z 及时间坐标 t 的函数。

对于完全弹性的各向同性体，形变分量与应力分量之间关系有下列六个物理方程，即虎克定律：

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\right]\qquad(1.3a)$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\nu(\sigma_z+\sigma_x)\right]\qquad(1.3b)$$

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\nu(\sigma_x+\sigma_y)\right]\qquad(1.3c)$$

$$\gamma_{yz}=\frac{\tau_{yz}}{G},\quad \gamma_{zx}=\frac{\tau_{zx}}{G},\quad \gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}\qquad(1.3d)$$

式中，E是弹性模量，G是剪切模量，ν是泊松比，这三者之间关系为

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)}\qquad(1.4)$$

对于一般匀质各向同性体，这些弹性常数均不是坐标、时间和方向的函数。

由式（1.3）可解得用应变分量表示的应力分量表达式：

$$\sigma_x=\frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_x+\frac{\nu}{1-2\nu}e\right) \tag{1.5a}$$

$$\sigma_y=\frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_y+\frac{\nu}{1-2\nu}e\right) \tag{1.5b}$$

$$\sigma_z=\frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_z+\frac{\nu}{1-2\nu}e\right) \tag{1.5c}$$

$$\tau_{yz}=G\gamma_{yz},\quad \tau_{zx}=G\gamma_{zx},\quad \tau_{xy}=G\gamma_{xy} \tag{1.5d}$$

其中体积应变

$$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z \tag{1.6}$$

对于直角坐标系，在弹性体内一点附近取出一个微小的正六面体，使其各面与坐标轴垂直。根据此微体上力的动态平衡，计入体积力沿坐标轴分量K_x,K_y，K_z，及惯性力，可得运动方程

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+K_x=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.7a}$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+K_y=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1.7b}$$

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+K_z=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.7c}$$

式中ρ为弹性体的质量密度，对于匀质体来说，它是一个常量。

这样，对于弹性体动力学问题，一共有十五个未知数：三个位移分量u，v，w；六个应变分量ε_x，ε_y，ε_z，γ_{yz}，γ_{zx}，γ_{xy}；六个应力分量σ_x，σ_y，σ_z，τ_{yz}，τ_{zx}，τ_{xy}。这十五个未知数应当满足十五个方程：三个运动方程（1.7）；六个几何方程（1.1）；六个物理方程（1.3）或（1.5）。此外，还需满足边界条件和初始条件：在位移边界问题中，位移分量在边界上应满足位移边界条件

$$u_s=\bar{u},\quad v_s=\bar{v},\quad w_s=\bar{w} \tag{1.8}$$

在应力边界问题中，应力分量在边界上应当满足应力边界条件，它就是式（1.2）在边界面处表达式

$$l\sigma_{xs}+m\tau_{yxs}+n\tau_{zxs}=F_x \tag{1.9a}$$

$$l\tau_{xys}+m\sigma_{ys}+n\tau_{zys}=F_y \tag{1.9b}$$

$$l\tau_{xzs}+m\tau_{yzs}+n\sigma_{zs}=F_z \tag{1.9c}$$

式（1.8），（1.9）中等号左边的位移、应力分量均为边界值，等号右边是该边界上的位移、应力分量给定值。位移、速度初始值应当满足初始条件

$$u(0)=u_0,\quad v(0)=v_0,\quad w(0)=w_0 \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0)=\dot{u}_0,\quad \frac{\partial v}{\partial t}(0)=\dot{v}_0,\quad \frac{\partial w}{\partial t}(0)=\dot{w}_0 \tag{1.11}$$

上述两式中，等号左边的位移、速度分量均为初始值，等号右边是初始时刻的位移、速度分量给定值。当然，应力分量和位移分量解都应当是单值的。

将几何方程（1.1）代入物理方程（1.5），再代入运动方程（1.7），可得弹性体动力学基本方程组

$$\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\nabla^2 u+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]+K_x=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.12a}$$

$$\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\nabla^2 v+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]+K_y=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1.12b}$$

$$\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\nabla^2 w+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]+K_z=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.12c}$$

式中

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.13}$$

对于圆柱坐标系（r，θ，z），有沿坐标轴的三个位移分量u，v，w；六个应变分量ε_r，ε_θ，ε_z，$\varepsilon_{\theta z}$，ε_{zr}，$\varepsilon_{r\theta}$；六个应力分量σ_r，σ_θ，σ_z，$\tau_{\theta z}$，τ_{zr}，$\tau_{r\theta}$，一共有十五个未知数将满足下列十五个方程：

几何方程

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r}\quad(1.14a),\quad \varepsilon_\theta=\frac{1}{r}\left(u+\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\quad(1.14b),\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}\quad(1.14c),$$

$$\gamma_{\theta z}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\quad(1.14d),\quad \gamma_{zr}=\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\quad(1.14e),$$

$$\gamma_{r\theta}=\frac{\partial u}{r\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\quad(1.14f)$$

物理方程

$$\varepsilon_r=\frac{1}{E}[\sigma_r-\nu(\sigma_\theta+\sigma_z)] \tag{1.15a}$$

$$\varepsilon_\theta=\frac{1}{E}[\sigma_\theta-\nu(\sigma_z+\sigma_r)] \tag{1.15b}$$

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}[\sigma_z-\nu(\sigma_r+\sigma_\theta)] \tag{1.15c}$$

$$\gamma_{\theta z}=\frac{\tau_{\theta z}}{G},\quad \gamma_{zr}=\frac{\tau_{zr}}{G},\quad \gamma_{r\theta}=\frac{\tau_{r\theta}}{G} \tag{1.15d}$$

运动方程

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{\theta r}}{r\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+K_r=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.16a}$$

$$\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_\theta}{r\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial z}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}+K_\theta=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1.16b}$$

$$\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{r\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}+K_z=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.16c}$$

式中K_r，K_θ，K_z分别为体积力在圆柱坐标轴上分量。

将几何方程（1.14）代入物理方程（1.15），再代入运动方程（1.16），可得圆柱坐标系中弹性体动力学基本方程组

$$2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial u}{r\partial r}-\frac{u}{r^2}\right)+(1-2\nu)\left(\frac{\partial^2 u}{r^2\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial^2 v}{r\partial r\partial\theta}-(3-4\nu)\frac{\partial v}{r^2\partial\theta}$$
$$+\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial z}+\frac{1-2\nu}{G}K_r=\frac{1-2\nu}{G}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.17a}$$

$$\frac{\partial^2 u}{r\partial r\partial\theta}+(3-4\nu)\frac{\partial u}{r^2\partial\theta}+(1-2\nu)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{\partial v}{r\partial r}-\frac{v}{r^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+2(1-\nu)\frac{\partial^2 v}{r^2\partial\theta^2}$$

$$+\frac{\partial^2 w}{r\partial\theta\partial z}+\frac{1-2\nu}{G}K_\theta=\frac{1-2\nu}{G}\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1.17b}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial z}+\frac{\partial u}{r\partial z}+\frac{\partial^2 v}{r\partial\theta\partial z}+(1-2\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\partial w}{r\partial r}+\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\theta^2}\right)+2(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

$$+\frac{1-2\nu}{G}K_z=\frac{1-2\nu}{G}\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.17c}$$

在轴对称情况下，上述基本方程组转变为

$$G\left[\nabla^2 u-\frac{u}{r^2}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]+K_r=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.18a}$$

$$G\left[\nabla^2 w+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]+K_z=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.18b}$$

式中

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial}{r\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.19}$$

对于球坐标系（r，φ，θ），在球对称情况下有弹性体动力学基本方程

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}G\left(\nabla^2 u-\frac{2u}{r^2}\right)+K_r=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.20}$$

式中

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2\partial}{r\partial r} \tag{1.21}$$

而u，K_r分别为径向位移和径向体积力。

§1.3 弹性体动力学变分原理

描述一个弹性体运动过程可以用按上述动态平衡观点建立的基本微分方程，也可以用按能量观点建立的基本变分方程，这就涉及一系列有关变形能、动能、外力功等概念和动力学变分原理。[267][292][324][326] 下面许多有关振动问题的近似解法和数值解法均与变分原理有关，它是研究弹性体动力学的一个重要理论基础。

弹性体因受力发生形变，而内部产生应变和应力，这时体内具有一定弹性形变势能，其单位体积的形变势能或称比能为

$$W=\frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx}+\tau_{xy}\gamma_{xy}\right) \tag{1.22}$$

它与六个应变分量和六个应力分量有关。代入式（1.5）它可单独用应变分量表示为

$$W=W(\varepsilon_{ij})=\frac{1}{2}\left[2G\frac{(1-\nu)}{1-2\nu}e^2-G(4\varepsilon_x\varepsilon_y+4\varepsilon_y\varepsilon_z+4\varepsilon_z\varepsilon_x-\gamma_{yz}^2-\gamma_{zx}^2-\gamma_{xy}^2)\right] \tag{1.23}$$

代入式（1.3），它可单独用应力分量表示为

$$W=W(\varepsilon_{ij})=\frac{1}{2E}[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-2\nu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)$$
$$+2(1+\nu)(\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2+\tau_{xy}^2)] \tag{1.24}$$

将比能表达式（1.23）在整个弹性体内积分，并代入式（1.6），（1.1），可得弹性体形变势能即变形能的一般表达式

$$U=\iiint_V W(u_i)dV = G\iiint_V\Big\{\frac{1-\nu}{1-2\nu}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\Big)^2-2\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\Big)+\frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2+\Big(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\Big)^2$$
$$+\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2\Big]\Big\}dxdydz \tag{1.25}$$

应该注意，弹性体变形能是一个时间的函数。

将式（1.23）对六个应变分量分别微分，并代入应变-应力关系式（1.5），可得格林(Green）关系式

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x}=\sigma_x,\ \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y}=\sigma_y,\ \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z}=\sigma_z,\ \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}}=\tau_{yz},\ \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}}=\tau_{zx},\frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}}=\tau_{xy} \tag{1.26}$$

将式（1.24）对六个应力分量分别微分，并代入应力-应变关系式(1.3),可得卡氏(Castigliano）关系式

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma_x}=\varepsilon_x,\ \frac{\partial W}{\partial \sigma_y}=\varepsilon_y,\ \frac{\partial W}{\partial \sigma_z}=\varepsilon_z,\ \frac{\partial W}{\partial \tau_{yz}}=\gamma_{yz},\ \frac{\partial W}{\partial \tau_{zx}}=\gamma_{zx},\ \frac{\partial W}{\partial \tau_{xy}}=\gamma_{xy} \tag{1.27}$$

弹性体运动时，各点具有速度，因此整体具有动能

$$T=\frac{1}{2}\iiint_V \rho\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2+\Big(\frac{\partial v}{\partial t}\Big)^2+\Big(\frac{\partial w}{\partial t}\Big)^2\Big]dxdydz \tag{1.28}$$

在弹性体动力学中，与弹性力学的最小势能原理相应的位移变分原理为哈密尔顿（Hamilton）原理。它表明从t_0状态到t_1状态过程中满足位移边界条件（1.10）的所有几何可能运动状态中真正运动状态满足

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T-U)dt+\int_{t_0}^{t_1}\iiint_V(K_x\delta u+K_y\delta v+K_z\delta w)dVdt$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\iint_{S_F}(F_x\delta u+F_y\delta v+F_z\delta w)dsdt=0 \tag{1.29}$$

式中动能T，变形能U分别见式（1.28），（1.25），K_x，K_y，K_z为体积力分量，F_x，F_y，F_z为给定力边界条件面S_F上作用的面载荷分量。

将式（1.29）经变分运算及分部积分[292]可得到下列方程

$$\iiint_V\Big[\Big(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+K_x-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big)\delta u$$
$$+\Big(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+K_y-\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\Big)\delta v$$
$$+\Big(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+K_z-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\Big)\delta w\Big]dV$$
$$+\iint_{S_F}[(l\sigma_x+m\tau_{yx}+n\tau_{zx}-F_x)\delta u+(l\tau_{xy}+m\sigma_y+n\tau_{zy}-F_y)\delta v$$
$$+(l\tau_{xz}+m\tau_{yz}+n\sigma_z-F_z)\delta w]ds=0 \tag{1.30}$$

上式中几何可能位移δu，δv，δw在体内及给定力边界条件上是任意的，因此必然有其前面的每个括号为零才能使式（1.30）成立，这就是§1.2中的运动方程（1.7）及力边界条件（1.9）。因此位移变分原理（1.29）保证满足位移边界条件的几何可能位移也满足运动方程及力边界条件，显然这种运动状态是真正解，也就是说式（1.29）是和运动方程及力边界

条件是等价的。因此满足位移边界条件的位移解可以通过变分方程（1.29）来求取真正解，而不需要满足§1.2中所列各基本微分方程。

在弹性体动力学中，还存在二种广义变分原理：以位移、应力为自变函数的二类变量广义变分原理[221]和以位移、应变、应力为自变函数的三类变量广义变分原理。[267][324]

位移、应力变分原理认为从t_0状态到t_1状态中，与真正运动状态相应的位移、应力分量满足

$$
\begin{aligned}
&\delta\int_{t_0}^{t_1}\Big\{T+\iiint_V W(\sigma_{ij})dV-\iiint_V\Big[\sigma_x\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial v}{\partial y}+\sigma_z\frac{\partial w}{\partial z}+\tau_{yz}\Big(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\Big)\\
&\qquad+\tau_{zx}\Big(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\Big)+\tau_{xy}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\Big]dV\Big\}dt\\
&\qquad+\int_{t_0}^{t_1}\iiint_V(K_x\delta u+K_y\delta v+K_z\delta w)dV\,dt\\
&\qquad+\int_{t_0}^{t_1}\iint_{S_F}(F_x\delta u+F_y\delta v+F_z\delta w)ds\,dt+\delta\int_{t_0}^{t_1}\iint_{S_u}[(l\sigma_x+m\tau_{yx}+n\tau_{zx})\\
&\qquad\cdot(u-\bar{u})+(l\tau_{xy}+m\sigma_y+n\tau_{zy})(v-\bar{v})\\
&\qquad+(l\tau_{xz}+m\tau_{yz}+n\sigma_z)(w-\bar{w})]ds\,dt=0
\end{aligned}
\tag{1.31}
$$

式中动能T及用应力表达的比能$W(\sigma_{ij})$ 分别见式（1.28），（1.24），$\bar{u}$，$\bar{v}$，$\bar{w}$为给定位移边界条件而S_u上的给定位移分量。式（1.31）等价于运动方程，位移-应力关系及力、位移边界条件，因此对于所取任意位移、应力解可以通过变分方程（1.31）来求取真正解，而不需要满足§1.2中所列各基本方程及条件。

位移、应变、应力变分原理认为从t_0状态到t_1状态中，与真正运动状态相应的位移、应变、应力分量满足

$$
\begin{aligned}
&\delta\int_{t_0}^{t_1}\Big\{T-\iiint_V W(\varepsilon_{ij})dV-\iiint_V\Big[\sigma_x\Big(\frac{\partial u}{\partial x}-\varepsilon_x\Big)+\sigma_y\Big(\frac{\partial v}{\partial y}-\varepsilon_y\Big)+\sigma_z\Big(\frac{\partial w}{\partial z}-\varepsilon_z\Big)\\
&\qquad+\tau_{xy}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-\gamma_{xy}\Big)+\tau_{yz}\Big(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}-\gamma_{yz}\Big)\\
&\qquad+\tau_{zx}\Big(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}-\gamma_{zx}\Big)\Big]dV\Big\}dt\\
&\quad+\int_{t_0}^{t_1}\iiint_V\Big(K_x\delta u+K_y\delta v+K_z\delta w\Big)dV\,dt\\
&\quad+\int_{t_0}^{t_1}\iint_{S_F}(F_x\delta u+F_y\delta v+F_z\delta w)ds\,dt\\
&\quad+\delta\int_{t_0}^{t_1}\iint_{S_u}[(l\sigma_x+m\tau_{yx}+n\tau_{zx})(u-\bar{u})+(l\tau_{xy}+m\sigma_y+n\tau_{zy})(v-\bar{v})\\
&\quad+(l\tau_{xz}+m\tau_{yz}+n\sigma_z)(w-\bar{w})]ds\,dt=0
\end{aligned}
\tag{1.32}
$$

式中动能T及用应变表达的比能$W(\varepsilon_{ij})$分别见式(1.28)，(1.23)。式（1.32）等价于运动方程、物理方程、几何方程及力、位移边界条件，因此对于所取任意位移、应变、应力解可以通过变分方程（1.32）来求取真正解，而不需要满足§1.2中所列各基本方程及条件。

§1.4 弹性体动力学积分方程

对于弹性体动力问题的数学描述，除了上面二节所述的微分方程与变分方程外，还有一种积分方程的形式[294]。这是用三种不同数学手段来描述同一物理现象的具体应用。

对于具有一定几何约束的弹性域V上两点（x, y, z）及（ξ, η, ζ）存在位移影响函数族：$k_{x\xi}$, $k_{x\eta}$, $k_{x\zeta}$, $k_{y\xi}$, $k_{y\eta}$, $k_{y\zeta}$, $k_{z\xi}$, $k_{z\eta}$, $k_{z\zeta}$。它们均是x, y, z, ξ, η, ζ的函数，其中$k_{x\xi}$表示在点（ξ, η, ζ）上作用x向单位强度力而在点（x, y, z）引起u位移，余则类推。它们均是在区域V内有限的连续函数，而且包含弹性体的表面域。

对于线弹性体，在包括面载荷在内的外力分量K_ξ, K_η, K_ζ及惯性力作用下，根据叠加原理，各点位移应为

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z,t)=\iiint_V\Big\{&k_{x\xi}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big[K_\xi(\xi,\eta,\zeta,t)-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,\eta,\zeta,t)\Big]\\
&+k_{x\eta}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big[K_\eta(\xi,\eta,\zeta,t)-\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\xi,\eta,\zeta,t)\Big]\\
&+k_{x\zeta}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big[K_\zeta(\xi,\eta,\zeta,t)-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\xi,\eta,\zeta,t)\Big]\Big\}d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned}
\tag{1.33a}
$$

$$
\begin{aligned}
v(x,y,z,t)=\iiint_V\Big\{&k_{y\xi}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big[K_\xi(\xi,\eta,\zeta,t)-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,\eta,\zeta,t)\Big]\\
&+k_{y\eta}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big[K_\eta(\xi,\eta,\zeta,t)-\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\xi,\eta,\zeta,t)\Big]\\
&+k_{y\zeta}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big[K_\zeta(\xi,\eta,\zeta,t)-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\xi,\eta,\zeta,t)\Big]\Big\}d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned}
\tag{1.33b}
$$

$$
\begin{aligned}
w(x,y,z,t)=\iiint_V\{&k_{z\xi}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)[K_\xi(\xi,\eta,\zeta,t)-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,\eta,\zeta,t)]\\
&+k_{z\eta}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)[K_\eta(\xi,\eta,\zeta,t)-\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\xi,\eta,\zeta,t)]\\
&+k_{z\zeta}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)[K_\zeta(\xi,\eta,\zeta,t)\\
&-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\xi,\eta,\zeta,t)]\}d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned}
\tag{1.33c}
$$

上述方程中积分号下包含有未知位移函数，因此这是一个积分方程组。根据弹性力学的位移互等原理，积分核是对称的，所以弹性体动力学问题应满足一组具有对称核的线性积分方程，对于自由振动问题是一组线性齐次积分方程。

§1.5 弹性体振动分析的基本方法

对于不同类型的弹性体构件，其基本方程及振动解的形式有很大差别，但求解步骤和方法是完全类似的，具有共同的一般规律。下面各章将详细叙述板与壳两类结构的振动分析方法，内容较多，为了便于了解其分析的思路，这里将先以比较简单和熟悉的杆件振动分析为

例，来说明弹性体振动分析的一般过程，以利于进一步掌握较为复杂的板壳构件振动分析方法。

图1.1所示等截面杆的纵向振动基本方程为

$$EF\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho F\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+q(x,t)=0 \tag{1.34}$$

其中，EF为轴向刚度，ρF为单位长度杆的质量，$u(x,t)$为截面纵向位移，$q(x,t)$为单位长度杆上纵向外载。边界条件为

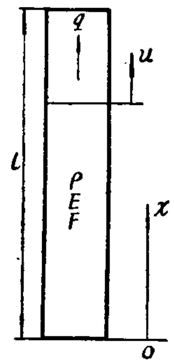

图 1.1

固定端：　$x=x_0$，　$u(x_0,t)=0$　　(1.35a)

自由端：　$x=x_0$，　$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,t)=0$　　(1.35b)

初始条件为

$$t=0:\quad u(x,0)=u_0(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\dot{u}_0(x) \tag{1.36}$$

为求解固有振动，可设解

$$u(x,t)=U(x)\sin(\omega t+\varphi) \tag{1.37}$$

代入自由振动方程，相当方程（1.34）中取$q=0$，即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad a^2=\frac{E}{\rho} \tag{1.38}$$

得$U(x)$满足的方程

$$\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{\omega^2}{a^2}U=0 \tag{1.39}$$

二次常微分方程（1.39）的解为

$$U(x)=A\sin\frac{\omega}{a}x+B\cos\frac{\omega}{a}x \tag{1.40}$$

其中待定系数A,B取决于杆件两端二个边界条件。例如两端自由，由$x=0$及$x=l$处

$\frac{\partial u}{\partial x}=0$，即$\frac{dU}{dx}=0$得

$$A\frac{\omega}{a}+B\cdot 0=0 \tag{1.41a}$$

$$A\frac{\omega}{a}\cos\frac{\omega}{a}l-B\frac{\omega}{a}\sin\frac{\omega}{a}l=0 \tag{1.41b}$$

这是关于A，B的齐次线代方程组，为求得非零解，则其系数行列式必为零，从而建立频率方程

$$\sin\frac{\omega}{a}l=0 \tag{1.42}$$

由其解得固有频率

$$\omega_n=\frac{n\pi a}{l}=\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\quad(n=1,2,3,\cdots) \tag{1.43}$$

代回式（1.41）得$A=0$，$B\neq 0$。则根据式（1.40）有相应固有振型

$$U_n(x)=B_n\cos\frac{n\pi}{l}x \tag{1.44}$$