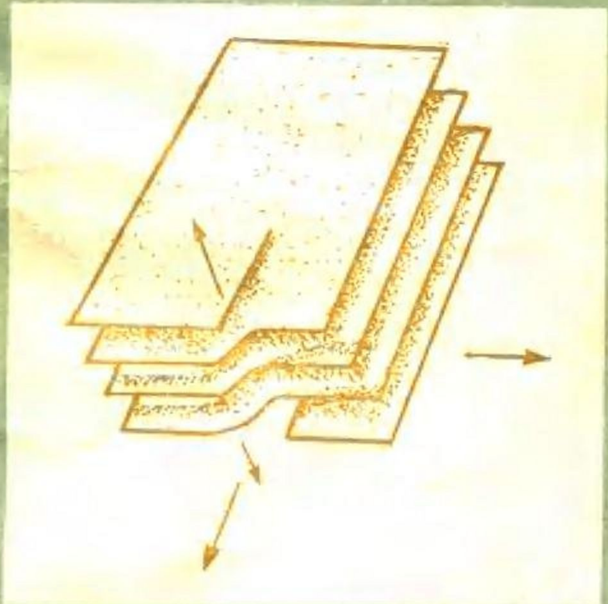
师范专科学校试用教材

复变函数

钟玉泉 编



高等教育出版社

师范专科学校试用教材

复变函数

钟玉泉 编

高等教育出版社

本书是编者根据师专数学专业《复变函数教学大纲》要求，以编者1979年出版的《复变函数论》一书为基础改编成的。改编中，注意了师专特点，调整、充实了例、习题；每章末增写了内容小结；各章习题按内容顺序编排，大都附有答案或提示。

本书阐述细致，范例较多，通俗易懂，便于自学。可作师范专科学校数学专业试用教材或业余自学用书。

师范专科学校试用教材

复 变 函 数

钟玉泉 编

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北 京 印 刷 一 厂 印 装

开本 850×1168 1/32 印张8.5 字数205,000
1984 年 3 月第 1 版 1984年 8 月第 1 次印刷
印数 00,001—20,500
书号 13010·0982 定价 1.30 元

序

1982年10月，教育部在昆明召开师范专科学校数学专业课程教学大纲审订会，我应邀参加审订《复变函数教学大纲》，会末又受命编写这本教材．现就与编写有关的一些情况说明如下：

1. 本书是我编《复变函数论》（人民教育出版社1979年版）的改编本．根据师专《复变函数教学大纲》的要求，保留了原书的主要内容，删去了或缩减了某些繁难的内容，把重点放在加强基本理论和基本方法上．

2. 复变函数是数学专业的基础课，又是数学分析的后继课．本书除注意该学科的系统性、科学性和一定程度的严谨性外，还认真考虑师专特点，力求使内容通俗易懂；突出与中学教学实际的联系；进一步充实例题与习题．

3. 各章习题是按内容顺序编排的，教师每讲完一次课均可给学生选指习题．习题大都附有答案或提示，便于读者自学．

4. 每章末的小结是便于读者自学用的，仅供教师参考．教师可以根据自己的教学实际进行各章的小结和总结．

5. 加“*”号的内容和习题，教师可以根据实际情况适当取舍．

6. 使用本书作教材时，各章的讲授（习题）学时大体可按8(2)，12(2)，10(2)，16(2)，8(2)，10(2)，4来分配，借以控制教学内容和进度．必要时，有的次要内容或例题就可以留给学生自学．

根据教育部的委托，李锐夫教授在华东师范大学主持召开了对本书初稿的审稿会，出席代表还有华东师大、上海师院、万县师专、天津师专、常德师专和江津师专的六位教学经验丰富的教师和

高教出版社的一位编辑同志.所有出席会议的代表,都对初稿逐章逐节地进行了认真的讨论,并提出了许多宝贵的意见,使原稿有了较大的改进和提高,编者在此特向他们表示衷心的感谢.李锐夫教授年逾八旬高龄,虽然肩负繁重的校领导工作,仍以一丝不苟、严肃负责的精神主持开好了这个审稿会,使编者深受感动和敬佩.

限于编者水平,谬误之处仍然难免,敬请老师们和读者们提出批评指正。

编　者

于四川大学数学系

1983.12.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　录

引　言

我们知道，在解实系数一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$$

时，如果判别式 $b^2-4ac<0$，就会遇到负数开平方的问题．最简单的一个例子，是在解方程

$$x^2+1=0$$

时，就会遇到 -1 开平方的问题．

十六世纪中叶，意大利卡尔丹(Cardan, 1545)在解三次方程时，首先产生了负数开平方的思想．他把 40 看作 $5+\sqrt{-15}$ 与 $5-\sqrt{-15}$ 的乘积，然而这只不过是一种纯形式的表示而已．当时，谁也说不上这样表示究竟有什么好处．

为了使负数开平方有意义，也就是要使上述这类方程有解，我们需要再一次扩大数系，于是，就引进了虚数，使实数域扩大到复数域．但最初，由于对复数的有关概念及性质了解得不清楚，用它们进行计算又得到一些矛盾，因而，长期以来，人们把复数看作不能接受的"虚数"．直到十七世纪和十八世纪，随着微积分的发明与发展，情况才逐渐有了改变．另外的原因，是由于这个时期复数有了几何的解释，并把它与平面向量对应起来解决实际问题的缘故．

关于复数理论最系统的叙述，是由瑞士数学家欧拉(Euler)作出的．他在 1777 年系统地建立了复数理论，发现了复指数函数和三角函数间的关系，创立了复变函数论的一些基本定理，并开始把它们用到水力学和地图制图学上．用符号"i"作为虚数的单位，也是他首创的．此后，复数才被人们广泛承认和使用．

在复数域内考虑问题往往比较方便．例如，一元 n 次方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0\quad(a_0\neq 0),$$

其中系数 a_0、a_1、…、a_n 都是复数，在复数域内恒有解．这就是著名的代数学基本定理，它用复变函数理论来证明，是非常简洁的．又如，在实数域内负数的对数无意义，而在复数域内，我们就可以定义负数的对数．再如，在通常的"实"解析几何之外，又有"复"解析几何，它所讨论的是一次和二次方程的性质，这些方程的系数和变数都假定取的是复数值．

在十九世纪，复变函数的理论经过法国数学家柯西(Cauchy)、德国数学家黎曼(Riemann)和维尔斯特拉斯(Weierstrass)的巨大努力，已经形成了非常系统的理论，并且深刻地渗入到代数学、解析数论、微分方程、概率统计、计算数学和拓扑学等数学分支；同时，它在热力学、流体力学和电学等方面也有很多的应用．

二十世纪以来，复变函数已被广泛地应用在理论物理、弹性理论和天体力学等方面，与数学中其它分支的联系也日益密切．致使经典的复变函数理论，如整函数与亚纯函数理论、解析函数的边值问题等有了新的发展和应用．并且，还开辟了一些新的分支，如复变函数逼近论、黎曼曲面、单叶解析函数论、多复变函数论、广义解析函数论和拟保形变换等．另外，在种种抽象空间的理论中，复变函数还常常为我们提供新思想的模型．

复变函数研究的中心对象是所谓解析函数，因此，复变函数论又称为解析函数论．

复变函数是我国数学工作者从事研究最早也最有成效的数学分支之一．我国老一辈的数学家在单复变函数及多复变函数方面做过许多重要的工作，不少成果均已达到当时的国际水平．而今，在他们的热忱帮助下，我国许多中青年数学工作者，正在健康成长，不少人已在数学的各个领域中做出了许多优异的成绩．

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　复数与复变函数

复变函数就是自变量为复数的函数. 我们研究的主要对象, 是在某种意义下可导的复变函数, 通常称为解析函数. 为建立这种解析函数的理论基础,在这一章中,我们首先引入复数域与复平面的概念. 其次引入复平面上的点集、区域、约当曲线以及复变函数的极限与连续等概念.

§1. 复　　数

1. 复数域 形如

$$z=x+iy \quad \text{或} \quad z=x+yi$$

的数,称为复数,其中 x 和 y 是任意的实数, i 合于 $i^2=-1$, 称为虚单位. 实数 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部,常记为:

$$x=\mathrm{Re}z, \quad y=\mathrm{Im}z$$

复数 $z_1=x_1+iy_1$ 及 $z_2=x_2+iy_2$ 相等, 是指它们的实部与实部相等,虚部与虚部相等,即

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2$$

必须且只须

$$x_1=x_2; \quad y_1=y_2.$$

虚部为零的复数就可看作实数, 即 $x+i\cdot 0=x$; 因此, 全体实数是全体复数的一部分. 特别, $0+i\cdot 0=0$.

虚部不为零的复数称为虚数; 实部为零且虚部不为零的复数称为纯虚数.

复数 $x+iy$ 和 $x-iy$ 称为互为共轭复数, 即 $x+iy$ 是 $x-iy$ 的共轭复数,或 $x-iy$ 是 $x+iy$ 的共轭复数. 复数 z 的共轭复数常

记为$\bar{z}$. 于是

$$x-iy=\overline{x+iy}.$$

对于这样定义的复数. 我们必须规定其运算方法. 由于实数是复数的特例,规定复数运算的一个基本要求是: 复数运算的法则施行于实数特例时,能够和实数运算的结果相符合,同时也要求复数运算能够满足实数运算的一般定律.

复数的加(减)法可按实部与实部相加(减), 虚部与虚部相加(减). 即复数 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$ 相加(减)的法则是:

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2),$$

结果仍是复数. 我们称复数 z_1+z_2 是复数 z_1 与 z_2 的和, 称复数 z_1-z_2 是复数 z_1 与 z_2 的差.

复数的加法遵守交换律与结合律,而且减法是加法的逆运算,这些都很容易验证.

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 及 $z_2=x_2+iy_2$ 相乘, 可按多项式乘法法则进行,只须将结果中的 i^2 换成 -1,即

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2),$$

结果仍是复数, 我们称它为 z_1 与 z_2 的积.

也易验证,复数的乘法遵守交换律与结合律,且遵守乘法对于加法的分配律.

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 及 $z_2=x_2+iy_2$ 相除(除数$\neq 0$)时,可先把它写成分式的形式,然后分子分母同乘以分母的共轭复数,再进行简化,即

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad(z_2\neq 0),$$

结果仍是复数, 我们称它为 z_1 与 z_2 的商. 这里除法是乘法的逆运算.

全体复数并引进上述运算后就称为复数域. 在复数域内, 我

们熟知的一切代数恒等式，如象

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

等等，仍然成立．实数域和复数域都是代数学中所研究的“域”的实例．和实数域不同的是，在复数域中不能规定复数的大小．比如，我们能说 $2+3i\neq5-4i$，但我们就不能得出 $2+3i<5-4i$ 或 $2+3i>5-4i$ 的结论．

2．复平面 一个复数 $z=x+iy$ 本质上由一对有序实数 (x, y) 唯一确定．于是能够建立平面上全部的点和全体复数间一一对应的关系．换句话说，我们可以借助于横坐标为 x、纵坐标为 y 的点来表示复数 $z=x+iy$（图 1.1）．

由于 x 轴上的点对应着实数，故 x 轴称为实轴；y 轴上的非原点的点对应着纯虚数，故 y 轴称为虚轴．这样表示复数 z 的平面称为复平面或 z 平面．

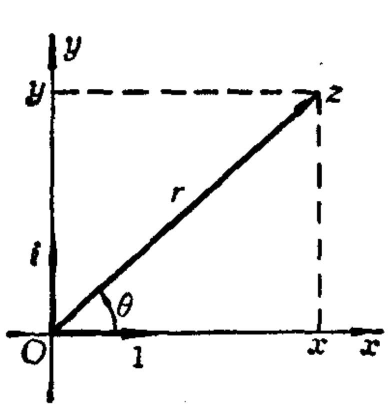


图 1.1

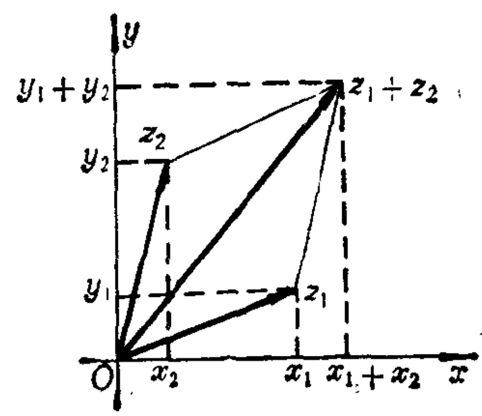


图 1.2

引进了复平面之后，我们在“数”和“点”之间建立了联系．以后在研究复变函数时，常可借助于几何直观，还可采用几何术语．这也为复变函数应用于实际提供了条件，丰富了复变函数论的内容．为了方便起见，今后我们不再区分“数”和“点”、“数集”和“点集”，说到“点”可以指它所代表的“数”，说到“数”也可以指这个数

代表的"点". 例如,我们常说"点 $1+i$","顶点为 z_1, z_2, z_3 的三角形"等等.

在复平面上,从原点到点 $z=x+iy$ 所引的向量与这个复数 z 也构成一一对应关系(复数 0 对应着零向量),这种对应关系使复数的加(减)法与向量的加(减)法之间保持一致.

例如,设 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$,则

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

由图 1.2 可以看出,z_1+z_2 所对应的向量,就是 z_1 所对应的向量与 z_2 所对应的向量的和向量.

又如,将 z_1-z_2 表成 $z_1+(-z_2)$,可以看出,z_1-z_2 所对应的向量就是 z_1 所对应的向量与 $(-z_2)$ 所对应的向量的和向量,也就是从 z_2 到 z_1 的向量(图 1.3).

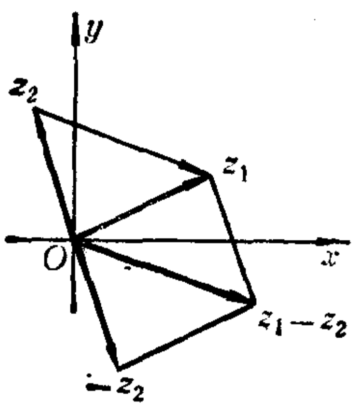


图 1.

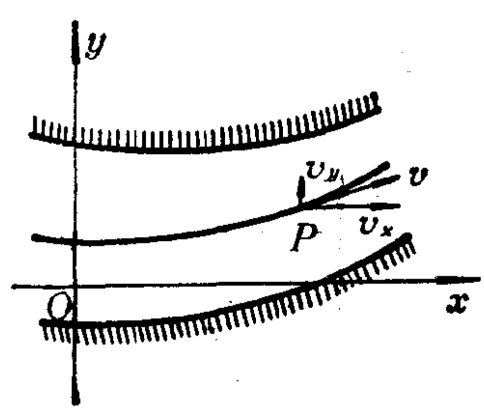


图 1.4

例 1.1 考虑一条江面上的水在某时刻的流动. 假定在江面上取好一坐标系 xOy,我们把江面上任意一点 P 的速度 v 的两个分量记为 v_x 与 v_y,则我们可以把速度向量 v 写成复数(图 1.4)

$$v=v_x+iv_y$$

人们经过长期的摸索与研究发现,对于很多的平面问题(如流体力学与弹性力学中的平面问题等)来说,用复数及复变函数作工具是十分有效的,这正是由于复数可以表示平面向量的缘故.

3. 复数的模与辐角 表示复数 z 的位置，也可以借助于点 z 的极坐标 r 和 θ 来确定(图 1.1)。

上面我们用向量 $\overrightarrow{Oz}$ 来表示复数 $z=x+iy$，其中 x, y 顺次等于 $\overrightarrow{Oz}$ 沿 x 轴与 y 轴的分量. 向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度称为复数 z 的模或绝对值，以符号 $|z|$ 或 r 表示，因而有

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0.$$

这里引进的模的概念与对于实数的绝对值的概念是一致的. 由于复数 z 的模 $|z|$ 是非负实数，所以能够比较大小.

根据图 1.1，我们有不等式

$$|x|\leqslant|z|,\ |y|\leqslant|z|,\ |z|\leqslant|x|+|y|. \tag{1.1}$$

根据图 1.2，我们有不等式

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|, \tag{1.2}$$

(三角形两边之和≥第三边)

它称为三角不等式. 等号成立的几何意义是：复数 z_1、z_2 与 z_1+z_2 所表示的三个向量共线且同向. 此外，根据图 1.3，我们还有不等式

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|. \tag{1.3}$$

(三角形两边之差≤第三边)

由图 1.3 可见，$|z_1-z_2|$ 表示点 z_1 与点 z_2 的距离，记为

$$d(z_1, z_2)=|z_1-z_2|.$$

二复数差的模的这个几何意义是非常重要的. 它还可以借助解析几何中两点间的距离公式用解析方法得出：

$$\begin{aligned}|z_1-z_2|&=|(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)|\\&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\end{aligned}$$

实轴正向到非零复数 $z=x+iy$ 所对应的向量 $\overrightarrow{Oz}$ 间的夹角 θ

合于

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x},$$

称为复数 z 的辐角(Argument)，记为

$$\theta=\operatorname{Arg}z.$$

我们知道，任一非零复数 z 有无穷多个辐角，今以 $\arg z$ 表其中的一个特定值，并称合条件

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi \tag{1.4}$$

的一个为 $\operatorname{Arg}z$ 的主值，或称之为 z 的主辐角．于是

$$\theta=\operatorname{Arg}z=\arg z+2k\pi. \tag{1.5}$$

$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

注意 当 $z=0$ 时，其模为零，辐角无意义．

当 $\arg z(z\neq0)$ 表 z 的主辐角时，它与反正切 $\operatorname{Arctg}\dfrac{y}{x}$ 的主值 $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ 有如下关系(图 1.5, 1.6)：

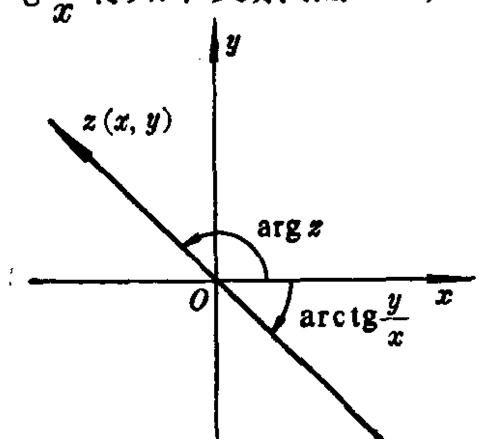


图 1.5

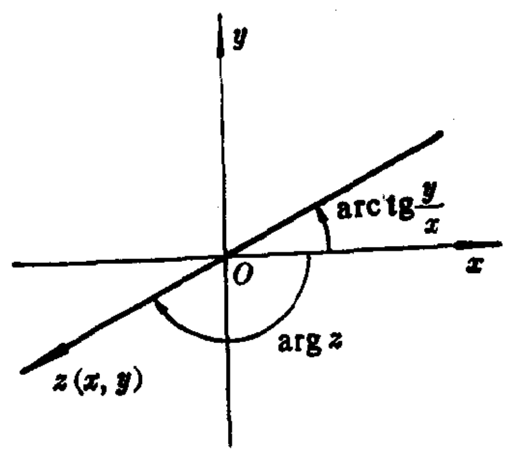


图 1.6

$$\underset{(z\neq0)}{\arg z}=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{当 } z \text{ 在第一象限时,}\\[2mm] \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi & \text{当 } z \text{ 在第二象限时,}\\[2mm] \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\pi & \text{当 } z \text{ 在第三象限时,}\\[2mm] \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{当 } z \text{ 在第四象限时,}\end{cases}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com