# 画法几何

張士权　主編

北京航空學院出版社

# 画法几何

張士权 主編



北京航空學院出版社

## 内 容 简 介

本书为北京航空学院本科机械类专业的教材。内容有：投影基本知识、点和直线、平面、几何元素相对位置、投影变换、平面立体、曲线和曲面、基本旋转体、平面和曲面相交、曲面和曲面相交、切平面和空间轨迹、轴测投影、图解计算、透视投影。全书除突出讲述图示法和图解法之外，对图解计算和透视投影也作了介绍。本书应和卢树森主编的《画法几何习题集》配套使用。


**画 法 几 何**

张士权　主编

责任编辑　张　乔　曾昭奇

北京航空学院出版社出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

北京航空学院印刷厂印装

※

787×1092　1/16　印张：11.75　字数：300　千字

1987年9月第一版　1987年9月第一次印刷　印数：11760 册

ISBN 7-81012-007-7 / TB·002　定价：1.75元

# 前　言

自我院建立以来，画法几何课程教学内容的变动是曲折的。但总的看来，随着教学水平的逐步提高，在针对性和综合性两方面都大有加强。一九八二年，教研室部分教师回顾了以往的教学情况，编写了供54学时使用的《画法几何》教材和配套的《画法几何习题集》，自一九八三年起在我院使用至今，得到同学的好评，并获得我院一九八四年度教材一等奖。现在，以它为基础，修订成这套教材。

画法几何诚然是工程制图的基础，但它不应停留于此，还应负担起培养空间思维及逻辑推理能力的任务。因此，在课程中不仅要让学生具有如本书第十章所示复杂组合体的图示能力，而且还应具有如第四章和第十一章所要求的分析和综合能力。

由于图解法精度有限，和数值计算结合将能更好地发挥作用，书中第十三章介绍了形数结合的基础知识。

为适应计算机图学的需要，这次增加了透视投影一章。

使用本教材时，应和卢树森主编的《画法几何习题集》配套。

参加编写者分工如下：郑远燎（第二、三、四章），于长江（第一、五、十一、十三、十四章），张士权（第七、十二章），卢树森（第六、八章），余新耀（第九，十章）。全部插图由梅冰清描绘。

我们相信，在新技术不断涌现的今天，作为工程图学基础的画法几何仍将继续发挥其应起的作用。

编　者

一九八六年八月

于北京航空学院

# 目　录

# 第一章　绪　　论

## §1　研究对象及学习目的

### 一、画法几何的研究对象

在工业生产实践中，需要将生产意图和设计思想表达确切。对于简单的事物用语言或文字便可以叙述清楚了，但是对于较为复杂的产品，仅仅依靠语言和文字的描述来生产，就不可能达到技术上的要求，或者根本制造不出来。因此，在技术上需要一种特殊的语言，那就是图样。设计者将产品形状、大小及各部分之间的相互关系和技术上的要求，都精确地表达在图样上；施工者根据图样要求进行加工，产品就可以正确地制造出来了。

为此，绘图时必须遵循一定的理论、规律和方法。这些将空间形体表现为平面图形的理论和方法便是本课程的研究对象。如果将图样看作是工程的语言，那么画法几何便是这种语言的语法。

任何形体都是由点、线（直线、曲线）、面（平面、曲面）等几何元素构成的，它们之间的几何关系（平行、垂直、相交等），即形体之各部分的几何相关。将空间诸元素及其相关表现在平面图上的方法是画法几何特有的投影法。因此，可以说画法几何是研究：①空间几何元素在平面上的表示方法和规律；②并以其影象为依据，如何在平面图上解决空间几何问题的学科。前者简称为图示法，后者为图解法。

### 二、学习画法几何的目的

(1)　首先为画图和读图提供理论基础。

(2)　学习在平面图上图解几何元素之间度量问题。例如：

①　定形问题　已知形状和大小，并按其空间方位作出其投影；或依据投影确定其形状和大小。

②　定位问题　按元素间的空间相对位置（如相交、平行、从属、垂直等）正确作图；或根据投影图确定其距离、角度、方位等问题。

(3)　培养空间概念，发展空间想象能力和构思能力。

(4)　训练逻辑分析和推理能力。

(5)　为其它技术学科的学习服务。例如：

①　为理解有关学科的内容提供较为简捷的途径和方法。如理论力学中空间力系的向量图解方法及机械原理中空间机构的图解定位等。

②　为技术学科提供空间思维，以加强空间概念及抽象构思能力。

## §2　投影方法简介

图示法是图解法的基础，而投影方法又是图示理论的工具。

### 一、投影方法

形体的图象是通过投影的方法得到的。

例如空间一点$A$，按照给定的方式，过$A$点向平面$H$引直线$l$；$l$与$H$平面的交点$a$则称为$A$点在$H$平面上的投影，$H$称为投影面，$l$称为投影线。如图 1-1 所示。

一般较为常用的投影方式有两种：

**1. 中心投影**

过空间所有点的投影线都通过空间一定点$S$（称为投影中心），它们在投影面上的投影称为中心投影（如图 1-1 所示）。

**2. 平行投影**

如果投影中心沿某个方向移到无穷远，则所有投影线皆互相平行。用这种方式得到的投影称为平行投影。当投影方向$S$与投影面垂直时称为正投影（图1-2($a$)），否则称为斜投影（图1-2($b$)）。

中心投影符合人的视觉，多用于绘画；而平行投影，相对来说作图较为简单，尤其是正投影便于度量，故普遍应用于机械制造。画法几何就是以正投影为基础的。

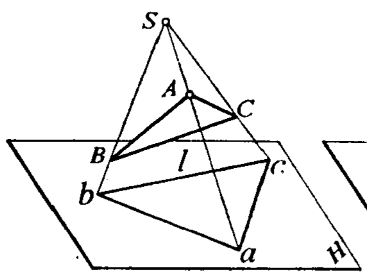
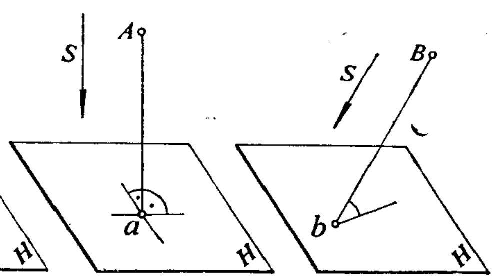



图 1-1




($a$) ($b$)

图 1-2

## §3 平行投影的几何性质

不论是斜投影还是正投影，一般位置的平面图形经过平行投影，其形状和大小都要发生变化。简言之，长度和角度的投影都是变量；由于它们相对于投影面的位置不同，它们的投影也因之而异。为了从投影来研究其空间原形的几何性质，就需要掌握有哪些几何性质在平行投影下是不变的。这对于学习本课程是非常重要的。

### 一、平行投影的几何不变性

**1. 单值同素性**

一般来说，点的投影是点，线段的投影仍然是线段。空间元素和其投影是一一对应的（图1-3），$A$点对应于它在$H$面上唯一的投影$a$；线段$BC$对应于它在$H$面上的投影$bc$。故称为单值同素性。

**2. 从属性**

线上的点(图1-3）的投影仍然在该线的投影上，这种从属关系经过投影仍然不变。

3. **平行性**

由立体几何可知，两平行平面被第三平面所截，其交线平行。故此，平行二直线的投影必然平行。如图1-4所示，空间线段$BD \parallel CE$，其投影$bd \parallel ce$。

4. **定比性**

直线上两线段长度之比等于其投影长度之比（图1-3），即$BD/DC=bd/dc$。

两平行线段长度之比等于其投影长度之比（图1-4），即$BD/CE=bd/ce$。

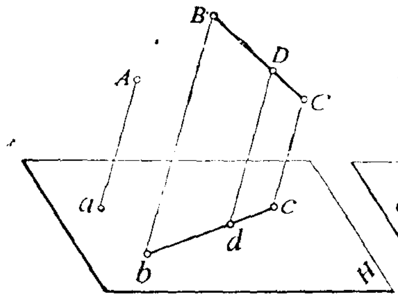



图 1-3

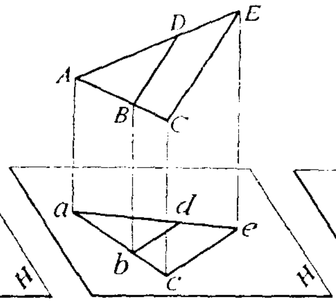



图 1-4

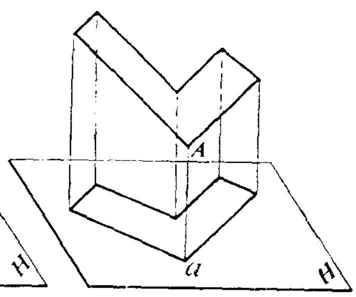



图 1-5

5. **亲似性**

图 1-5 中所给$L$形平面的投影仍然是$L$形；按平行性和定比性变化，其平行边的投影保持平行和定比。但是，由于两组平行边的方向不同，比值也不相同。平面图形的这种性质称为亲似性。亲似不同于相似，最突出的区别就是：相似图形具有保角性，而亲似图形则否（如$\angle A=90°$，$\angle a$ 则为一锐角）。类此，三角形的投影仍然是三角形，二次曲线的投影必为同类型的二次曲线。

## 二、几何元素在特殊位置时的投影特性

1. **积聚性**

当直线平行于投影方向时，则其投影蜕变为一点（图 1-6）；平面图形则蜕变为一直线，如图1-6 中$\triangle ABC$的投影积聚为一线段 $abc$。这种蜕变称为投影的积聚性。

2. **存真性**

一个线段或者一个平面图形的斜投影，可能变长或变大，也可能变短或变小。但是，在正投影时，线段的投影只能小于或等于其实长；平面图形的投影只能小于或等于其原形。

可是当线段或平面图形平行于投影面时，不论斜投影还是正投影，线段的投影长等于实长，平面图形的投影是平面图形的全等形（图 1-7）。这种性质称为存真性。

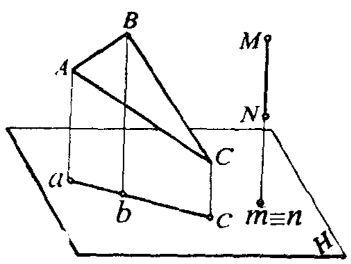



图 1-6

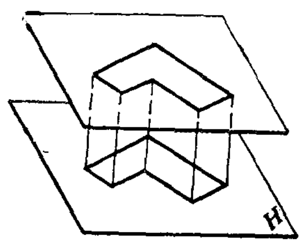



图 1-7

# § 4 工程上常用的几种图示法

掌握投影的不变性，对于画图和读图有很大的帮助。然而，并不能由一个投影来确定几何元素的空间位置，也不能肯定其原形的大小及其几何特征。

为解决上述的几何确定问题，工程上常用以下两种方法来解决：

① 在投影上标出点到投影面的距离。

② 用两个以上的投影来反映点的空间位置，或用以说明线、面的形象及其几何相关。

## 一、标高投影法

标高投影法是在水平投影面上作出点的正投影，并标出点到水平面的高度（图 1-8）。这种方法多用于土建、水利中复杂地形的绘制（图 1-9）。

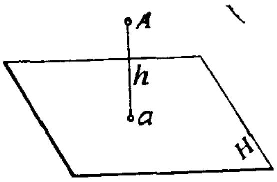



图 1-8

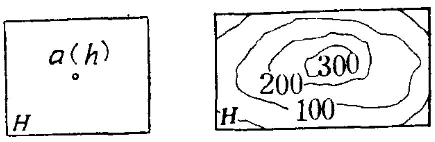



图 1-9

## 二、透视投影法

透视投影法是一种单面的中心投影。取画面$P$垂直于水平面$H$，它们的交线$X$称为基线；视点$S$在$H$面上的正投影$s$称为站点，过视点与$H$平行的视平面与画面交于视平线$h$。通过视点$S$将$A_0$点及其水平投影$a$投影到画面$P$上，得到$A_0$点的透视投影$A'$及次透视投影$A$（图1-10）。这样，在中心投影条件（已知$h$、$X$、$S$）下，由$A'$和$A$即可确定$A_0$的空间位置。图1-11为一简化房屋的透视图。

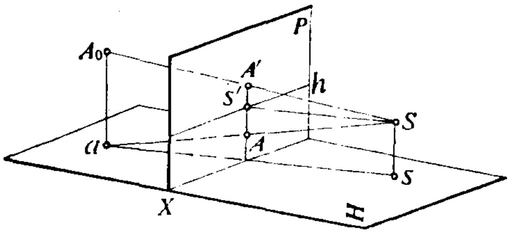



图 1-10

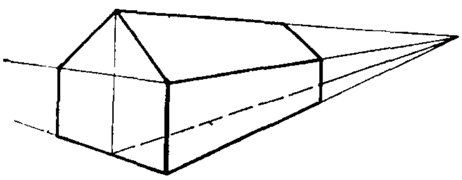


图 1-11

透视图符合人的视觉，故多用于建筑绘画，作为示意图供使用单位选择建筑型式的参考。

## 三、轴测投影法

轴测投影法是一种单面的平行投影，它是将形体连同直角坐标系投影到轴测投影面上（图1-12），也是借助点的轴测投影$A_1$和次投影$A_{1H}$来定位的。

图1-13为一长方体的正轴测图。各对边皆相互平行，显示出平行投影的特性。由于绘制简便，所以是机械工业上常用的一种图示方法。

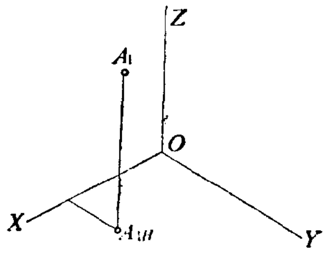



图 1-12

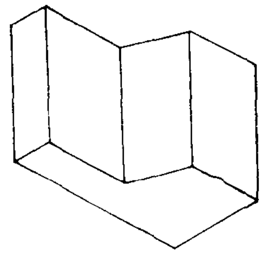


图 1-13

**四、正投影法**

正投影法是一种双面或多面的正投影。将空间的点$A$分别垂直投影到相互垂直的两个投影面$V$和$H$上得到$a'$和$a$；用这两个投影分别说明$A$点到$H$面的高度和距离$V$平面的远近。对于立体，其$V$投影表现出它正面形状和大小，$H$投影表达出它顶面的形象和大小（图1-14）。

为了在一张图纸上展现两个不同平面上的投影，规定以$V$面和$H$面的交线$X$为轴将$H$向下旋转90°与$V$面重合，就得到了图1-15所示的两面投影，也称为综合图。

正投影法将是本课程的主要学习内容。

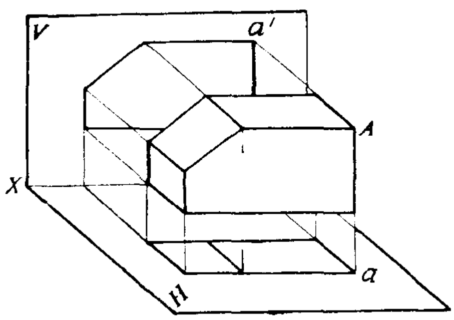



图 1-14

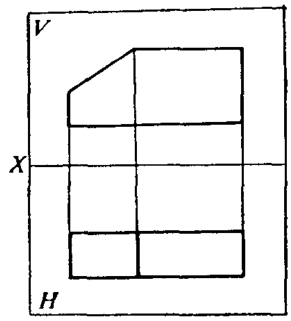



图 1-15

# 第二章　点 和 直 线

在物质世界中，我们所见到和使用的物体，虽然种类很多，各具特定的形式；但是，用几何观点都可以看作由基本几何元素：点、线（直线和曲线）、面（平面和曲面），根据一定的结构要求共同组合而成。因此，在学习空间物体的图示方法之前，必须先学习基本几何元素（点、线、面）的图示方法。

在绪论中，我们已经谈到，空间的点可以按照一定的投影方式（中心投影或平行投影），唯一地确定它在某一个投影面上的投影。反之，只由点的一个投影，却不能唯一确定点的空间位置。为克服投影的这一不可逆性，能够由投影唯一确定点的空间位置，正投影法是采用两个或两个以上的投影面，作出点在不同投影面上的投影，从而确定空间点的位置。

## §1　点在两投影面体系中的投影

### 一、两投影面体系

在空间取两个互相垂直的平面，一个处于正立位置，称为正立投影面，标以符号$V$，简称$V$面；另一个为水平位置，称为水平投影面，符号为$H$，简称$H$面。两投影面的交线，称为投影轴，记以符号$X$。由$V$、$H$二投影面组成两投影面体系，如图 2-1 所示。

$V$和$H$两个投影面，把空间分成为四个部分，每部分称为分角或象角。其划分顺序如图 2-1，分别记为 1 、2 、3 、4 。

空间的点（或物体），可以放置在任意分角内进行投影。工程技术界绘制的图纸，通常是把物体放在第 1 分角或第 3 分角进行投影，即 1 分角画法或 3 分角画法。我国采用的是第 1 分角画法；西方国家（如英、美）则采用第 3 分角画法。

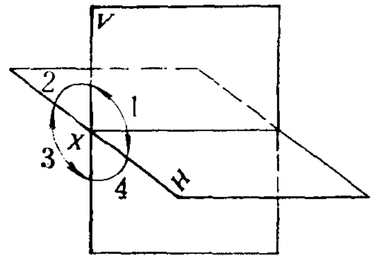
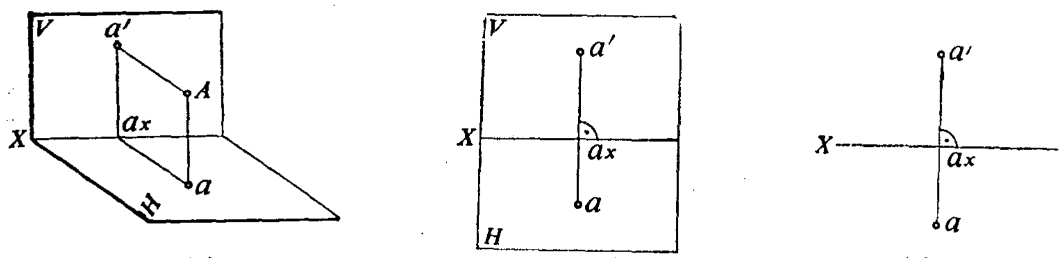


图 2-1

### 二、第1分角内点的投影

设空间一点$A$在第 1 分角内，如图2-2($a$)。自点$A$分别向$H$面和$V$面作垂线，它们和$H$



($a$)　($b$)　($c$)

图 2-2

面、$V$面的交点（垂足），即是点$A$在$H$面和$V$面的投影，分别记为$a$和$a'$。

两条垂线$Aa$和$Aa'$，决定一个矩形平面$Aa a_x a'$。显而易见：$a'a_x = Aa$，它反映$A$点到$H$面的距离，称为$A$点的立标；$aa_x = Aa'$，它反映$A$点到$V$面的距离，称为$A$点的远标。

为了把三维空间的$A$点，表现为二维平面上的图像，规定$V$面不动，将$H$面以$X$轴为旋转轴，其前半部向下转90°，使$H$面与$V$面重合。于是，$A$点的两个投影$a$和$a'$就表现在垂直$X$轴的一条直线上。线段$a'a_x$表示$A$点的立标；线段$aa_x$表示$A$点的远标。如图2-2($b$)。又因投影面$V$和$H$的框线可以略去，于是$A$点的两个投影可以画成图2-2($c$)的形式，即为$A$点的两面投影图。

为什么当$H$和$V$面重合为一平面后，$A$点的两个投影$a$和$a'$就会在垂直$X$轴的一条直线上呢？这是因为矩形平面$Aa a_x a'$，既垂直于$H$面又垂直于$V$面，因而也就垂直于两投影面的交线$X$轴。当$H$面绕$X$轴向下旋转90°后，则$a'a_x$与$a_x a$二直线之间的交角即由90°变成180°。所以，$a'$与$a$二投影之连线即为垂直$X$轴的一条直线。

综上分析，得点的投影规律为：

① $A$点的二投影$a'$与$a$的连线垂直投影轴$X$；

② $a'a_x = Aa$，反映$A$点的立标；$aa_x = Aa'$，反映$A$点的远标。

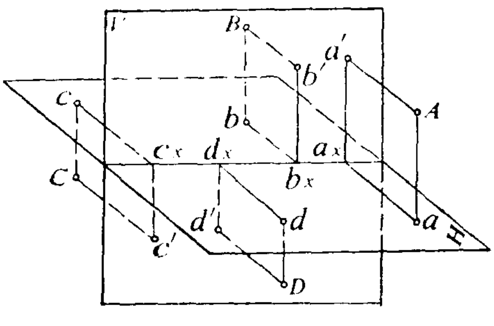
根据点的投影规律，我们可以作出第1分角内任意点的两面投影图。在点的投影图上，虽然见不到空间的点了，但是，有了点的两个投影，把$H$面旋转回去，再自二投影分别作出$V$、$H$二面的垂线，这二垂线的交点就是空间点的所在位置。

由空间点画出它的投影图，再自投影图想象出空间点的位置，这一可逆过程就是画图和看图的基本训练。

为了符号标注的统一，规定：用大写字母$A$、$B$、$C$……表示空间点；用小写字母$a$、$b$、$c$……表示点的$H$面投影；$a'$、$b'$、$c'$……表示点的$V$面投影。

### 三、其他分角内点的投影

如图2-3($a$)，设点$A$、$B$、$C$、$D$分别在1、2、3、4分角内。除第1分角的$A$点外，其余$B$、$C$、$D$各点，也可按照投影规律作出它们的两面投影图。如图2-3($b$)所示。



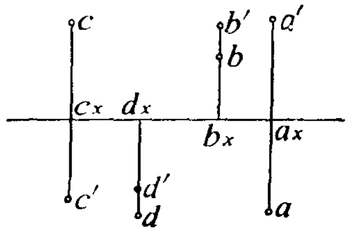
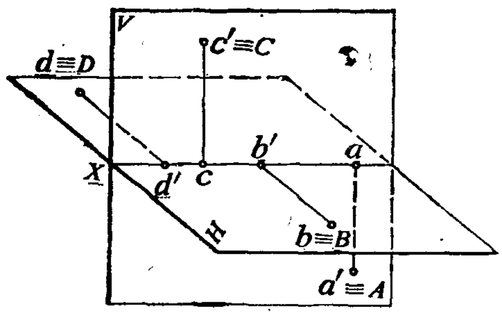




图 2-3

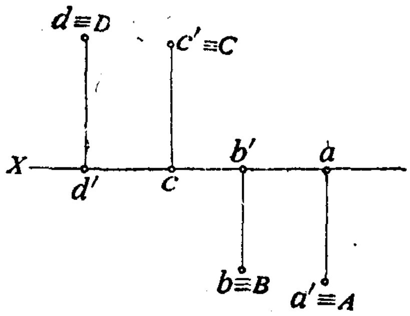
分析各点的投影图，可以看出，不同分角内点的投影各有其特点：2分角的点，它的二投影都在$X$轴上方；4分角的点，它的二投影都在$X$轴下方；而在1、3分角的点，它们的

二投影则分别在$X$轴的上、下两方。但是，1分角的点，$V$投影在$X$轴的上方，$H$投影在$X$轴下方；3分角的点，其$V$、$H$二投影之位置则正好相反，$V$投影在$X$轴下方，$H$投影在$X$轴上方。

**四、投影面上的点**



(a)



(b)

图 2-4

空间点如果位于某一个投影面上，也就是该点到某投影面的距离为零。若点在$H$面上，则其立标为零；若点在$V$面上，则其远标为零。于是，在点的投影图中，必然有一个投影落在$X$轴上，另一个投影则和该点自身重合，如图2-4所示。由此可得结论为：在点的两面投影图中，若有一个投影落在投影轴上，则该点一定在某一个投影面上。例如点$B$，其$V$投影$b'$在$X$轴上，即该点立标为零，故知$B$点在$H$面上，它的$H$投影$b$和$B$点自身重合。又如点$A$，其$H$投影$a$在$X$轴上，即$A$点远标为零，故$A$点一定在$V$面上，它的$V$投影$a'$和$A$点自身重合。又因$a'$在$X$轴下方，故知$A$点在$V$面下半部。

## § 2 点在三投影面体系中的投影

**一、三投影面体系**

根据点或物体在两面体系中的二投影，已能确定它们的空间位置。但由于定形的需要，有时还必需再增加一个侧立的投影面，作出第三个投影来。这个新增的侧立面，记以符号$W$，简称为$W$面。$V$、$H$、$W$三个投影面两两互相垂直，组成三投影面体系，如图2-5所示。点或物体在三个面上的投影，组成三面投影图，它是工程制图的基础图样。

$V$、$H$、$W$三个投影面两两相交于一条直线，该直线仍称为投影轴。$V$、$H$之交线仍为$X$轴；$H$、$W$之交线记为$Y$轴；$V$、$W$之交线记为$Z$轴。三轴之交点记为$O$，称为原点。

三个投影面把空间分成八部分，每部分仍称为分角或象角。其划分顺序如图2-5所示。

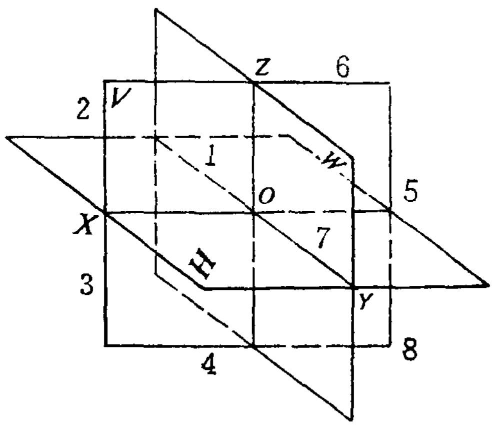
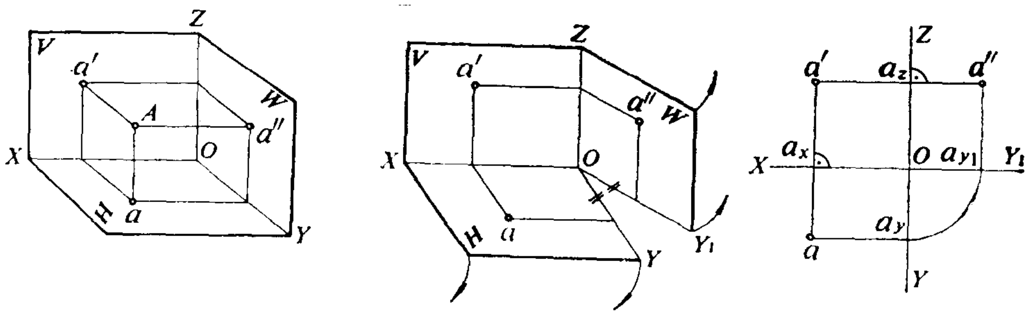



图 2-5

## 二、点在三面体系中的投影

如图2-6($a$)，有$A$点位于第1分角内。自点$A$分别向三投影面作垂线，三垂线与三平面的交点$a$、$a'$、$a''$，就是$A$点在$H$、$V$、$W$三面上的投影（$W$面上的投影，用小写字母加两撇表示）。




($a$) ($b$) ($c$)

图 2-6

展开三个投影面。为此，仍规定$V$面不动，$H$面绕$X$轴使其前半部向下旋转90°，和$V$面重合，$W$面绕$Z$轴使其前半部向右后方旋转90°，亦和$V$面重合，如图2-6($b$)。当三投影面重合为同一平面后，就得到点的三面投影图。略去投影面的框线，即得如图2-6($c$)的形式。它是点的三面投影图的基本形式。

点在三面体系中的投影规律是：

① 每两投影之连线，垂直于相应的投影轴；

② 线段$a'a_x = Aa = a''a_{y1}$，反映$A$点的立标；线段$aa_x = Aa' = a''a_z$，反映$A$点的远标；线段$aa_y = Aa'' = a'a_z$，反映$A$点到$W$面的距离，这个距离称为$A$点的横标。

## 三、点的投影与坐标的关系

把投影面看成坐标面、投影轴看成坐标轴，则点到三个面的距离，即是点的坐标。点的横标沿$X$轴量度，以$x$表示其数值；点的远标沿$Y$轴量度，以$y$表示其数值；点的立标沿$Z$轴量度，以$z$表示其数值。故用坐标表示空间$A$点时，可以写成$A$（$x$，$y$，$z$）。三字母$x$、$y$、$z$的顺序不能混乱。

在点的三面投影图上，可以看出：点的每个投影都具有两个坐标。如图2-6($c$)中的$A$点，其$H$投影$a$的坐标为（$x$，$y$）；$V$投影$a'$的坐标为（$x$，$z$）；$W$投影$a''$的坐标为（$y$，$z$）。因此，点的两个投影即具备三个坐标，即是点的两个投影可以唯一确定点的空间位置的原因。

归结点的投影与坐标的关系可知：

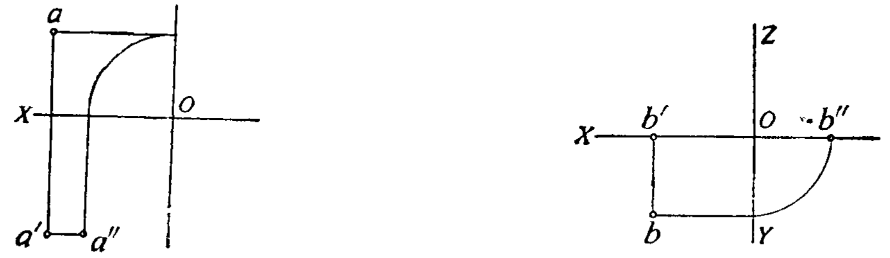
① 由点的投影可确定点的坐标；反之，给出点的坐标，就可以确定点的投影。

② 坐标有正负值，应用坐标的正或负，可以准确地表示出空间点在不同的分角。坐标正负值的规定是：以原点$O$为基准，$x$坐标沿$X$轴向左为正，向右为负；$y$坐标沿$Y$轴向前为正，向后为负；$z$坐标沿$Z$轴向上为正，向下为负。

③ 由于点的任意二投影具备三个坐标，故给定任意二投影可求得第三个投影。

## 四、点的三面投影作图举例

［**例1**］ 已知点$A(15,\ -10,\ -15)$，点$B(12,\ 10,\ 0)$。求作$A$、$B$两点的三面投影图，并指出其所在的分角（图2-7）。




(*a*) $A$点的三面投影图　　(*b*) $B$点的三面投影图

图 2-7

**解**：根据点的投影规律及点的坐标，作出它们的投影如图2-7(*a*)、(*b*)所示。由投影图或点的坐标，可知$A$点在第3分角，$B$点在$H$面的前半部上。

［**例2**］ 已知$M$点的$W$投影$m''$与点$M$自身重合，求$M$点的其它二投影（图2-8）。

**解**：因$m''$与$M$点自身重合，故知$M$点在$W$面上。于是，$M$点的横标$x=0$，$M$点的其它二投影$m$及$m'$分别落在$Y$轴和$Z$轴上，其三面投影如图2-8所示。

［**例3**］ 已知$N$点的二投影$n'$与$n''$，求第三投影$n$，并指出$N$点所在的分角（图2-9）。

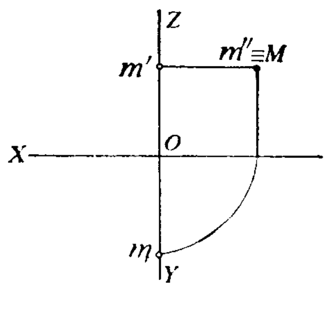
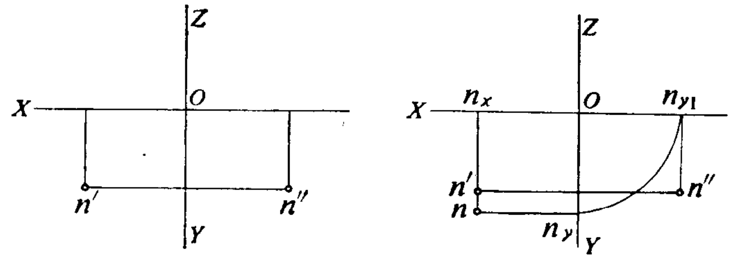



图 2-8




(*a*)　　(*b*)

图 2-9

**解**：根据已知二投影$n'$及$n''$，按投影规律画出其第三投影$n$，如图2-9(*b*)所示。

具体作法：过$n''$作$Y_1$轴的垂线与$Y_1$交于$n_{y1}$；以$O$点为圆心、$On_{y1}$为半径，顺时针方向画圆弧交$Y$轴于$n_y$；再自$n_y$作$X$轴的平行线与$n'n_x$之延长线交于$n$，即为所求的投影；再由$N$点的三面投影回想空间，可知该点在第4分角。

［**例4**］ 已知点$A(10,\ 15,\ 20)$，求作与$A$点对称于$H$面的$B$点，并写出$B$点的坐标及所在的分角（图2-10）。

**解**：根据$A$点的坐标可以作出它的三面投影，如图2-10。因$A$点在1分角，点$B$与点$A$对称于$H$面，故点$B$当在4分角，其立标应与$A$点相等，但为负值。于是可知，$B$点的坐标为$(10,\ 15,\ -20)$，再按坐标值可作出$B$点的三

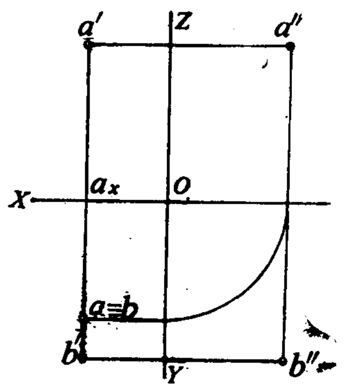



图 2-10