有限元法論文選

卞学鐄

YOUXIAN
YUANFA
LUN
WENXUAN

國防工業出版社

有限元法论文选

〔美〕卞学镄等　著

国防工业出版社

内 容 简 介

本书十五篇论文是美国麻省理工学院卞学鐄教授及其几位同事的代表作。内容主要是：假定应力杂交法、有限位移的变分公式、放松连续性要求的变分原理、用有限元分析裂纹尖端的情况、假定应力杂交法分析非线性问题、增量变分原理、用假定应力杂交法研究蠕变和粘塑性、用假定应力杂交法分析壳体大挠度问题及三维断裂问题。这些文章内容具有国际水平，对提高我国有限元法理论水平很有帮助。

本书可供从事使用有限元法工作的广大科技人员、教师及力学专业学生阅读学习。

有限元法论文选

〔美〕卞学鐄等　著

张相麟　樊大钧　薛大为等　译校

*

国防工業出版社　出版

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

$850\times1168\ 1/32$　印张 $9\ 7/16$　242千字

1980年9月第一版　1980年9月第一次印刷　印数：0,001—3,700册

统一书号：15034·2095　　定价：1.20元

前　言

卞学镇教授现在美国麻省理工学院宇航系任教。五十年代起他就从事有限元法的研究，一九六四年他首次推导出假定应力分布的单元刚度矩阵，创立了杂交应力模型，并把它推广到结构力学、断裂力学和非线性等领域。一九七五年卞教授为《美国宇航学会选编丛书》编著了《结构动力学的有限元法》一书。一九七九年他曾回国在北京、上海等地进行讲学。卞学镇教授长期从事有限元法的研究，对有限元法的发展作出了贡献，是这个领域里的一位知名学者，在国际上享有一定声誉。

多年来卞学镇教授曾在国际学术会议和刊物上发表了很多有关有限元法的论文，经征得他本人的同意和帮助，选择了其中十五篇具有代表性的论文翻译出来，供国内从事这方面工作的科技人员学习、参考。

这十五篇论文按发表年代的先后次序编排。统一了节题层次和一般名词术语，还在每篇论文内，注明了代表符号的意义。各篇论文之间，遵照原文，没有统一符号。参考文献皆以〔　〕表示。

全部译文经北京工业学院张相麟、樊大钧、薛大为三位同志校订，因限于水平，不当之处，请读者指正。

目　　录

一、用假定应力分布来推导单元刚度矩阵……………………… 1
二、满足边界协调性和给定边界应力的单元刚度矩阵…………11
三、用假定应力法推导单元刚度矩阵的阐述…………………30
四、有限位移分析的变分公式………………………………52
五、连续性要求松弛了的变分原理的有限元法………………72
六、连续体力学的有限元法…………………………………95
七、假定应力杂交模型最近的一些研究 ……………………155
八、用有限元杂交法的弹性裂纹分析 ………………………172
九、用假定应力杂交模型分析非线性问题 …………………190
十、裂纹单元 ………………………………………………202
十一、增量有限元法的变分原理 ……………………………231
十二、假定应力杂交模型有限元的蠕变和粘塑性分析 ………251
十三、用假定应力有限元法求分析大挠度壳体的公式 ………263
十四、用假定应力杂交法进行三维断裂分析 ………………279
十五、关于“杂交单元”的历史说明 …………………………291
附录：卞学鐄教授关于有限元法的代表论文 ………………294

一、用假定应力分布来推导单元刚度矩阵

卞 学 鐄

在最近的报导〔1〕中，作者曾经简述了与矩阵结构分析位移法有关的单元刚度矩阵计算过程。该过程是以m个待定系数的位移函数表达结构单元位移为依据的。通常为了满足内部的应力平衡，m应大于广义位移数目n，当m与n相等时，这些待定系数和广义位移直接有关，当m大于n时，它们可以应用最小位能原理计算出来。一个重要的要求就是：位移函数必须保持邻近单元的协调性；这个条件曾由许多著者〔2，3〕强调过。

假定位移函数的方法，特别适合于一维单元。例如：轴对称壳体〔4〕的弧段母线，当相应的广义位移在节点一致时，其邻近单元的位移协调性是完全满足的。对于二维问题，例如，一般的壳体或受弯平板或是平面应力条件下的板，要写出边界位移协调的位移函数总不是简单的事情。例如，Melosh〔2〕曾经提出一个受弯矩形板的位移表达式，此表达式仅保证在所有边界上位移的连续性，但它不能保持四条边界上法向斜率的连续性。笔者觉得壳体和受弯平板的边界位移的完全协调性同样须包括斜率的连续性。

本文提出单元刚度矩阵的另一个推导方法，此方法不需要在整个单元上的连续位移函数，只需要写出保证全部位移协调性的边界位移，推导是以最小余能原理为基础，所提出的方法与Melosh〔2〕和Best〔5〕提出的变分方法，有明显的区别。

确定结构单元的刚度矩阵的一种方法是用广义位移$\{q\}$来表示单元应变能U：

$$U=\frac{1}{2}\lceil q\rceil[K]\{q\}^{●} \tag{1}$$

式中〔K〕为单元刚度矩阵。

在U的表达式中，可以用假设连续的位移函数，或是用平衡的应力分布。但最好的选择是：位移协调性和应力平衡条件均被满足。这就要求在计算刚度矩阵以前解决以下的弹性力学问题，如已知某固体在其边界A_2上的全部位移，需要确定单元的应力分布。这个问题可以用最小余能原理来解决，最小余能原理可表示为

$$\pi_c=U-\int_{A_2}u_i s_i dA=min \tag{2}$$

式中，U为以应力分量σ_{ij}来表示的应变能，u_i为指定的位移分量，s_i为面力分量，它与应力分量有如下关系

$$s_i=\sigma_{ij}n_j \tag{3}$$

式中n_j为表面法线的方向余弦。

在变分原理的应用中，首先用m个待定应力参数$\{\beta\}$来表达应力分量，$\{\sigma\}(=\{\sigma_{11},\sigma_{22}\cdots\})$如下：

$$\{\sigma\}=[p]\{\beta\} \tag{4}$$

式中矩阵〔p〕的各项为坐标x_i（$i=1,2,3$）的函数。在$\{\beta\}$中的项数是不受限制的。引入应力与应变关系

$$\{\varepsilon\}=[N]\{\sigma\} \tag{5}$$

则内部应变能可以表达为

$$U=\frac{1}{2}\int_V\lceil\sigma\rceil[N]\{\sigma\}dV \tag{6}$$

或
$$U=\frac{1}{2}\lceil\beta\rceil[H]\{\beta\} \tag{7}$$

式中
$$[H]=\int_V[p^T][N][p]dV \tag{8}$$

可以看出〔H〕为对称矩阵。

● $\{q\}$表q的列矩阵，〔q〕表q的行矩阵。——校订者

当用节点上 n 个广义位移 $\{q\}$ 给出边界 A_2 上的指定位移，其表达形式为

$$\{u\}=[L]\{q\} \tag{9}$$

式中矩阵 $[L]$ 中的各项包含有表面的坐标。面力 $\{s\}$ 能够由方程式（3）用应力 $\{\sigma\}$ 来表达，因此面力 $\{s\}$ 和待定应力系数 $\{\beta\}$ 有关，即

$$\{s\}=[R]\{\beta\} \tag{10}$$

式中，在 $[R]$ 中的各项，同样包含有表面坐标，因此，总的余能为

$$\pi_c=\frac{1}{2}[\beta][H]\{\beta\}-[\beta][T]\{q\} \tag{11}$$

式中

$$[T]=\int_{A_2}[R][L]dA \tag{12}$$

由最小余能条件，即 $\dfrac{\partial\pi_c}{\partial\beta_i}=0 \quad (i=1\cdots m)$，得到

$$[H]\{\beta\}=[T]\{\beta\} \tag{13}$$

与

$$\{\beta\}=[H^{-1}][T]\{q\} \tag{14}$$

将 $\{\beta\}$ 代入方程式（7），则得

$$U=\frac{1}{2}[q][T^T][H^{-1}][T]\{q\} \tag{15}$$

与方程式（1）比较，可推出

$$[K]=[T^T][H^{-1}][T] \tag{16}$$

由此可见，相应广义力的列矩阵 $\{Q\}$ 为

$$\{Q\}=[K]\{q\} \tag{17}$$

将方程式（16）中的 $[K]$ 代入，并应用方程式（14），便可得到

$$\{Q\}=[T^T]\{\beta\} \tag{18}$$

因此，矩阵 $[T^T]$ 与假设的应力系数 $\{\beta\}$ 和等效广义力 $\{Q\}$ 有关，其物理意义是：广义力与角点位移所作的功等于边界应力与指定

的边界位移所作的功。这个事实早先已由Melosh〔2〕讨论过。方程式（12）表明，以假定应力函数来表达广义力有唯一的方式。对于平面应力问题而言，其边界位移假设是线性的，则应用方程式（12）所获得的〔T^T〕矩阵和按通常步骤依两端距离成反比而得的集中力所得结果完全相同。可是对于受弯的板问题，边界剪力按反比分布则是不适当的。

很有意思的是，由Best〔8〕和Gallagher〔6〕为确定单元刚度矩阵所给出的公式是

$$[K]=[V][H^{-1}][V^T] \tag{19}$$

式中〔H〕是用与方程式（8）相同的方法确定的，〔V〕是精确地与等效力$\{Q\}$及应力系数$\{\beta\}$有关的矩阵。而本文则论述了下述两个重要的问题：1）决定等效的广义力有唯一的方法，2）假设在〔β〕中的应力系数数目不限于$m=n-l$，其中，n为广义位移的数目，l为问题的刚体自由度的数目，则当n足够大时，显然有收敛解存在。

为说明所提出的程序，以矩形板在平面应力条件下，确定其刚度矩阵为例（见图1-1），在图中表示了八个广义力和相应的

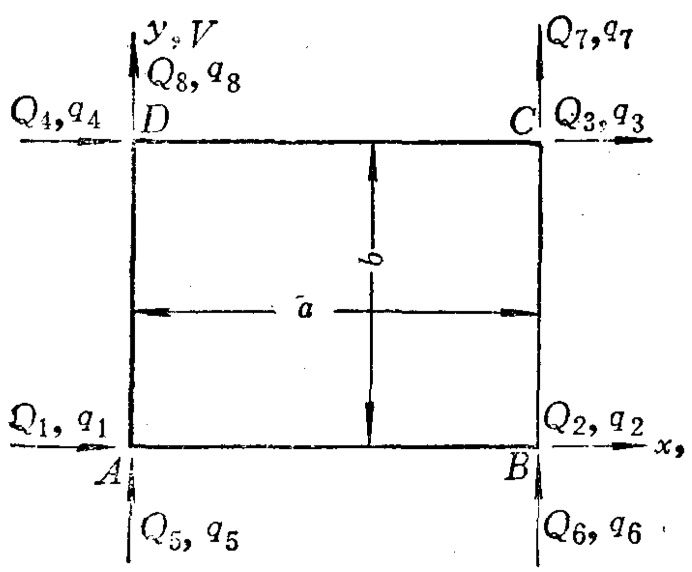

图1-1　矩形单元的广义力和广义位移

位移，满足平衡方程的应力函数如下所示：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\beta_1+\beta_2 y+\beta_6 x+\beta_8 y^2+\beta_{10}x^2+\cdots\\ \sigma_y&=\beta_3+\beta_4 x+\beta_7 y+\beta_9 x^2+\beta_{10}y^2+\cdots\\ \tau&=\beta_5-\beta_6 y-\beta_7 x-2\beta_{10}xy+\cdots\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

边界力矩阵｛s｝由八项组成，它们由沿四条边的边界力在 x 和 y 的分量来表示。它们是

$$\{s\}=\begin{pmatrix}(s_x)_{AB}\\(s_y)_{AB}\\(s_x)_{BC}\\(s_y)_{BC}\\(s_x)_{DC}\\(s_y)_{DC}\\(s_x)_{AD}\\(s_y)_{AD}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\tau_{AB}(x)\\-\sigma_{yAB}(x)\\\sigma_{xBC}(y)\\\tau_{BC}(y)\\\tau_{DC}(x)\\\sigma_{yDC}(x)\\-\sigma_{xAD}(y)\\-\tau_{AD}(y)\end{pmatrix}\tag{21}$$

当多项式保留到 β_5 的情况下，｛s｝矩阵能用｛β｝表示如下：

$$\{s\}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&-1\\0&0&-1&-x&0\\1&y&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&1&x&0\\-1&-y&0&0&0\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\beta_4\\\beta_5\end{pmatrix},\tag{22}$$

此处，在｛β｝前的矩阵是〔R〕矩阵。

其相应的边界位移矩阵为

$$\{u\}=\begin{pmatrix} u_{AB}(x)\\ v_{AB}(x)\\ u_{BC}(y)\\ v_{BC}(y)\\ u_{CD}(x)\\ v_{CD}(x)\\ u_{AD}(y)\\ v_{AD}(y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-\frac{x}{a} & \frac{x}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\frac{x}{a} & \frac{x}{a} & 0 & 0\\ 0 & 1-\frac{y}{b} & \frac{y}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\frac{y}{b} & \frac{y}{b} & 0\\ 0 & 0 & \frac{x}{a} & 1-\frac{x}{a} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x}{a} & 1-\frac{x}{a}\\ 1-\frac{y}{b} & 0 & 0 & \frac{y}{b} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\frac{y}{b} & 0 & 0 & \frac{y}{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1\\ q_2\\ q_3\\ q_4\\ q_5\\ q_6\\ q_7\\ q_8 \end{pmatrix} \tag{23}$$

在这里$\{q\}$矩阵用$[L]$矩阵前乘。

由方程式（12）得到矩阵$[T]$如下：

$$[T]=\begin{bmatrix} -\frac{b}{2} & \frac{b}{2} & \frac{b}{2} & -\frac{b}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b^2}{6} & \frac{b^2}{6} & \frac{b^2}{3} & -\frac{b^2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a}{2} & -\frac{a}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a^2}{6} & -\frac{a^2}{3} & \frac{a^2}{3} & \frac{a^2}{6} \\ -\frac{a}{2} & -\frac{a}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & -\frac{b}{2} & \frac{b}{2} & \frac{b}{2} & -\frac{b}{2} \end{bmatrix} \tag{24}$$

例如，对厚度等于t，泊松比等于1/3的正方形单元已求出其刚度矩阵。当从方程式（18）选择项数保留至β_5时，由方程式（16）获得矩阵$[K]$为

$$Et\begin{bmatrix} 0.45833 & -0.27083 & -0.29167 & 0.10417 & 0.18750 & 0.00000 & -0.18750 & 0.00000 \\ & 0.45833 & 0.10417 & -0.29167 & 0.00000 & -0.18750 & 0.00000 & 0.18750 \\ & & 0.45833 & -0.27083 & -0.18750 & 0.00000 & 0.18750 & 0.00000 \\ & & & 0.45833 & 0.00000 & 0.18750 & 0.00000 & -0.18750 \\ & & & & 0.45833 & 0.10417 & -0.29167 & -0.27083 \\ & \text{对称} & & & & 0.45833 & -0.27083 & -0.29167 \\ & & & & & & 0.45833 & 0.10417 \\ & & & & & & & 0.45833 \end{bmatrix}$$

项数保留到β_7、β_8和β_{10}时，分别地求出了其刚度矩阵。当仅保留五位有效数字时，证明这些矩阵计算出来的结果都是相等的，说明其解的收敛性确实是非常迅速的。下面给出求得的矩阵：

$$
Et\begin{pmatrix}
0.46875 & -0.28125 & -0.28125 & 0.09375 & 0.18750 & 0.00000 & -0.18750 & 0.00000 \\
 & 0.46875 & 0.09375 & -0.28125 & 0.00000 & -0.18750 & 0.00000 & 0.18750 \\
 & & 0.46875 & -0.28125 & -0.18750 & 0.00000 & 0.18750 & 0.00000 \\
 & & & 0.46875 & 0.00000 & 0.18750 & 0.00000 & -0.18750 \\
 & & & & 0.46875 & 0.09375 & -0.28125 & -0.28125 \\
 & \text{对称} & & & & 0.46875 & -0.28125 & -0.28125 \\
 & & & & & & 0.46875 & 0.09375 \\
 & & & & & & & 0.46875
\end{pmatrix}
$$

最后，若使用如下的位移函数，且当其项数取至足够大时，则前述的单元刚度矩阵的收敛数值，也能够应用最小位能原理〔1〕来求到。

$$
\begin{aligned}
u &= \alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y+\alpha_4 xy+xy(x-a)(y-b)(\alpha_9+\alpha_{11}x+\alpha_{13}y+\cdots) \\
v &= \alpha_5+\alpha_6 x+\alpha_7 y+\alpha_8 xy+xy(x-a)(y-b)(\alpha_{10}+\alpha_{12}y+\alpha_{14}x+\cdots)
\end{aligned}
\tag{25}
$$

例如，当项数保留到α_8时，由文献〔1〕的方程式（15）所求得正方形单元的刚度矩阵如下：

$$
Et\begin{pmatrix}
0.5 & -0.3125 & -0.25 & 0.0625 & 0.1875 & 0 & -0.1875 & 0 \\
 & 0.5 & 0.0625 & -0.25 & 0 & -0.1875 & 0 & 0.1875 \\
 & & 0.5 & -0.3125 & -0.1875 & 0 & 0.1875 & 0 \\
 & & & 0.5 & 0 & 0.1875 & 0 & -0.1875 \\
 & & & & 0.5 & 0.625 & -0.25 & -0.3125 \\
\text{对称} & & & & & 0.5 & -0.3125 & -0.25 \\
 & & & & & & 0.5 & 0.0625 \\
 & & & & & & & 0.5
\end{pmatrix}
$$

当项数保留到 α_{10} 时，其矩阵为

$$
Et\begin{pmatrix}
0.47396 & -0.28647 & 0.27601 & 0.08854 & 0.1857 & 0 & -0.1875 & 0 \\
 & 0.47396 & 0.08854 & -0.27604 & 0 & -0.1875 & 0 & 0.1875 \\
 & & 0.47396 & -0.28646 & -0.1875 & 0 & 0.1875 & 0 \\
 & & & 0.47396 & 0 & 0.1875 & 0 & -0.1875 \\
 & & & & 0.47396 & 0.08854 & -0.27604 & -0.28646 \\
\text{对称} & & & & & 0.47396 & -0.28646 & -0.27604 \\
 & & & & & & 0.47396 & 0.08854 \\
 & & & & & & & 0.47396
\end{pmatrix}
$$

由此可见，虽然不如假定应力函数法那样迅速，但计算的结果是收敛的。

参考文献

〔1〕 Pian, T.H.H., "Derivation of element stiffness matrices," AIAAJ. 2, 576-577 (1964).

〔2〕 Melosh, R.J., "Basis for derivation of matrices for direct stiffness method,"AIAAJ. 1, 1631-1637 (1963).

〔3〕 Fraeijs de Veubeke, B.M. and Sander, G., "Upper and lower bounds in matrix structural analysis," 14th Meeting of the Structures and Materials Panel of AGARD, Paris (July 1962).

〔4〕 Grafton, P.E. and Strome, D.R., "Analysis of axisymmetrical shells by the direct stiffness method," AIAA J. 1, 2342-2347 (1963).

〔5〕 Best, G.C., "A general formula for stiffness matrices of structural elements," AIAA J. 1, 1920-1921 (1963).

〔6〕 Gallagher, R.H., *A Correlation Study of Methods of Matrix Structural Analysis* (Pergamon Press, New York, 1964).

〔7〕 Sokolnikoff, I.S., *Mathematical Theory of Elasticity*(McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1956), 2nd ed., Chap. 7, p. 387.

〔8〕 Best, G.C., "A formula for certain types of stiffness matrices of structural elements,"AIAA J. 1, 212-213 (1963).

（译自 "Derivation of Element stiffness Matricess by Assumed stress Distribution" AIAA J. 2 Vol 2, pp. 1333-1336, 1964）

陈深龙 译　　薛大为 校

晓

二、满足边界协调性和给定边界应力的单元刚度矩阵

卞　学　鐄

本文叙述运用假定应力分布的最小余能原理，推导单元刚度矩阵的方法。单元有两种不同类型：一是在全部边界上有约束；二是沿边界有给定的应力。结果表明，当假定应力分布多项式有很多项时，则可求得收敛的刚度矩阵。

本文举例计算了平面应力条件下的矩形板和受弯曲的方形板，并指出单元刚度矩阵满足整个边界协调条件和边界应力条件时，如何改进结构分析。

第一节　引　　言

在与矩阵结构分析位移法有关的单元刚度矩阵的推导中，希望满足下述两个条件：

（1）内部应力要平衡；

（2）相邻单元的位移要协调。

然而，一般地讲，对于结构单元同时满足这两个条件是不可能的。于是，把推导近似刚度矩阵，所提出的许多简单方法分成两类：

（a）用满足条件（1）的一个简单的假设应力分布，但其所求得的位移将违反条件（2）；

（b）用满足条件（2）的一个简单的假设位移分布，一般地说，其相应的应力分布将违反条件（1）。

Gallagher 已对平面应力问题的各种不同方案和应用做了评述〔1和2〕。对于有关板弯曲的问题，不同的著者〔3、4和5〕

已经考虑选择满足边界协调性的恰当的位移函数。为了导出单元刚度矩阵，著者认为〔6、7〕，在理论上最小位能法和最小余能法都分别能计算位移函数和应力函数到无限项数。所以能求到同时满足上述条件（1）和（2）的逐次改进的矩阵。

本文主要讲述用假设应力分布和最小余能原理来推导平面应力和板弯曲的矩形单元刚度矩阵。这个方法能计算在全部四条边上要求位移有协调性的单元以及计算在某些边界上没有应力的单元。

第二节　方法的简述

在文献〔7〕中叙述的基本方法论述了如下问题：对于一个结构单元，在节点上选择一组广义位移和在面上指定简单位移函数，使得相邻单元能满足协调性条件。在边界 A_2 上已知位移，希望确定整个单元的应力分布，可用最小余能原理求解这问题。最小余能原理可表示为〔8〕

$$\pi_c = u - \int_{A_2} u_i s_i dA = minimum \tag{1}$$

式中 u 是以应力分量 σ_{ij} 表示的应变能，u_i 是给定位移的分量并且 s_i 是面力的分量，面力分量与应力分量的关系为

$$s_i = \sigma_{ij} n_j \tag{2}$$

式中 n_j 是表面法线的方向余弦。

运用这个变分原理时，首先用 m 项待定应力系数 β 来表示，应力分布 σ 如下：

$$\sigma = P\beta^{●} \tag{3}$$

式中矩阵 P 的各项都是坐标 x_i（$i = 1, 2, 3$）的函数。β 的项数是任意的。但是 P 和 β 的选择，都必须使得应力分布既能满足内部的平衡方程，又能满足给定的边界应力（例如：没有应力的边

● σ 体为矩阵。——校订者