裘忠平

现代
量子场论
导引

华中师范大学出版社

现代量子场论导引

裘忠平

华中师范大学出版社

鄂新登字 11 号

现代量子场论导引
裘忠平
*
华中师范大学出版社出版发行
（武昌桂子山）
新华书店湖北发行所经销
咸宁市印刷厂印刷
·
开本 850×1168 1/32 印张 9 字数 230 千字
1992 年 3 月第 1 版 1992 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 7-5622-0799-2/O·87
印数：1—2000 定价：5.00 元

内容简介

本书是一本简洁而实用的现代量子场论入门书.全书共分两大部分:第一部分介绍传统量子场论的基本思想,内容包括场的拉格朗日形式、奈特定理及正则量子化;第二部分是全书的重点,主要阐述规范场论方法,内容包括路径积分量子化、协变微扰论、量子电动力学、量子色动力学、量子味动力学、重整化和拓扑孤子.全书取材恰当、结构严谨、叙述清晰,可作为理论物理专业研究生的教学用书,亦可供理论物理工作者、高校教师和高年级大学生参考.

序

随着弱-电统一理论(量子味动力学QFD)和量子色动力学(QCD)的成功,规范场论已经作为统一描述各种基本相互作用的标准理论而被普遍接受.但是,规范场论所用的方法——路径积分方法和传统的正则量子化方法很不相同.因而,学生在学完传统量子场论以后仍然不能阅读现代文献,必须再从头学习规范场论,延长了年轻理论工作者的培养周期.

如何直接用路径积分方法讲授量子场论,恰当处理传统的正则场论与现代规范场论的关系,是量子场论教学改革的重要问题.裘忠平同志的这本"现代量子场论导引"就是在探索这一问题的答案中的一个可喜的尝试.

直接用路径积分方法讲授量子场论之所以困难,主要在于路径积分方法比较抽象,不象正则量子化那样有具体的"粒子"图象.现在这本书采用了一种 巧妙的安排,很好地解决了这一问题.那就是:用正则量子化方法讲述自由场的量子化,而用路径积分方法讲授场的相互作用.这样就使学生在建立了场的量子化的粒子图象以后,直接进入现代规范场论的学习,提高了效率,避免了许多不必要的弯路.这种处理也使得路径积分方法的独特优点得到了充分的发挥.

在选材方面这本书也下了一些功夫.去掉了一些与其它课程(例如相对论量子力学)重复的内容以及本课程内部的过多大致重复的内容(如标量、旋量、矢量场量子化的多次重复),加强了许多

现代的、有用的内容.在具体推导方面,相当详细,减少了学习的困难.

我相信这本书将会成为现代量子场论的一本很好的入门书.

刘连寿

猴年春于桂子山

前　　言

本书是在作者近年来为华中师范大学理论物理专业研究生讲授量子场论和规范场论的讲义基础上整理撰写而成的.

近20年来,在量子场论中规范理论和泛函积分方法获得了迅速发展,日益成为理论物理工作者的必备知识.理论物理专业的研究生通常需在学习传统的量子场论基础上再进一步学习规范场论.为了使未来的理论物理工作者尽快掌握现代量子场论的思想和方法,作者深感有必要撰写一本关于现代量子场论的入门书,在阐述传统量子场论的基本思想后,着重讲授规范理论的原理和方法,努力做到使二者有机结合、相互呼应,兼顾研究工作对二者的需要.这个想法得到了刘连寿教授和李家荣教授的大力支持和鼓励.书稿完成后,刘连寿教授阅读了全书,提出了宝贵的修改意见.此外,在教学和写作过程中也曾得到北京大学物理系彭宏安教授的具体帮助和热情鼓励.作者在此对他们表示衷心的谢意.

沈坤、高燕敏、李农浩、张晓飞和吴元芳等同志为本书的排版和校对做了大量的工作;余汉香同志为本书绘制了全部插图.作者也在此对他们一并致谢.

裘忠平

1991年10月

目　　录

第一章　引　论

我们将要研究的量子场论是一种相对论量子理论，它所涉及的是各种场量在四维时空中的性质和相互作用. 为了使理论的数学结构和表述形式简洁和以后讨论的方便，作为准备，我们在这一章里将首先选定适当的单位制；然后，给出四维时空点的表示空间并对那些在今后的研究中起重要作用的参照系之间的变换群进行描述；最后，对场量在相应变换群下的不变性质和分类作些必要的讨论.

1.1　自然单位制

相对论中经常出现光速 c，它是高速运动的标志；量子力学中经常出现量子作用量 h，它是微观运动的标志. 在作为相对论量子理论的量子场论中，自然会经常出现 c 和 h. 为避免在公式和方程中重复出现 c 和 h 而采用一种新的单位制，约定 $c=h=1$ 作为基本单位的数值. 第三个单位通常选为能量，其单位为十亿电子伏特，记为 GeV. 这样确定的新单位制一般就称为自然单位制.

在自然单位制中，由于

$$[c]=1=[L]/[T]\ ,$$

$$[h]=1=[E]\cdot[T]\ ,$$

$$[E]=[M][c]^2=[M]\ ,$$

故长度与时间的量纲相同，能量与质量的量纲相同，二者之间互为倒数：

$$[E]=[M]=[L]^{-1}=[T]^{-1}.$$

这使我们只需保留一个独立量纲，例如长度量纲或能量量纲.

现在来对比一下自然单位制和我们熟悉的CGS单位制(为了识别,已明显表出 c 和 $\hbar$).

CGS 单位制		自然单位制	
长度 L	厘米(cm)	速度 V	c
时间 T	秒(s)	作用量 A	$\hbar$
质量 M	克(g)	能量 E	GeV

两种单位制的换算关系为

$$1\,c=(c)\mathrm{cm}\cdot \mathrm{s}^{-1}, \qquad (c)=3.00\times 10^{10};$$

$$1\,\hbar=(\hbar)\mathrm{g}\cdot \mathrm{cm}^2\cdot \mathrm{s}^{-1}, \qquad (\hbar)=1.05\times 10^{-27};$$

$$1\,\mathrm{GeV}=(\varepsilon)\mathrm{g}\cdot \mathrm{cm}^2\cdot \mathrm{s}^{-2}, \qquad (\varepsilon)=1.60\times 10^{-3};$$

或反过来,

$$1\,\mathrm{cm}=(\varepsilon)(c)^{-1}(\hbar)^{-1}\,\mathrm{GeV}^{-1}\cdot c\cdot \hbar=5.05\times 10^{13}\,\mathrm{GeV}^{-1}\cdot c\cdot \hbar;$$

$$1\,\mathrm{s}=(\varepsilon)(\hbar)^{-1}\,\mathrm{GeV}^{-1}\cdot \hbar=1.52\times 10^{24}\,\mathrm{GeV}^{-1}\cdot \hbar;$$

$$1\,\mathrm{g}=(\varepsilon)^{-1}(c)^2\,\mathrm{GeV}\cdot c^{-2}=0.562\times 10^{24}\,\mathrm{GeV}\cdot c^{-2}.$$

在自然单位制中,长度 L、时间 T 和质量 M 的单位分别是

$$1\,\mathrm{GeV}^{-1}\cdot c\cdot \hbar=(\varepsilon)^{-1}(c)(\hbar)\,\mathrm{cm}=0.198\times 10^{-13}\,\mathrm{cm},$$

$$1\,\mathrm{GeV}^{-1}\cdot \hbar=(\varepsilon)^{-1}(\hbar)\,\mathrm{s}=0.658\times 10^{-24}\,\mathrm{s},$$

$$1\,\mathrm{GeV}\cdot c^{-2}=(\varepsilon)(c)^{-2}\,\mathrm{g}=1.78\times 10^{-24}\,\mathrm{g}.$$

采用自然单位制后,由于 $c=\hbar=1$,所有表达式中将不再明显出现 c 和 $\hbar$.例如,在自然单位制中,时空点的坐标被表示为 $x=(t,\boldsymbol{x})$,量子对易关系被表示为 $[x^i,p^j]=i\delta^{ij}$.在某些特殊情形下,有时我们需要明显表示出 $\hbar$ 或 c,这时可从自然单位制的表达式出发,通过简单的量纲分析确定出式中暗含的 $\hbar$ 或 c.例如,在上面的量子对易关系中,左边是长度和动量的乘积,具有角动量量纲,故知右边应暗含一个 $\hbar$.

1.2 闵氏空间和洛仑兹群

在理论的相对论协变描述中,时空是对称的,时间坐标和空间

坐标统一用四维空间的矢量来描写. 由于选用的度规张量不同,一般流行的有闵氏空间度规和欧氏空间度规两种描写法. 前者可避免引进虚数,但要区分逆变量与协变量;后者可不区分逆变量与协变量,但需引进虚数. 我们将采用闵氏空间度规. 闵氏空间的时空点 x 用逆变坐标表示:

$$x = (x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \boldsymbol{x}). \tag{1.2.1}$$

度规张量 $g_{\mu\nu}$ 定义为

$$\begin{aligned} &g_{00} = 1; \qquad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1; \\ &g_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu). \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

引进协变坐标

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \tag{1.2.3}$$

这里及以后都采用重复指标表示对所有可能取值求和的约定. 于是有

$$(x_\mu) = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -\boldsymbol{x}). \tag{1.2.4}$$

$g_{\mu\nu}$ 的逆记为 $g^{\mu\nu}$,它满足

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\lambda} = g_\lambda{}^\nu = \delta_\lambda{}^\nu, \tag{1.2.5}$$

其中 $\delta_\lambda{}^\nu = \begin{cases} 1 & (\lambda = \nu) \\ 0 & (\lambda \neq \nu) \end{cases}$ 为克罗内克 δ 符号. 易见

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}, \tag{1.2.6}$$

于是也可写

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu = g^\mu_\nu\, x^\nu, \tag{1.2.7}$$

因此,度规张量也起了升降指标的作用.

闵氏空间中,矢量 x 和 y 的标量积定义为

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^\mu y_\mu = x^0 y^0 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}, \tag{1.2.8}$$

因而时空间隔可表示为

$$x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu = t^2 - \boldsymbol{x}^2. \tag{1.2.9}$$

对微分算符,自然地定义

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \tag{1.2.10}$$

和

$$\partial^{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = g^{\mu\nu}\partial_{\nu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right). \qquad (1.2.11)$$

而达朗贝算符表示为

$$-\Box = \partial^{\mu}\partial_{\mu} = g_{\mu\nu}\partial^{\mu}\partial^{\nu} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \qquad (1.2.12)$$

闵氏空间的洛仑兹变换定义为

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu\nu}x_{\nu}, \qquad (1.2.13)$$

其中实变换矩阵 $\Lambda_{\mu\nu}$ 满足正交性条件

$$\Lambda_{\mu\nu}\Lambda^{\mu\lambda} = g_{\nu}{}^{\lambda}. \qquad (1.2.14)$$

容易验证,标量积(1.2.8)在洛仑兹变换下是不变的.

所有洛仑兹变换的集合形成一个群，称为洛仑兹群. 从式(1.2.14)可以推得

$$\det\Lambda = \pm 1; \quad \Lambda^{00} \geqslant 1 \text{ 或 } \Lambda^{00} \leqslant -1. \qquad (1.2.15)$$

由此可见,洛仑兹群被分成四叶. 其中 $\det\Lambda = -1$的例子是时间反演 $\mathscr{T}$ 和空间反射 $\mathscr{P}$（宇称变换)：

$$\mathscr{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathscr{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (1.2.16)$$

洛仑兹群的正时连通部分满足

$$\det\Lambda = 1, \quad \Lambda^{00} \geqslant 1; \qquad (1.2.17)$$

称为正规洛仑兹群,它包括通常的空间转动和时空纯洛仑兹转动(相对于原坐标系以某一速度运动的变换). 正规洛仑兹群加上空间反射形成的群称为完全洛仑兹群. 如果再加上时间反演,则称为一般洛仑兹群.

在物理上起重要作用的是由完全洛仑兹群变换与沿时空坐标轴的平移变换

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu \tag{1.2.18}$$

一起形成的所谓彭加勒群(非齐次洛仑兹群). 通常称彭加勒群变换下的不变性为相对论不变性,而称洛仑兹群变换下的不变性为洛仑兹不变性.

在闵氏空间中,任一矢量 $A=(A^\mu)$ 的长度平方是其自身的标量积:

$$A^2 = g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu = A^\mu A_\mu = A^{02} - \boldsymbol{A}^2. \tag{1.2.19}$$

我们称它是

1) 类时的,如果 $A^2 > 0$;

2) 类空的,如果 $A^2 < 0$;

3) 类光的,如果 $A^2 = 0$.

很清楚,矢量的上述特征是洛仑兹不变的. 特别地,如果时空间隔 $x-y$ 是类时(空、光)的,则称它为类时(空、光)间隔. 类空间隔的两个点 x、y 是不可能以因果方式(例如光信号)相联系的,而类时间隔的两个点则是因果相关的.

闵氏空间中的三维超曲面 Σ 也可按其法向矢量是处处类时(空)的而定义为类空(时)超曲面. 类空超曲面是等时面的协变推广. 特别简单的类空超曲面是平直的,它满足方程

$$n_\mu(x)x^\mu - \tau = 0, \tag{1.2.20}$$

其中 $n_\mu(x)$是曲面的法向单位矢量,且是类时的,具有 $n_\mu n^\mu = 1$;τ 是个常数,它表示该平直曲面到原点的距离. 一个特殊情形是所谓的等时超平面,即所有满足 $x^0 = t =$ 常数的时空点 x 的集合. 这时,$n^0 = 1$, $n^k = 0 (k = 1,2.3)$,而 $\tau = t$.

任意超曲面 Σ 的面元 $\mathrm{d}\sigma_\mu(x) \equiv n_\mu(x)\mathrm{d}\sigma$ 定义为

$$\begin{cases} \mathrm{d}\sigma_0 = \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 \equiv \mathrm{d}^3x, \\ \mathrm{d}\sigma_1 = \mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3, \\ \mathrm{d}\sigma_2 = \mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^3, \\ \mathrm{d}\sigma_3 = \mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2. \end{cases} \tag{1.2.21}$$

特别，在等时超平面的情形下，$d\sigma_k = 0$.

闵氏空间的四维体元定义为

$$d^4x \equiv dx = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = dt\ d^3x. \qquad (1.2.22)$$

由于 $\det\Lambda=1$，它在洛仑兹变换下是不变的.

闵氏空间中的四维高斯定理表示为

$$\int_R dx\ \partial_\mu F^{\mu\cdots}(x) = \int_\Sigma d\sigma_\mu(x)\ F^{\mu\cdots}(x), \qquad (1.2.23)$$

其中 R 是任意四维体积，超曲面 Σ 是包围 R 的边界.

1.3 洛仑兹群的表示

我们将要仔细研究的场作为无穷多自由度的连续的力学系统，在数学上表现为时空点 x 的连续函数，可记为 $\Phi(x)$，它可以是单分量的，也可以是多分量的. 显然，时空坐标的变换必将引起场量 $\Phi(x)$ 的相应变换. 我们感兴趣的是 $\Phi(x)$ 在彭加勒群变换下的变换规律.

首先我们指出，在时空平移变换(1.2.18)下，所有各种场量都保持不变：

$$\Phi(x) \to \Phi'(x') = \Phi(x). \qquad (1.3.1)$$

这是时空均匀性的结果，它表示所有物理规律不因时间、地点而异.

其次讨论完全洛仑兹变换. 在变换(1.2.13)下，场量的各个分量相应地有一线性齐次变换

$$\Phi(x) \to \Phi'(x') = L(\Lambda)\Phi(x), \qquad (1.3.2)$$

其中变换矩阵 $L(\Lambda)$ 完全由洛仑兹变换的矩阵 Λ 确定(即依赖于 Λ 的参数).

每一个洛仑兹变换 Λ 相应于一个矩阵 $L(\Lambda)$. 群 Λ 的单位元素相应于一个单位矩阵 $L=I$，而两个元素 Λ_1 和 Λ_2 的乘积相应于 $L(\Lambda_1\Lambda_2) = L(\Lambda_1)L(\Lambda_2)$. 具有上述性质的一系列矩阵 L 称为是群

Λ 的线性表示. 有限阶矩阵 L 形成洛仑群 Λ 的有限维表示. 表示的维数由矩阵 L 的维数即场量 Φ 的分量数确定.

场量的可能类型和它们的变换规律可以从研究洛仑兹群的有限维(不可约)表示得到. 根据群表示理论,洛仑兹群的有限维表示可以是单值的或双值的,即 $\Lambda \to L(\Lambda)$的对应可以是单值的或双值的. 双值表示对物理学的重要性在于,一般说来,场量不是直接可观察的,按双值表示变换的场,其可观察量总被表示成场量的二次型组合,而可观察量在洛仑兹变换下以完全唯一的方式变换. 因此,有两类洛仑兹群的表示,第一类由 $\Lambda \to L(\Lambda)$的单值对应标志,称为(赝)张量表示(张量与赝张量的区别与空间反射下的性质有关,将在这一节的最后加以说明). 按(赝)张量表示变换的量叫做(赝)张量. 第二类由 $\Lambda \to \pm L(\Lambda)$的双值对应标志,称为旋量表示,按旋量表示变换的量叫做旋量.

在洛仑兹变换(1.2.13)下,n 阶(赝)张量 $T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(x)$ 的变换规律为

$$T'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(x') = \Lambda_{\nu_1}{}^{\mu_1}\Lambda_{\nu_2}{}^{\mu_2}\cdots\Lambda_{\nu_n}{}^{\mu_n}T^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x). \qquad (1.3.3)$$

作为特例,一阶(赝)张量 $V^\mu(x)$ 的变换规律为

$$V'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu V^\nu(x), \qquad (1.3.4)$$

这与坐标系的变换(1.2.13)相同. 通常称一阶(赝)张量为(赝)矢量. 零阶(赝)张量 $S(x)$是洛仑兹不变量:

$$S'(x') = S(x), \qquad (1.3.5)$$

通常也称它为(赝)标量.

旋量的变换规律有更复杂的结构. 最简单也最常用的自旋为1/2的旋量(狄拉克旋量)在变换(1.2.13)下的变换矩阵 $L(\Lambda)$为

$$L(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4}\sigma^{\mu\nu}\Lambda_{\mu\nu}\right), \qquad (1.3.6)$$

其中 $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$, γ^μ 是4×4的 γ-矩阵(见第二章).

现在再来讨论空间反射变换 $\mathscr{P}$,由(1.2.16),它使空间轴都

变号而保持时间轴不变：

$$x \to x' = \mathscr{P} x = (x^0, -\boldsymbol{x}). \tag{1.3.7}$$

由于两次应用空间反射等效于单位算符 ($\mathscr{P}^2 = I$) 的作用以及考虑到张量表示的单值性，故在空间反射下，张量 $T(x)$ 的分量的变换只能有两种形式：

$$\mathscr{P} T(x) = \pm T(x). \tag{1.3.8}$$

在空间反射下不变号的零阶张量 $S(x)$ 称为标量：

$$\mathscr{P} S(x) = S(x); \tag{1.3.9}$$

而改变符号的称为赝标量：

$$\mathscr{P} S(x) = - S(x). \tag{1.3.10}$$

在空间反射下，其空间分量变号但时间分量不变号的一阶张量称为矢量(极矢量)：

$$\mathscr{P} V^0(x) = V^0(x), \quad \mathscr{P} \boldsymbol{V}(x) = - \boldsymbol{V}(x). \tag{1.3.11a}$$

或利用协变、逆变矢量统一写为

$$\mathscr{P} V^\mu(x) = V_\mu(x). \tag{1.3.11b}$$

反之，其空间分量不变号但时间分量变号的称为赝矢量(轴矢量)：

$$\mathscr{P} V^0(x) = - V^0(x), \quad \mathscr{P} \boldsymbol{V}(x) = \boldsymbol{V}(x), \tag{1.3.12a}$$

或统一表为

$$\mathscr{P} V^\mu(x) = - V_\mu(x). \tag{1.3.12b}$$

类似地，可定义二阶张量为

$$\mathscr{P} T^{\mu\nu}(x) = T_{\mu\nu}(x), \tag{1.3.13}$$

二阶赝张量为

$$\mathscr{P} T^{\mu\nu}(x) = - T_{\mu\nu}(x), \tag{1.3.14}$$

等等.