微积分

上海科学技术出版社

微　积　分

上海科学技术出版社

微　　积　　分

本书编写组编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　　浙江新华印刷厂印刷

开本787×1092 1/32　印张13.25　字数305,000

1978年5月第1版　1979年8月第2次印刷

印数 200,001—300,000

书号：13119·710　　定价：1.35 元

出版说明

《微积分》第一版由原上海人民出版社于1974年出版，现在由上海化工学院数学教研组的同志根据各方面在使用原书过程中所提出的意见作了修改，重新出版。这次修改除删掉了在微积分课中不常用的某些材料(如优选法一章)外，主要的变动是加强了某些基本概念的讲解，并增添了部分内容，如向量代数及线积分与二重积分的介绍等。考虑到近年来计算机的应用日益普及，在微积分教学的同时，有必要介绍一些有关的数值方法。因此，我们在附录中简单介绍了最常用的几个数值方法。

本书可供高等数学教学时数较少的那些专业(如工科的某些工艺类专业等)作为本课程的教材。书中前三章的一元函数微积分是基本内容，而其他章节(包括注有*号的部分)则可灵活地选学。

在这次修改中我们虽曾考虑了各方面的意见和要求，但由于我们水平不高、经验不足，书中一定还有不少缺点、错误。恳切地盼望广大读者进一步提出批评和建议。

《微积分》编写组

1977年7月

目　录

绪 言

微积分产生于十七世纪后半叶，这决不是偶然的，这首先是人们社会实践的需要.

一直到十七世纪以前，人类关于数学的知识基本上停留在所谓初等数学的阶段. 从十七世纪中到十八世纪末，封建社会中逐渐产生了商业资本和工场. 工业的兴起，采用了机器，为了设计和制造机器就需要掌握机械运动的规律. 商业的发展迫使交通情况改善，而水运的改善要求了解物体在液体中的运动规律. 船只的稳定性的研究促进了质点力学的发展. 航海需要解决测定船只在汪洋大海中的位置，这就有必要对天体运行规律作进一步研究. 对潮汐的研究要求对引力的规律有所了解. 运河的修筑提出了流体力学的各种问题. 货币的流通需要大量的金银，寻求金银矿及其开采成为当时的重要事情. 适应对外扩张和争霸的需要，战争中广泛使用枪炮，就要研究抛射体的运动. 所有这些生产和技术的大量问题迫切要求力学、天文学等基础学科的发展，但这些学科是离不开数学的，因而也就推动了数学的发展.

微积分的产生与科学地继承和发展数学上长期积累的研究成果也是分不开的. 以我国古代来说，三国时期魏人刘徽(公元263年)总结了前人的成果，提出了“割圆术”，他说：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”(《九章算术》)它的具体做法是：从圆内接正六边形做起，令边数成倍地增加，逐步推求圆内接正12边形、正24边形、……

直到正 192 边形的面积，来估计圆的面积(图 0-1)，从而求出 π 的近似值是 3.14. 这里，割圆术的方法就包含着微积分中“无限细分，无限求和”的思想方法的萌芽。又如保留到现在的河北赵州石拱桥 (图 0-2) 是隋代李春(公元 581～618 年)所设计的. 这座跨度达 37 米的大石拱桥是用一条条长方形条石砌成的. 一段段直的条石却砌成了一整条弧形曲线的拱圈. 这就是微积分中局部可以“以直代曲”的基本思想的生动的现实原型.

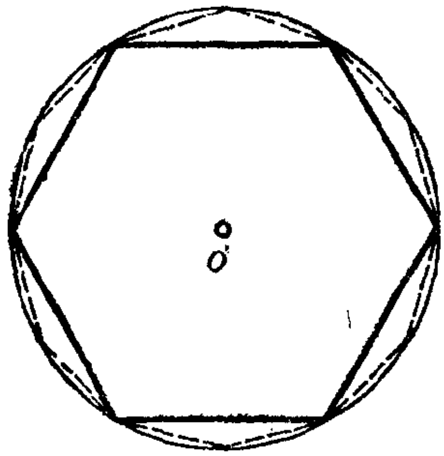

图 0-1

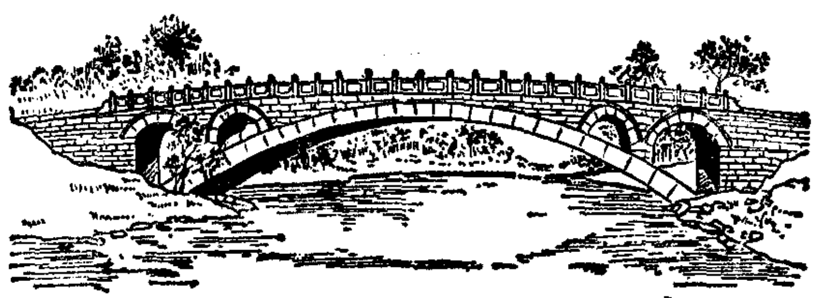

图 0-2

在国外，开普勒(1571～1630)根据长期的天文观测资料，总结出行星运动的三大定律. 伽利略(1564～1642)发现了落体的运动规律，这个规律可表成著名的公式：

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

笛卡儿(1596～1650)关于几何学的工作及费马(1601～1665)对极值问题的研究，特别是他们关于解析几何的工作，开始有了变数概念，并把描述运动的函数关系和几何中曲线问题的研究统

一起来了. 于是解决前述实践中提出来的问题，就可以应用数学上长期积累的关于切线和面积的成果，使微积分的产生不但必要，而且也有了可能. “数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生，并且是由牛顿和莱布尼茨大体上完成的，但不是由他们发明的。”(《自然辩证法》)

为了对微积分研究的问题和方法有一个大致的了解，下面对两个初等数学难以解决的问题作一些初步的分析.

问题一　求自由落体在下落后 1 秒钟这个时刻的瞬时速度 v.

这是求一个作变速运动的物体在某一时刻的瞬时速度问题. 我们知道，根据物理实验总结出自由落体的运动规律为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中，s 是下落的路程（米），g 是重力加速度（米/秒^2），通常取 $g=9.8$，t 是下落的时间（秒）. 这一公式给出了自由落体下落的路程与时间的关系，现在就是要我们从这一关系中求出物体在下落后 1 秒钟这一时刻的速度.

对于匀速运动，有求速度的公式：

$$\text{速度}=\frac{\text{路程}}{\text{时间}}.$$

现在自由落体运动是变速运动，上述公式不再适用. 在这里遇到了“匀”与“变”的矛盾，为了解决这个矛盾，需要作进一步的研究.

我们知道，当 $t=1$(秒)时，

$$s=\frac{1}{2}g\times1^2=4.9(\text{米});$$

当 $t=t_1$（设 $t_1>1$）时，

$$s=\frac{1}{2}gt_1^2=4.9t_1^2\text{（米）}.$$

虽然现在无法用上述求速度的公式来求 $t=1$ 秒时的速度，但可以用它求得在 $t=1$ 到 $t=t_1$ 这段时间内的平均速度

$$\bar{v}=\frac{4.9t_1^2-4.9}{t_1-1}=\frac{4.9(t_1+1)(t_1-1)}{t_1-1}=4.9(t_1+1).$$

这个值是随着 t_1 的不同而不同的．因为速度是逐渐地变化的，在很短的时间内，速度的变化很小，因此只要我们把 t_1 取得很接近于 1，那就可以把求得的 $\bar{v}$ 作为 $t=1$ 秒时速度 v 的近似值，而且 t_1 愈是接近于 1，$\bar{v}$ 就愈接近于 v．例如，若取 $t_1=1.1$（秒），则

$$\bar{v}=4.9(1.1+1)=10.29\text{（米/秒）};$$

若取 $t_1=1.01$（秒），则

$$\bar{v}=4.9(1.01+1)=9.849\text{（米/秒）}.$$

因为 1.01 比 1.1 更接近于 1，所以自然可信，用 $t_1=1.01$ 算得的 $\bar{v}$ 比用 $t_1=1.1$ 算得的 $\bar{v}$ 更接近于 v．但是不管 t_1 多么接近于 1，作为平均速度的 $\bar{v}$，毕竟是 v 的近似值，而不是 v 的精确值．那么如何把近似转化为精确呢？静止地、孤立地研究问题已经不行了，我们必须用运动的观点去考察当 t_1 无限地接近于 1 时 $\bar{v}$ 变化的情况，才能最后确定 v 的精确值．

问题二 求由抛物线 $y=x^2$，直线 $x=1$ 和 x 轴围成的曲边三角形 OBC（图 0-3）的面积 A．

在初等数学中，我们已经学过三角形、矩形、梯形等面积的计算．在生产斗争和科学实验中，经常要求我们计算许多不规则的平面图形的面积．如果这些图形是由直线围成的，那末，我们总可以把它分割成有限个三角形和矩形，分别算出这些三角

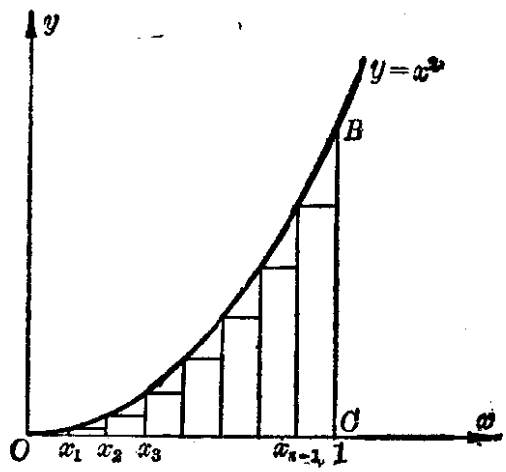

图 0-3

形和矩形的面积，然后加起来就得到整个图形的面积．但现在遇到的是曲边三角形，这里有一条边是曲线，为了求得它的面积，就要解决"直"与"曲"的矛盾．

古代的"割圆术"和古代劳动人民用一块块条石砌成拱形的桥洞给了我们启示，从整体看是曲的东西，在局部却可以"以直代曲"．因此为创造条件来促使矛盾的转化，我们把曲边三角形的底边 OC 分成 n 等分，每一份的长度为 $\frac{1}{n}$，分点的坐标为 $x_0=0,\ x_1=\frac{1}{n},\ x_2=\frac{2}{n},\ \cdots,\ x_{n-1}=\frac{n-1}{n},\ x_n=1$．再过这些分点引平行于 y 轴的直线，那么曲边三角形就分成了 n 个狭窄的曲边梯形(即有一腰是曲线的梯形)．对于每个窄的曲边梯形，我们看到曲边上的点到 x 轴的高度是不均匀地变化的，但是只要 n 取得相当大，高度的变化就很小，从而可用不变的高度近似代替变的高度，即用窄的矩形的面积近似地代替窄的曲边梯形的面积(图 0-3)．这些窄的矩形的面积分别为

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

把它们加起来就得到台阶形的面积

$$A_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$
$$=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2].$$

A_n 是 A 的近似值，而且从图 0-3 可直观地看出，n 愈大，A_n 就愈接近于 A. 但是不管 n 多么大，作为台阶形面积的 A_n 毕竟是 A 的近似值，而不是 A 的精确值. 为了把近似转化为精确，就不能静止地、孤立地研究问题，而必须用运动的观点去考虑当 n 无限变大时 A_n 变化的情况，从而确定出 A 的精确值.

问题一和问题二是用微积分方法可以解决的两个典型的问题，前者属于微分学问题，后者属于积分学问题. 用微积分解决问题的基本思想是先在局部“以不变代变”或“以直代曲”，求得所求量的近似值，然后在无限变化的过程中实现近似转化为精确.

从对这两个问题的初步分析中可以看到：“**变数的数学——其中最重要的部分是微积分——本质上不外是辩证法在数学方面的运用。**”（《反杜林论》）因而我们要学好微积分，为三大革命运动服务，就必须坚持唯物辩证法的认识论，坚持理论和实际统一的原则. 这应该成为我们的一项基本认识.

第一章　函数和极限

第一节　变量和函数

毛主席指出:“**一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的**”. 事物的互相联系及其内部规律性,在数量这一侧面就表现为各个数量之间以及各数量在变化过程中的相互依赖关系,在数学上叫做函数关系. 这就是我们所要讨论的对象.

一、变　　量

在我们研究事物的过程中, 常会遇到各种不同的量, 如:时间、长度、温度、重量等等. 各种量,按照不同的情况,有的取不同的数值, 有的取同一个数值. 我们称在某一过程中取不同数值的量为变量,只取同一数值的量为常量. 习惯上, 为了易于辨别, 一般用 x、y、z 等字母表示变量, 用 a、b、c 等字母表示常量.

应当注意, 一个量是常量还是变量, 是对某一过程来说的, 不是绝对的. 情况变了, 常量和变量也可能相互转化; 另外, 在问题的讨论过程中, 如果某个变量的变化相对于其他变量来说可以忽略不计,或者在容许范围内为了处理问题的方便,我们也可把它当作常量来对待.

变量有时可以毫无限制地取实数值,有时要受到某种限制,这要根据问题的具体性质来决定. 例如温度的变化不能低于 $-273°C$, 圆的内接正多边形的边数只能是不小于 3 的自然数.

通常我们用区间表示变量的变化范围．一般，区间可用括号或不等式或图形这三种办法来表示．例如，如果变量 x 在 a 与 $b(a<b)$ 两数之间变化，就把这个区间记为 (a, b) 或 $a<x<b$，a 和 b 叫做区间的端点．这种区间叫做开区间，在图形上就是数轴上介于点 a 和点 b 之间的全部点，端点 a 和 b 用圈点表示，如图 1-1．如果把端点和区间内的点一起来考虑，就叫闭区间，记为 $[a, b]$ 或 $a\leqslant x\leqslant b$，这时图中的 a 与 b 就用实点表示．还可以有半开半闭的区间 $[a, b)$ 与 $(a, b]$，它们可分别记为 $a\leqslant x<b$ 与 $a<x\leqslant b$．图 1-2 表示的是左闭右开区间 $[a, b)$．推广来用，$[a, +\infty)$ 就表示 x 在不小于 a 的范围内变化，可记为 $x\geqslant a$ 或 $a\leqslant x<+\infty$，也可在数轴上表示为图 1-3 那样．类似地，也有 $(a, +\infty)$，$(-\infty, b]$，$(-\infty, b)$ 与 $(-\infty, +\infty)$ 等．

开区间　　　　闭区间

图 1-1

图 1-2

图 1-3

二、函　数

1．自变量与因变量

实际问题中的变量常不止一个，而是几个，它们一同变化，其中某些量的变化往往依赖于另一些量的变化，我们称后者为自变量，前者为因变量．

[例1] 自由落体的运动规律是

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

其中 g 是常量，s 和 t 是变量，分别表示物体下落过程中，下落的路程及时间.

从上面的关系式可以看出路程 s 是随着时间 t 变化的，故 t 可看作自变量，而 s 是因变量.

[例2] 设有一动点，沿圆心在原点而半径为1的上半圆周运动，则动点的横坐标 x 和纵坐标 y 都是变数．若把 x 当作自变量，则 y 就是因变量，而且由解析几何知道成立关系式

$$y=\sqrt{1-x^2}.$$

这些自变量与因变量的关系，就是函数关系．因变量就是函数．确切一点说，有如下的函数定义.

函数定义 设在某一过程中有两个变量 x 和 y，变量 y 随着变量 x 一起变化，而且依赖于 x．当 x 取某个特定的值时，y 按一定的规律有确定的对应值，就称 y 是 x 的函数．这里 x 是自变量，而 y 是因变量．y 与 x 之间存在函数关系这件事，可一般地记为

$$y=f(x) \quad 或 \quad y=y(x).$$

这里，使函数有意义的自变量 x 的变化范围称为函数的定义域，相应的因变量 y 的变化范围称为函数的值域.

函数的定义域一般由所讨论的问题的含义或函数的数学式子自然地确定．如在例1的函数关系中，自变量 t 表示开始下落后的时间，在考虑物体下落的过程中，t 不能是负的，故定义域为 $t\geqslant 0$．在例2中由表达函数关系的数学式子可知，x 的变化，必须保证被开方数 $1-x^2$ 非负，即在 $1-x^2\geqslant 0$ 时才能由 x 的值确定 y 的对应值，故函数的定义域是 $-1\leqslant x\leqslant 1$.

[例 3]　求下列函数的定义域

(1) $y=\dfrac{1}{x}$;　　　　　　(2) $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}+\sqrt{x}$.

解: (1) $y=\dfrac{1}{x}$.

显然，这里的分母 x 不能为零，函数的定义域是 $x\neq 0$ 的一切实数，或 $(-\infty, 0)$ 与 $(0, +\infty)$.

(2) $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}+\sqrt{x}$.

x 所允许取的值既要能确定 $\dfrac{x^2+1}{x-1}$，又要能确定 $\sqrt{x}$. 按照前者应有 $x\neq 1$，按照后者应有 $x\geqslant 0$. 故这个函数的定义域是 $x\geqslant 0$ 而且 $x\neq 1$，或 $[0, 1)$ 与 $(1, +\infty)$.

2. 函数记号

这里对定义中用到的函数记号 $f(x)$ 的含义略作解释.

一般说来，常用

$$y=f(x)$$

代表一时难以(或不必)具体写出的函数关系，这里 y 是自变量 x 的函数. 以后将会看到，引进函数的抽象记号 $f(x)$，对于研究与表达函数的普遍性质以及有关函数的运算的普遍规律是很有必要的. 这同在代数中用字母代表了数，便能更充分地研究与表达数字运算的普遍规律的情形是类似的.

在讨论函数的普遍性问题时，$f(x)$ 可泛指任何合乎条件的函数. 但在具体问题中，它就代表某个确定的函数. 例如，设 $y=f(x)$，并已知

$$f(x)=x^3-2x^2+3x-1,$$

那末这里的 $f(x)$ 就是一个确定的函数了，它具体指出了由 x 的值去求函数 y 的对应值的方法，这里 $f(\quad)$ 表示了对括号中的