围岩力学分析中的解析方法

陈 子 荫　编著

煤 炭 工 业 出 版 社

（京）新登字 042 号

内 容 提 要

本书系统地叙述围岩力学分析中的力学理论、解析方法及应用。全书分为三篇：第一篇平面弹性复变方法，是处理地下孔口问题的理论起点。书中对幂级数解法、柯西积分方法及解析延拓方法做了详尽阐述，并对映射函数近似求法，解双连通域问题的交替法及全平面应变问题的解法做了介绍。第二篇岩石各向异性力学基础，包括几何各向异性及物理各向异性。第三篇岩石流变力学基础及应用，包括线粘弹力学及粘塑力学及其在岩石工程中的应用，除拉普拉斯变换解法外，还介绍了积分算子方法。第二篇、第三篇中，有部分内容填补了中文文献的空白。

本书可供已有一定数学、力学基础的岩石力学专业人员提高理论水平之用，适合力学研究人员、研究生及博士生阅读。

围岩力学分析中的解析方法

陈子荫 编著

责任编辑：王捷帆

*

煤炭工业出版社 出版

（北京安定门外和平里北街 21 号）

煤炭工业出版社印刷厂 印刷

新华书店北京发行所 发行

*

开本 787×1092mm $^{1}/_{16}$ 印张 $26^{3}/_{4}$

字数 633 千字 印数 1—570

1994 年 4 月第 1 版 1994 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 7-5020-0866-7/TD · 803

书号 3632 G0268 定价 55.00 元

前　　言

岩体是力学性质很复杂的介质。本世纪 50 年代以来，围岩力学分析广泛应用了固体力学的理论成果，因而深入研究围岩的力学性态需要有坚实的固体力学理论基础。

固体力学理论经过近 200 年的积累，现已成为一门内容丰富、分支很多的学科。几乎每个分支都或多或少地引起岩石力学工作者的注意，这是因为岩石工程中遇到的许多复杂力学现象，至今还未得到合理的解释，促使研究者关心固体力学的一切理论成果。

从唯象的观点来看，岩体属各向异性流变介质，因此，各向异性体力学、流变力学这两个固体力学分支与岩体的力学研究，有着特别密切的关系。尽管国内出版过一些可供岩石工程领域科技人员阅读的力学书籍，对培养岩石力学研究队伍起过良好的作用，但在上述两个分支上尚缺少专门著作，科技人员对这些分支缺乏系统了解和掌握，这对进一步提高我国岩石力学研究水平明显不利。

本书就是针对这种状况而写的。

全书分三篇，包括平面弹性复变方法、各向异性岩石力学基础、岩石流变力学基础及应用。

平面弹性复变方法特别适合求解地下孔口问题，它应是围岩力学分析的理论起点。本书对三种方法（幂级数、柯西积分、解析延拓）作了全面、系统的叙述，这在国内著作中应属罕见，与 Мусхелишвили 的《数学弹性力学的几个基本问题》"（中译本）相比，本书的叙述更适合中国读者的阅读习惯（这对读懂是重要的），还增加了映射函数的近似求法、解双连通域问题的交替法及全平面应变问题的基本方程及复变函数解答三章，这对理论在工程中应用是重要的，第一篇内容的掌握也为阅读第二篇打下必要的基础。

各向异性岩石力学基础的内容国内尚无著作系统地加以介绍，本书是国内第一本。将各向异性体力学应用到岩石工程中，苏联的研究工作稍多，西方在 80 年代才刚刚开始。既然岩体是各向异性介质，这一篇的重要性就显而易见了。本篇还包括拉压模量不同（物理各向异性）弹性理论的简略介绍，这个力学分支在岩石工程中的应用潜力还很大，因为从定性上看，岩体是裂隙介质，拉压模量不同应是必然结果，只是目前还缺乏系统的实验结果作定量的分析。

岩石流变力学基础及应用一篇着重介绍线粘弹力学及其在围岩力学分析中的应用，和前两篇相比，这一篇列举了较多的岩石工程中的应用算例。书中对微分型模型与积分型模型作了全面的叙述，理论内容丰富，解法中除 Laplace 变换方法外还介绍了积分算子方法。这种方法在俄文文献中广泛应用，国内知者甚少，本篇填补了这个空白。

作者 10 年来一直从事岩石力学研究生的教学和岩石力学的研究，深切感到，要提高我国岩石力学的理论研究水平，在培养人才上要尽力把学校课程水准接近理论前沿，要出版深一层次的理论书籍供广大科技工作者阅读和提高。

作者在成书过程中得到冯豫教授的一贯支持，在联系出版方面得到周文安教授的鼎力玉成，在此表示深切的感谢。

全书文字誊写是陈频在工作的余暇中完成的，插图草稿由陈耀绘制，书稿的完成得到妻子王淑梅女士的支持。

对本书的批评及建议请直接告知作者，不胜感激。

陈 子 荫

1993.2.26. 于山东矿业学院

PREFACE

Rock mass is natural media with complicated mechanical properties. The theoretical achievements of solid mechanics have been extensively applied to the analysis of adjoining rock since 1950′s. For this reason, a good theoretical basis of solid mechanics is requisite for deeply researching mechanical behaviour of adjoining rock.

Being researched for nearly 200 years, the theories of solid mechanics have been developed into a subject including a wealth of contents and a lot of branches. Almost all the branches of solid mechanics have attracted researchers′ attention because a lot of complicated mechanical phenomena have not been explained reasonably up to now, which impels researchers to be interested in all theoretical achievements of solid mechanics. According to the phenomenological viewpoint, rock mass belongs to anisotropic rheological media. Therefore, researches on mechanics of anisotropic bodies and rheological mechanics, two branches of solid mechanics, are close related to the research of rock mechanics. Although some books on mechanics suitable for scientific and technical persons in the field of rock engineering have been published in China, and are helpful for forstering research workers in rock mechanics,so far shortage of books about mechanics of anisotropic bodies and rheological mechanics leads scientific and technical workers to understand and master knowledge about two branches mentioned above unsystematically, which is unfavourable for further rasing our research level in rock mechanics.

This book is written in view of what mentioned above.

The book consists of three parts, Part A and Part B and Part C. The contents in Part A are the complex variable method of two—dimensional problems in elasticity. The foundation of anisotropic rock mechanics in Part B and the foundation of rock rheological mechanics and its application in Part C are discussed respectively.

The complex variable method is especially suited to solve the problems about underground openings. Three methods, power series and Cauchy integral and analytic continuation, are systematically discussed in the book. The narrative of the book is helpful to Chinese readers to understand the contents of the book as compared with "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity" (by Мусхелишвили). In addition, there are three chapters, approximate solution of mapping function and alternating method of doubly connected region and the solution of complete plane strain problems by complex variable method, which chapters are important to apply relate theories to rock engineering. The knowledge of Part A is essential to master the contents of Part B.

There are not special books systematically expounding the foundation of anisotropic rock mechanics at home. The book is the first one in China. The former USSR made a

目　　录

第一篇　平面弹性复变方法

第一章　弹性力学平面问题的复变函数表示 ······ 1
§1　概述 ······ 1
§2　双调和函数的复变函数表示 ······ 1
§3　位移分量和应力分量的复变函数表示 ······ 4
§4　φ_1 (z)、ψ_1 (z) 的确定程度 ······ 6
§5　边界条件的复变函数表示 ······ 7
§6　有限多连通域中 φ_1 (z)、ψ_1 (z) 的形式 ······ 9
§7　无限域中 φ_1 (z)、ψ_1 (z) 的形式 ······ 14
§8　考虑有体力时的讨论 ······ 17
§9　保角变换与正交曲线坐标 ······ 21
第二章　幂级数解法 ······ 24
§1　概述 ······ 24
§2　无限平板中有一半径为 R 圆孔的解 ······ 24
§3　无限平板中圆孔周边作用沿 x、y 轴向的均布面力 ······ 28
§4　无限平板内作用一集中力的解 ······ 30
§5　受单向拉伸无限平板中有一椭圆孔问题 ······ 30
§6　富里哀级数的复形式 ······ 35
§7　幂级数解法的一般讨论 ······ 36
§8　同心圆环问题的解答 ······ 39
第三章　柯西积分解法 ······ 43
§1　概述 ······ 43
§2　单连通域中的柯西积分公式 ······ 43
§3　用于圆域的讨论 ······ 45
§4　Harnack 定理 ······ 47
§5　无限平板中有一半径为 R 圆孔的解 ······ 49
§6　带椭圆孔无限平板的单向拉伸 ······ 51
§7　无限平板中椭圆孔周边一部分受有均布法向压力的解 ······ 56
§8　圆孔边缘受集中径向力的解 ······ 60
§9　正方形孔的解 ······ 62
§10　圆盘受到作用于周边的集中力 ······ 67
§11　柯西积分解法的一般讨论 ······ 70
§12　正方形板受一对集中力作用 ······ 76
§13　含一刚性椭圆核无限平板的单向拉伸 ······ 82
§14　有限单连通域外力需满足的条件 ······ 87
第四章　映射函数的近似求法 ······ 89

§1 概述 …… 89
§2 Мелентьев 法 …… 90
§3 利用多角形逼近的近似求法 …… 97
§4 三角插值法 …… 102
第五章 解双连通域问题的交替法 …… 106
§1 概述 …… 106
§2 Schwatz 交替法 …… 106
§3 静水压力下无限平面中具有两个圆孔的应力解 …… 109
第六章 全平面应变问题的基本方程及复变函数解法 …… 114
§1 概述 …… 114
§2 基本方程 …… 114
§3 反平面问题的复变函数表示 …… 115
第七章 化归为 Riemann 问题的解法 …… 117
§1 概述 …… 117
§2 柯西型积分 …… 117
§3 Hölder 条件，柯西型积分主值 …… 118
§4 Сохоцкий-Plemelj 公式 …… 120
§5 在实轴上的柯西型积分 …… 122
§6 单连通域中的 Riemann 问题 …… 125
§7 解析延拓 …… 126
§8 半平面问题 …… 126
§9 单位圆圆域问题 …… 129
§10 受均布径向压力 p 圆盘的解 …… 133
§11 圆盘边作用一对共线力的解 …… 133
§12 圆孔周边作用均布面力的解 …… 135
§13 单、双向荷载作用下圆孔问题的解 …… 136
§14 圆盘内受有一对共线集中力的解 …… 137
§15 其他域问题的一般性讨论 …… 137
§16 无限域问题举例 …… 141
§17 有限域问题举例 …… 143
§18 多值函数 …… 147
§19 $F^+(t)-GF^-(t)=0$ 的解 …… 150
§20 非齐次问题的解法 …… 153
§21 具有共线直裂纹无限平板的拉伸 …… 153
§22 $X(\infty)$及$X(0)$ …… 157
§23 圆域问题 …… 158
§24 $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)dt}{X^+(t)(t-z)}$的计算 …… 162
§25 半平面混合边值问题 …… 162
§26 其他域问题 …… 169
§27 圆孔位移边值问题 …… 170
第八章 化归为积分方程求解 …… 172
§1 概述 …… 172

§2　有界单连通域的应力边值问题 …… 172
§3　无限单连通域的应力边值问题 …… 173
§4　圆盘问题的解 …… 174
§5　有限多连通域的应力边值问题 …… 175
§6　积分方程 …… 176

第二篇　各向异性岩石力学基础

第一章　各向异性线弹力学的基本方程 …… 177
§1　广义虎克定律 …… 177
§2　A_{qr}与a_{qr}的转换关系 …… 180
§3　弹性常数的转轴计算 …… 180
§4　正交各向异性与横观各向同性 …… 182
§5　弹性常数取值范围的限制 …… 182
§6　曲线型各向异性 …… 186
§7　边值问题 …… 187
第二章　最简问题举例 …… 188
§1　端面作用轴向均布力下杆的拉伸 …… 188
§2　静水压力 p 作用下的压缩（自重不计） …… 190
§3　悬臂梁端点受弯矩 M_1 作用的解 …… 192
第三章　横观各向同性体的空间轴对称问题 …… 193
§1　基本方程 …… 193
§2　圆柱体侧面作用轴对称荷载的解 …… 197
§3　自重作用下圆形立井围岩的应力分析 …… 199
第四章　广义平面应变问题与平面问题 …… 203
§1　广义平面应变 …… 203
§2　平面应变与平面应力 …… 207
§3　应力函数的一般表达式 …… 209
§4　应力分量及位移分量用 F_1（z_1）及 F_2（z_2）的表示 …… 213
§5　用 Φ_1（z_1）、Φ_2（z_2）表示的应力边界条件与位移边界条件 …… 216
§6　Φ_1（z_1）、Φ_2（z_2）的确定程度 …… 217
§7　外力主矢量与主矩的表示式 …… 220
§8　各向异性体平面问题中各对复自变量之间的关系 …… 221
§9　仿射变换 …… 222
§10　ϕ_1（z_1）、ϕ_2（z_2）的函数形式 …… 224
§11　Schwatz 公式 …… 229
§12　带椭圆孔无限平面问题的解 …… 230
§13　带椭圆孔各向异性板的拉伸 …… 232
§14　椭圆孔边作用均布剪力的解 …… 236
§15　椭圆孔边作用均布法向压力的解 …… 237
§16　椭圆孔边部分作用有均布法向压力或集中力的解 …… 238
§17　带椭圆孔无限平面的位移边值问题 …… 241
§18　在力偶 M_0 作用下刚性椭圆核（或环）附近的应力 …… 242

§19　带刚性椭圆核无限平面的拉伸 …… 243
§20　直接用柯西积分的解法 …… 244
§21　带有近似于椭圆孔的平面问题的近似解法 …… 246
§22　几种孔口边线的参数方程 …… 251
§23　弱正交各向异性体带孔口平面问题的近似解法 …… 254
§24　薄层岩体的等效各向异性模型 …… 259
§25　广义平面应变问题中的应力函数表达式 …… 264
§26　广义平面应变问题中应力分量与位移分量的表示式 …… 267
§27　边界条件 …… 268
§28　椭圆孔应力分析的一般性讨论 …… 268
§29　椭圆孔的几个算例 …… 272
§30　圆孔中镶有各向同性弹性环的解 …… 275
第五章　圆柱型各向异性 …… 282
§1　基本方程 …… 282
§2　受均布径向压力作用下厚壁圆筒的解 …… 284
§3　组合环的应力分析 …… 285
§4　非轴对称荷载下的解法 …… 285
第六章　岩体各向异性塑性及各向异性强度 …… 287
§1　岩体的各向异性塑性 …… 287
§2　岩体各向异性强度准则 …… 288
第七章　拉压模量不同的弹性理论 …… 291
§1　概述 …… 291
§2　弹性定律 …… 291
§3　基本方程 …… 295
§4　厚壁圆环的轴对称问题 …… 300

第三篇　岩石流变力学基础及应用

第一章　线粘弹力学及其应用 …… 303
§1　概述 …… 303
§2　蠕变与松弛 …… 303
§3　微分型本构方程的一维形式 …… 305
§4　微分型本构方程的三维形式 …… 315
§5　对应原理 …… 318
§6　微分型本构方程的 Laplace 变换 …… 319
§7　半空间自重应力的粘弹解 …… 322
§8　两向等压下带圆孔无限平面的粘弹解 …… 324
§9　考虑体积应变具有粘弹性质时的本构方程 …… 328
§10　圆形立井围岩的粘弹分析 …… 328
§11　微分型本构方程化为积分形式的讨论 …… 330
§12　Dirac δ 函数 …… 336
§13　卷积积分 …… 336
§14　遗传积分型的本构方程 …… 338

§ 15 粘弹岩体中巷道的支护设计 …… 344
§ 16 积分型本构方程的三维形式 …… 345
§ 17 两向不等压下圆形巷道的径向位移 …… 346
§ 18 材料性质随时间变化时的积分型本构方程 …… 348
§ 19 两个基本定理 …… 352
§ 20 巷道地压计算 …… 358
§ 21 材料性质随时间变化的微分型本构方程 …… 368
§ 22 拉压不同的粘弹模型的本构方程 …… 369
§ 23 非线性微分型模型 …… 370
§ 24 Volterra 算子 …… 372
§ 25 第二类 Volterra 积分方程 …… 374
§ 26 预解算子的乘法规则 …… 375
§ 27 分式指数算子 …… 377
§ 28 描述岩石蠕变的本构方程 …… 379
§ 29 无支护圆形立井围岩的粘弹分析 …… 380
§ 30 无支护水平圆形巷道的粘弹分析 …… 383
§ 31 立井及水平圆形巷道有支护问题的解 …… 390
第二章 粘塑力学 …… 403
§ 1 概述 …… 403
§ 2 一维本构方程——Bingham 体与西原体 …… 403
§ 3 三维应力状态下的粘塑性本构关系 …… 405
§ 4 岩石的弹|粘塑性本构方程 …… 407
§ 5 考虑蠕变稳定阶段的岩石三维本构方程 …… 410
参考文献 …… 415

第一篇 平面弹性复变方法

第一章 弹性力学平面问题的复变函数表示

§1 概 述

弹性力学的解析解法有分离变量法、积分变换法、积分方程法、变分法及复变函数法。在弹性力学初级教程中，由于多是采用逆解法、半逆解法来求解具体问题。这就产生一种印象，好象求解主要靠试凑的办法，在边界形状稍复杂的情形下显得难以着手。通过对复变函数法的了解，可以部分地消除这种印象。在岩石工程中遇到的平面弹性力学问题多属于孔口问题，对于这类问题，复变函数法正好显示出巨大的威力。用复变函数法之所以有效，是因为有保角变换这个工具，利用它可以把复杂形状的边界变换为简单形状的边界，把在简单边界下求得的解再变换回去，就求得原问题的解，在求简单边界下的解时，有一套程序性的方法，不需要试凑。

利用复变函数理论求解平面弹性问题时，有三类方法可以采用，即幂级数解法、柯西积分方法及解析延拓方法，其中以解析延拓方法最为通用，可以解弹性力学的三类边值问题，但需要用到的数学知识较多。前两种方法难以用来求解混合边值问题。

§2 双调和函数的复变函数表示

弹性力学平面问题的应力解法最终归结为：在给定的应力边界条件下求解一个双调和方程。双调和方程是一个四阶偏微分方程。

在解常微分方程时，一般都是先求出通解，然后利用定解条件求出具体问题的解。然而，在求解偏微分方程时，却发现这种先求通解的办法对求具体问题的解几乎毫无用处，其原因是，通解中出现的待定函数(在常微分方程通解中出现的是待定常数)在确定时发生困难，因此，产生一种极端的观点，认为求偏微分方程的通解对求具体问题的解几乎无任何好处。

然而，这种情况在平面弹性复变解法中遇到了例外。在平面弹性复变方法中，正是先求出方程的通解，然后再利用边界条件去确定具体问题的解。沿着这样的求解途径发展出一套完整的解法。

满足双调和方程的函数称为双调和函数。平面弹性问题的应力函数要满足的是双调和方程，因此它必定是数学上的双调和函数。所谓双调和函数的复变函数表示就是双调和方程用复变函数表示的通解。

复变函数中的解析函数的实部和虚部都应满足拉普拉斯方程，而从拉普拉斯方程$\nabla^2 U=0$和双调和方程$\nabla^4 U=\nabla^2(\nabla^2 U)=0$立即看出，拉普拉斯方程的解一定是双调和函数，这里，符号∇^2表示拉普拉斯算子。这就启示我们，双调和函数与解析函数有一定的联系，下

面将证明，双调和函数可用两个以一定方式联系起来的任意解析函数来表示。

在直角坐标系中，$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$，设$\nabla^2 U=P(x,y)$，代回 $\nabla^2\nabla^2 U=0$ 可见 $P(x,y)$ 是调和函数，这样就可以利用 $P(x,y)$ 构造出一个解析函数 $f(z)$：

$$f(z)=P(x,y)+iQ(x,y),\ z=x+iy$$

$Q(x,y)$也是调和函数，但不是任意的，它与 $P(x,y)$共轭，即满足柯西——黎曼条件，这是从复变函数理论已知道的，即解析函数的实部和虚部不是互相无关，知道 $P(x,y)$就可以求出 $Q(x,y)$。要注意的是，这样构造出来的解析函数 $f(z)$，在单连通域是单值函数，在多连通域则是多值函数。

由 $f(z)$的积分，定义复变函数 $\varphi_1(z)$

$$\varphi_1(z)=\frac{1}{4}\int f(z)dz=p(x,y)+iq(x,y)$$

由复变函数理论可知，解析函数的积分也是解析函数，因此，这里定义的 $\varphi_1(z)$也是解析函数。

解析函数的特点是，在 z 平面上沿任一方向求导结果都一样，所以有 $\varphi'_1(z)=\frac{\partial p}{\partial x}+i\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{1}{4}f(z)=\frac{1}{4}(P+iQ)$，$P$、$Q$、$p$、$q$ 分别都是 x，y 的函数。以后为了书写简便，在不会引起含混之处，函数的自变量不再写出。

由柯西——黎曼条件，$\varphi'_1(z)$还可写成 $\varphi'_1(z)=\frac{\partial q}{\partial y}-i\frac{\partial p}{\partial x}$，这样一来就有 $\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial y}=\frac{1}{4}P$，$\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{1}{4}Q$。而$\nabla^2(U-px-qy)=0$ 成立，这是因为 $\nabla^2(U-px-qy)=\nabla^2U-\nabla^2(px)-\nabla^2(qy)$，而

$$\begin{aligned}\nabla^2(px)&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(px)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(px)\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(p+x\frac{\partial p}{\partial x}\right)+x\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\\&=\frac{\partial p}{\partial x}+x\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial p}{\partial x}+x\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\\&=2\frac{\partial p}{\partial x}+x\nabla^2 p\\&=2\frac{\partial p}{\partial x}\end{aligned}$$

类似地有$\nabla^2(qy)=2\frac{\partial q}{\partial y}$，这里利用 $p+iq$ 是解析函数，故$\nabla^2 p=\nabla^2 q=0$，由$\nabla^2 U=P$ 故 $\nabla^2(U-px-qy)=P-2\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}\right)=P-2\left(\frac{1}{4}P+\frac{1}{4}P\right)=P-P=0$

$U-px-qy$ 是调和函数，用 $p_1(x,y)$或简写为 p_1 表示，有了 p_1 又可以构造一个解析函数 $\theta_1(z)=p_1+iq_1$，即 $p_1=Re\theta_1(z)$

注意到，$\varphi_1(z)\cdot\bar{z}=(p+iq)(x-iy)=px-ipy+iqx+qy=(px+qy)+i(qx-py)$，即 $\mathrm{Re}\,[\varphi_1(z)\cdot\bar{z}]=px+qy$。因此 $U-px-qy=p_1$ 可写成

$$U=p_1+px+qy=\mathrm{Re}\,[\theta_1(z)+\bar{z}\varphi_1(z)]$$

这就是一个双调和函数用两个解析函数 $\theta_1(z)$、$\varphi_1(z)$的表示式，这个公式是由 Goursat 在

1898 年得出的，因此也称作 Goursat 公式。

由 $\mathrm{Re}\theta_1(z)=\dfrac{\theta_1(z)+\overline{\theta_1(z)}}{2}$，Re $[\bar{z}\varphi_1(z)]=\dfrac{1}{2}[\bar{z}\varphi_1(z)+z\overline{\varphi_1(z)}]$可得 $2U=\bar{z}\varphi_1(z)+z\overline{\varphi_1(z)}+\theta_1(z)+\overline{\theta_1(z)}$，这里 $z\overline{\varphi_1(z)}$与 $\bar{z}\varphi_1(z)$共轭。

双调和方程的解用两个解析函数表示的以上推法，只是文献中已有的推法中的一种，这种推法人为地引入两个解析函数，由于 U 的自变量是 x，y 在推导逻辑上使人感到并不自然，过于间接。若是把自变量改用 z、$\bar{z}$，则双调和方程可以直接进行积分，求得以复变量 z、$\bar{z}$ 为自变量的通解形式，显得简单直接。其过程如下

由 $z=x+iy$，$\bar{z}=x-iy$ 有$\dfrac{\partial z}{\partial x}=1$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=i$，$\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial x}=1$，$\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial y}=-i$，双调和函数 U 的自变量原来是 x，y，现改为 z、$\bar{z}$，则由复合函数求导法则$\dfrac{\partial U}{\partial x}=\dfrac{\partial U}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial U}{\partial \bar{z}}\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial x}=\dfrac{\partial U}{\partial z}+\dfrac{\partial U}{\partial \bar{z}}$，$\dfrac{\partial U}{\partial y}=\dfrac{\partial U}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{\partial U}{\partial \bar{z}}\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial y}=i\dfrac{\partial U}{\partial z}-i\dfrac{\partial U}{\partial \bar{z}}$联合得 $\dfrac{\partial U}{\partial x}+i\dfrac{\partial U}{\partial y}=2\dfrac{\partial U}{\partial \bar{z}}$，$\dfrac{\partial U}{\partial x}-i\dfrac{\partial U}{\partial y}=2\dfrac{\partial U}{\partial z}$

又 $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\right)\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}+2\dfrac{\partial^2 U}{\partial z\partial \bar{z}}+\dfrac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2}$类似地有

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial \bar{z}}-\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2}$$

故 $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\nabla^2\ U=4\dfrac{\partial^2 U}{\partial z\partial \bar{z}}$，即 $\nabla^2=4\dfrac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}}$

这样一来，就有$\nabla^2\nabla^2 U=16\dfrac{\partial^4 U}{\partial z^2\partial \bar{z}^2}=0$ 或 $\dfrac{\partial^4 U}{\partial z^2\partial \bar{z}^2}=0$

这就是双调和方程用 z、$\bar{z}$ 作自变量的表示式，对此式依次积分即可求得双调和方程的通解，过程如下：

设 $U_3=\dfrac{\partial U}{\partial z}$，$U_2=\dfrac{\partial^2 U}{\partial z\partial \bar{z}}=\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\dfrac{\partial U}{\partial z}\right)=\dfrac{\partial U_3}{\partial \bar{z}}$，$U_1=\dfrac{\partial^3 U}{\partial z^2\partial \bar{z}}=\dfrac{\partial U_2}{\partial z}$，则 $\dfrac{\partial^4 U}{\partial z^2\partial \bar{z}^2}=\dfrac{\partial U_1}{\partial \bar{z}}=0$

故 $U_1=F_1(z)$

由 $U_1=\dfrac{\partial U_2}{\partial z}=F_1(z)$ 故 $U_2=\int F_1(z)dz+f_1(\bar{z})=F_2(z)+f_1(\bar{z})$

由 $U_2=\dfrac{\partial U_3}{\partial \bar{z}}=F_2(z)+f_1(\bar{z})$ 得 $U_3=\bar{z}F_2(z)+f_2(\bar{z})+F_3(z)$

由 $U_3=\dfrac{\partial U}{\partial z}=\bar{z}F_2(z)+f_2(z)+F_3(z)$ 得 $U=\bar{z}F_4(z)+zf_2(\bar{z})+F_5(z)+f_3(\bar{z})$由于应力函数 U 与应力分量存在已知的关系，应力分量是实函数，从而 U 也必是实函数，所以上式右边也必是实函数，这只有满足下列关系才有可能

$$f_3(\bar{z})=\overline{F_5(z)},\ f_2(\bar{z})=\overline{F_4(z)}$$

故 $U=\bar{z}F_4(z)+z\overline{F_4(z)}+F_5(z)+\overline{F_5(z)}$

若把 $F_4(z)$写成$\dfrac{1}{2}\varphi_1(z)$；$F_5(z)$写成$\dfrac{1}{2}\theta_1(z)$，则有

$$2U=\bar{z}\varphi_1(z)+z\overline{\varphi_1(z)}+\theta_1(z)+\overline{\theta_1(z)}=Re\ [\bar{z}\varphi_1(z)+\theta_1(z)]$$

这里，推导过程中都牵涉到求导，不言而喻，任意函数 $\varphi_1(z)$、$\theta_1(z)$都自然应是解析函数，这样就得到与第一种推导同样的结果，即我们已求得用一定方式联系的两个解析函数表示双调和方程的通解。这两个解析函数 $\varphi_1(z)$、$\theta_1(z)$的具体形式一旦由边界条件确定下来之后，下一步利用应力分量与应力函数的关系，应力分量与应变分量的关系，应变分量与位

移分量的关系，就可以把应力和位移分量写成这两个解析函数以某种方式联系的表达式。

实际上，这种表达式不仅在两个解析函数确定后可用来求这些分量，而且，在利用边界条件确定这两个解析函数的具体形式时就需要用到。

§3　位移分量和应力分量的复变函数表示

先讨论位移分量的复变函数表示，这是因为这里推导的中间结果在讨论应力分量的复变函数表示时要用到。以平面应力问题为例。

由几何方程及物理方程得

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y),\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x),\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{G}\tau_{xy}$$

这里的符号含义都是熟知的，不再说明。不考虑体力则有

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2},\quad \sigma_y=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}$$

故 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{E}\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\nu\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)=\dfrac{1}{E}\left[\nabla^2 U-(1+\nu)\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right]=\dfrac{1}{E}\left[P-(1+\nu)\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right]$

又 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{1}{E}\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\nu\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)=\dfrac{1}{E}\left[P-(1+\nu)\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right]$

利用 $2G=\dfrac{E}{1+\nu}$，故有 $2G\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{P}{1+\nu}-\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$，$2G\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{P}{1+\nu}-\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}$

因 $P=4\dfrac{\partial p}{\partial x}=4\dfrac{\partial q}{\partial y}$，故 $2G\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\dfrac{4}{1+\nu}\dfrac{\partial p}{\partial x}$；$2G\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\dfrac{4}{1+\nu}\dfrac{\partial q}{\partial y}$，这样改写的结果，就把式子变成全对 x 求导或全对 y 求导的形式而便于积分，积分后得

$$2Gu=-\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{4p}{1+\nu}+g_1(y),\quad 2Gv=-\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{4q}{1+\nu}+g_2(x)$$

其中，$g_1(y)$、$g_2(x)$是任意函数，为确定它们的具体形式，将 u、v 代入式子：$\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{1}{G}\tau_{xy}=-\dfrac{1}{G}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}$中得

$$\frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{4}{1+\nu}p+g_1(y)\right]+\frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{4q}{1+\nu}+g_2(x)\right]=-\frac{1}{G}\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}$$

展开有 $-\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+\dfrac{4}{1+\nu}\dfrac{\partial p}{\partial y}+g'_1(y)-\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+\dfrac{4}{1+\nu}\dfrac{\partial q}{\partial x}+g'_2(x)=-2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}$

即 $\dfrac{4}{1+\nu}\left(\dfrac{\partial p}{\partial y}+\dfrac{\partial q}{\partial x}\right)+g'_1(y)+g'_2(x)=0$

因 $\dfrac{\partial p}{\partial y}=-\dfrac{\partial q}{\partial x}$（柯西——黎曼条件） 故 $g'_1(y)+g'_2(x)=0$ 即 $g'_1(y)=A$，$g'_2(x)=-A$ A 为任意常数，积分得 $g_1(y)=Ay+A_1$，$g_2(x)=-Ax+A_2$，A_1、A_2 为任意常数。

在讨论物体作刚体位移时，以应变分量为零出发，可求出 u、v 是坐标的线性函数（当然不是任意线性函数都表示刚体位移，而是两个线性函数的系数有一定关系才是刚体位移），在这里，$g_1(y)$是 u 的一部分，$g_2(x)$是 v 的一部分，若考虑这部分位移，则因 $\varepsilon'_x=\dfrac{\partial g_1(y)}{\partial x}=0$，$\varepsilon'_y=\dfrac{\partial g_2(x)}{\partial y}=0$，$\gamma'_{xy}=\dfrac{\partial g_1(y)}{\partial y}+\dfrac{\partial g_2(x)}{\partial x}=A-A=0$ 可知，$g_1(y)$、$g_2(x)$这部分位移是刚体位移，它不影响应变与应力，将其略去，则有

$$2Gu=-\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{4p}{1+\nu};\quad 2Gv=-\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{4q}{1+\nu}$$

而 $2G(u+iv)=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right)+\frac{4}{1+\nu}(p+iq)$

把 U 用 $\varphi_1(z)$、$\theta_1(z)$的表示式及按定义 $p+iq=\varphi_1(z)$代入，就可以得到所要求的位移分量的复变函数表示如下

将 $U=\frac{1}{2}[\bar{z}\varphi_1(z)+z\overline{\varphi_1(z)}+\theta_1(z)+\overline{\theta_1(z)}]$对 x 求偏导，由$\frac{\partial\bar{z}}{\partial x}=1$，$\frac{\partial\varphi_1(z)}{\partial x}=\frac{\partial\varphi_1(z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_1(z)}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{z}}{\partial x}=\varphi'_1(z)$ 又$\frac{\partial\overline{\varphi_1(z)}}{\partial x}=\left(\overline{\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}}\right)=\overline{\varphi_1'(z)}$可得：

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{1}{2}[\varphi_1(z)+\bar{z}\varphi'_1(z)+\overline{\varphi_1(z)}+z\overline{\varphi_1'(z)}+\theta'_1(z)+\overline{\theta'_1(z)}]$$

类似地有 $\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{i}{2}\{-\varphi_1(z)+\bar{z}\varphi_1'(z)+\overline{\varphi_1(z)}-z\overline{\varphi_1'(z)}+\theta_1'(z)-\overline{\theta_1'(z)}\}$

故 $\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}=\varphi_1(z)+z\overline{\varphi_1'(z)}+\overline{\theta_1'(z)}=\varphi_1(z)+z\overline{\varphi_1'(z)}+\overline{\psi_1(z)}$

这里用 $\psi_1(z)$表示 $\theta_1'(z)$，这样一来就有

$$2G(u+iv)=-\varphi_1(z)-z\overline{\varphi_1'(z)}-\overline{\psi_1(z)}+\frac{4}{1+\nu}\varphi_1(z)=\frac{3-\nu}{1+\nu}\varphi_1(z)-z\overline{\varphi_1'(z)}-\overline{\psi_1(z)}$$

以上是平面应力问题的位移表示式，对平面应变问题，把 ν 改为$\frac{\nu}{1-\nu}$，即$\frac{3-\nu}{1+\nu}$改为 $3-4\nu$，有

$$2G(u+iv)=(3-4\nu)\varphi_1(z)-z\overline{\varphi_1'(z)}-\overline{\psi_1(z)}，\ \nu\text{是泊松比。}$$

平面问题的位移表示式可统一用下式表示

$$2G(u+iv)=\kappa\varphi_1(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi_1(z)}$$

其中 $\kappa=\begin{cases}3-4\nu & \text{平面应变}\\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{平面应力}\end{cases}$

下面求应力分量的复变函数表示。应力分量是应力函数 U 的二阶偏导，上面已利用 U 的一阶偏导求出位移的复变函数表示，只需在此基础上再求偏导一次就得到所需结果。

为使应力分量的复变函数表示写得简洁，通常不直接写成三个应力分量 σ_x、σ_y、τ_{xy}的各自的复变函数表示，而写出 $\sigma_x+\sigma_y$ 及 $\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}$的复变函数表示。当然，在这个基础上写出三个应力分量的各自的复变函数表示也没有困难。

利用 § 2 中已求得的关系

$$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}=\frac{\partial^2U}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2U}{\partial z\partial\bar{z}}+\frac{\partial^2U}{\partial\bar{z}^2}，\ \frac{\partial^2U}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2U}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2U}{\partial z\partial\bar{z}}-\frac{\partial^2U}{\partial\bar{z}^2}$$

由 $\sigma_x=\frac{\partial^2U}{\partial y^2}$，$\sigma_y=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}$ 故 $\sigma_x+\sigma_y=4\frac{\partial^2U}{\partial z\partial\bar{z}}$

因 $U=\frac{1}{2}[\bar{z}\varphi_1(z)+\theta_1(z)+z\overline{\varphi_1(z)}+\overline{\theta_1(z)}]$，这里$\overline{\varphi_1(z)}$、$\overline{\theta_1(z)}$的另一种写法是$\bar{\varphi}_1(\bar{z}_1)$ 及$\bar{\theta}_1(\bar{z})$，写成后一种形式便于看出函数的自变量是 $\bar{z}$，

故 $\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{1}{2}[\bar{z}\varphi_1'(z)+\theta_1'(z)+\overline{\varphi_1(z)}]$，而 $\frac{\partial^2U}{\partial z\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}[\varphi_1'(z)+\overline{\varphi_1'(z)}]=\mathrm{Re}[\varphi_1'(z)]$，这里$\frac{\partial\overline{\varphi_1(z)}}{\partial\bar{z}}=\overline{\frac{\partial\varphi_1(z)}{\partial z}}=\overline{\varphi_1'(z)}$利用共轭后求导等于取导后共轭这个运算规则，这样一来，即有

$$\sigma_x+\sigma_y=4\mathrm{Re}[\varphi_1'(z)]$$

又 $\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-2i\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right]U=\left[\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right]^2U$

已知 $\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$，$\frac{\partial}{\partial y}=i\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$，故

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right]^2=\left[\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right]^2=4\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

于是有 $\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=4\frac{\partial^2}{\partial z^2}U$

今已知 $4\frac{\partial}{\partial z}U=2[\bar{z}\varphi_1'(z)+\theta_1'(z)+\overline{\varphi_1(z)}]$

故 $\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar{z}\varphi_1''(z)+\theta_1''(z)]=2[\bar{z}\varphi_1''(z)+\psi_1'(z)]$

可见 $\tau_{xy}=Im[\bar{z}\varphi_1''(z)+\psi_1'(z)]$

而由 $\sigma_y-\sigma_x=2\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi_1''(z)+\psi_1'(z)]$

$\sigma_x+\sigma_y=4\mathrm{Re}[\varphi_1'(z)]$

联立得 $\sigma_x=2\mathrm{Re}[\varphi_1'(z)]-\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi_1''(z)+\psi_1'(z)]$

$\sigma_y=2\mathrm{Re}[\varphi_1'(z)]+\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi_1''(z)+\psi_1'(z)]$

文献上把 $\varphi_1(z)$ 及 $\psi_1(z)$ 称为复应力函数，有些书则用别的字母表示这两个解析函数，这当然是无关紧要。

§4　$\varphi_1(z)$、$\psi_1(z)$的确定程度

上面讲到，若能求出满足给定边界条件的两个解析函数 $\varphi_1(z)$，$\psi_1(z)$，则应力分量及位移分量均可利用上节结果给出。现在，要提出的问题是：不同的 $\varphi_1(z)$、$\psi_1(z)$是否对应不同的应力分量和位移分量，答案是否定的，即 $\varphi_1(z)$、$\psi_1(z)$在一定范围内的改变可以得到同一的应力和位移。因此，我们要研究一下 $\varphi_1(z)$、$\psi_1(z)$的确定程度，即同一应力和位移相应的 $\varphi_1(z)$、$\psi_1(z)$可在什么范围内变化。这里讨论的结果在以后求解时将要利用到。

解决这个问题的办法就是假定对给定的应力分量和位移分量，如果 $\varphi_1(z)$、$\psi_1(z)$和 $\varphi_2(z)$、$\psi_2(z)$都与其对应，则 $\varphi_1(z)$与 $\varphi_2(z)$、$\psi_1(z)$与 $\psi_2(z)$应有什么关系。

由上节知 $\sigma_x+\sigma_y=4\mathrm{Re}[\varphi_1'(z)]=4\mathrm{Re}[\varphi_2'(z)]$；

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar{z}\varphi_1''(z)+\psi_1'(z)]=2[\bar{z}\varphi_2''(z)+\psi_2'(z)]$$

由第一式可见，只要 $\varphi_1'(z)$和 $\varphi_2'(z)$有相同的实部，则 $\sigma_x+\sigma_y$ 是相同的，既然如此，则 $\varphi_1'(z)$与 $\varphi_2'(z)$只可以相差一个任意虚常数而不影响 $\sigma_x+\sigma_y$，即有 $\varphi_2'(z)=\varphi_1'(z)+ic$，此中 c 是实的任意常数，两边积分得

$$\varphi_2(z)=\varphi_1(z)+icz+\gamma$$

这里 $\gamma=\alpha+i\beta$ 是任意复常数。若不进行两边积分，而是两边对 z 求导，则得到：

$$\varphi_2''(z)=\varphi_1''(z)$$

所以，由 $\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar{z}\varphi_1''(z)+\psi_1'(z)]=2[\bar{z}\varphi_2''(z)+\psi_2'(z)]$可知

有 $\psi_2'(z)=\psi'_1(z)$，两边积分后得

$$\psi_2(z)=\psi_1(z)+\gamma'$$

此中，$\gamma'=\alpha'+i\beta'$为任意复常数。由此可见，若只要求 σ_x、σ_y、τ_{xy}同一，可以将 $\varphi_1(z)$代以 $\varphi_1(z)+icz+\nu$，将 $\psi_1(z)$代以 $\psi_1(z)+\nu'$，若还要使 $\varphi_1(z)$，$\psi_1(z)$的改变不影响位移分量，则可改变范围要缩小，这可把上述改变代入位移分量的复变函数的表示中看出。

已知 $2G(u+iv)=\kappa\varphi_1(z)-z\overline{\varphi_1'(z)}-\overline{\psi_1(z)}$

将上面讨论的改变代入，得

$$2G(u+iv)=\frac{\mathrm{E}}{1+\nu}(u+iv)$$
$$=\kappa\varphi_1(z)-z\,\overline{\varphi_1'(z)}-\overline{\psi_1(z)}+\kappa icz+\kappa\nu+icz-\overline{\nu'}$$

右边出现的 icz 是因为 $\varphi_1'(z)$代以 $\varphi_1'(z)+ic$，故$\overline{\varphi_1'(z)}$代以$\overline{\varphi_1'(z)}+\overline{ic}=\overline{\varphi_1'(z)}-ic$，所以 $-z\,\overline{\varphi_1'(z)}$代以$-z\,\overline{\varphi_1'(z)}+icz$ 而得到的，把所得结果整理得

$$\frac{\mathrm{E}}{1+\nu}(u+iv)=\kappa\varphi_1(z)-z\,\overline{\varphi_1'(z)}-\overline{\psi_1(z)}+(\kappa+1)icz+(\kappa\nu-\overline{\nu'})$$

由此式看出，只有 $c=0$，$\kappa\nu-\overline{\nu'}=0$ 才能保证改变并不影响位移分量。只要求应力不变，可以独立地任选 c、ν、ν'，若还要位移不变，则只能选 $c=0$，而 ν、ν' 不再能互相独立任选了，即此时只能

$$\varphi_1(z)\text{代以 }\varphi_1(z)+\nu;\quad \psi_1(z)\text{代以 }\psi_1(z)+\kappa\,\bar{\nu}$$

这样我们就回答了本节一开始提出的问题。讨论位移同一，直接利用 $\kappa\varphi_1(z)-z\,\overline{\varphi_1'(z)}-\overline{\psi_1(z)}=\kappa\varphi_2(z)-z\,\overline{\varphi_2'(z)}-\overline{\psi_2(z)}$，也可以推出同样结果。

同一应力及同一位移对两个解析函数的确定程度有差别是可以预料到的，因为同一应力状态相应的位移有无穷多组，不过组间的差别仅是整个物体的刚体位移，现在，我们就来阐明这个事实。

同一应力对应的各组位移差别为

$$\frac{1}{2G}[(\kappa+1)icz+\kappa\nu-\overline{\nu'}]$$

设 $\nu=\alpha+i\beta$，$\nu'=\alpha'+i\beta'$，此中 α、β、α'、β' 均为实常数，则各组位移分量 u 的差别 u_0 及 v 的差别 v_0 可以分开写，即由

$$(\kappa+1)icz=(\kappa+1)ic(x+iy)=(\kappa+1)icx-(\kappa+1)cy$$
$$\kappa\nu-\overline{\nu'}=\kappa(\alpha+i\beta)-\alpha'+i\beta'=(\kappa\alpha-\alpha')+i(\kappa\beta+\beta')$$

有 $$u_0=\frac{1}{2G}[-(\kappa+1)cy+(\kappa\alpha-\alpha')]=-ay+b$$

$$v_0=\frac{1}{2G}[(\kappa+1)cx+(\kappa\beta+\beta')]=ax+d$$

这里 $a=\frac{(1+\kappa)c}{2G}$，$b=\frac{\kappa\alpha-\alpha'}{2G}$，$d=\frac{\kappa\beta+\beta'}{2G}$。$u_0$、$v_0$ 这种线性函数的形式正表明，u_0、v_0 代表整个物体的刚体位移。

§5 边界条件的复变函数表示

基本的边界条件有两类，即位移边界条件及应力边界条件。位移边界条件可利用§3中位移分量的复变函数表示写出，在式子：

$$2G(u+iv)=\kappa\varphi_1(z)-z\,\overline{\varphi_1'(z)}-\overline{\psi_1(z)}$$

中，此时边界上 $u=\bar{u}$，$v=\bar{v}$ 是给定的，自变量 z 应理解为边界上的值，通常用 t 表示，即

$$\kappa\varphi_1(t)-t\,\overline{\varphi_1'(t)}-\overline{\psi_1(t)}=2G(\bar{u}+i\,\bar{v})\quad t\in\text{边界 }L$$

对应力边界条件的复变函数表示，则需要作一些推导才能得出，先列出应力边界条件在直角坐标系的表达式如下