现代物理学丛书

郝柏林
于渌 等编著

统计物理学进展

科学出版社

现代物理学丛书

统计物理学进展

郝柏林　于　渌　等编著

科学出版社

1981

内 容 简 介

统计物理学研究由大量客体组成的物理系统，它是固体、等离子体、液体、气体理论和激光理论的基础之一．本书采用格林函数、算子展开、投影算子以及随机微分方程等，论述相变和临界现象、非平衡问题（包括平衡附近的过程和远离平衡的现象，特别是耗散结构的形成)．全书共分八章：统计微扰论的生成泛函，连续相变与重正化群，低维合作现象，非平衡态统计理论概述，闭路格林函数和它在非平衡统计物理中的应用，开放系统的统计，耗散结构理论，随机微分方程．

本书可供理论物理工作者和高等院校有关专业师生参考．

现代物理学丛书

统计物理学进展

郝柏林 于 渌 等编著

责任编辑 陈菊华

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1981年11月第一版 开本：850×1168 1/32

1981年11月第一次印刷 印张：17

印数：0001—4,500 字数：446,000

统一书号：13031·1713

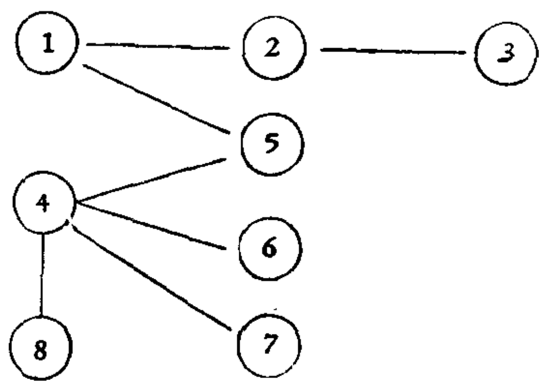
本社书号：2340·13—3

定价： 3.15 元

序　言

统计物理学研究由大量客体组成的物理系统. 它是固体、等离子体、液体、气体理论和激光理论的基础之一. 它的概念和方法在原子核和基本粒子理论中也有许多应用，而且正日益广泛地渗透到化学、生物学等方面去.

统计物理学既是物理学理论，又有方法论问题. 就物理对象而言，本书主要论述相变和临界现象、非平衡问题(包括平衡附近的过程和远离平衡的现象，特别是耗散结构的形成). 就方法论而言，主要阐述格林函数、算子展开、投影算子以及随机微分方程等. 非平衡态统计约占本书篇幅的三分之二，这与当前统计物理学的发展趋势是一致的. 本书各章在逻辑上大致有以下联系:



但每章内容相对完整，可以独立阅读，不受上述顺序限制. 非平衡态统计是当前发展的前沿，有许多观点和方法还没有成为定论，请读者注意有关的新发展. 还应指出，统计物理学的一些重要方面，如物理系统在不稳定点附近的行为、统计模型理论以及统计物理的若干严格结果等等，在本书中没有得到应有的反映.

本书各章内容都曾在 1978 年 8 月于庐山召开的中国物理学会年会期间，在统计物理学讨论会上报告过. 这些报告评述了国际上的新进展，也反映了我国理论物理工作者的一些研究成果. 会

后各作者又作了修改和补充,尽量给出了详细推导,以利阅读. 书中各章的风格体例可能不大一致,在编辑成书时也未加以统一.各章都分别署上了作者姓名,以示负责.

我们希望本书的出版，对理论物理工作者和高等院校教师有所裨益.

目　录

第一章　统计微扰论的生成泛函

郝　柏　林

（中国科学院理论物理研究所）

本章主要是为后面涉及重正化群和闭路格林函数的各章作一些准备，介绍若干量子场论知识，例如微扰论级数的生成泛函、连续积分表示、圈图展开、Callan-Symanzik 方程，复合算子的重正化等等．这些内容在基本粒子和场论工作者中均已为人所共知，而一部分统计物理和固体理论工作者则尚不甚熟悉，但在今后工作中可能经常遇到．

统计和场论的相通之处在于无穷多自由度．无穷多自由度带来的问题在统计中表现得更为单纯．统计虽然免去了量子化、相对论协变性、旋量和狄拉克矩阵等等场论中必须考虑的原则和细节，但许多困难（例如微扰论级数的发散）仍然存在．想方设法把无穷多自由度约化为少量自由度来描述，在突变点附近甚至归结为一、两个自由度，这本来是热力学和统计物理学的基本精神．但是宏观系统中无穷多自由度的涨落背景是无法完全消除的，它们有时还起着决定作用．这是统计问题不同于力学或动力系统的根本之点，这就使统计更接近于量子场论．在一定意义上说，统计物理学是一种涨落场论，在处理非平衡问题时更是这样．当然，量子性在不少统计问题中也直接表现出来．因此，场论方法在统计物理学中的广泛应用，决不仅只是基于两者数学形式的类似，还有一些更为深刻的物理原因．

还应说明一点，本章的叙述比较形式，有许多技术性的推导，并集中介绍了一些必要的基本概念和辅助知识，内容比书中以后各章所引用的要稍多．

§1.1 数学准备

描述无穷多自由度要使用泛函、变分导数、连续积分等概念。但作为入门，并不需要从现代数学的抽象形式开始。我们在这里采取了一种便于推导许多工作公式的实用观点，把泛函关系看作多元函数的极限情况。在叙述中不追求数学的严格性，但指出若干可供进一步查询的文献。

1.1.1 数、函数和泛函

对易经典数就是普通数域上的元素。实数域 R 和复数域 C 是大家熟知的，它们是无穷维的代数。有限维的域也是常见的，电子计算机中保存的数就是一例。反对易经典数是 Grassman 代数的元素，由于本书中用不到，以后不再详述(可参看[1]和[2])。

对易和反对易本身都是经典性质。"量子"性表现在对易或反对易时出现的非零补充项上。如果某个有限维或无穷维代数的任何两个元素 a 和 b 满足

$$ab-\eta ba=0,$$

则它们是经典的对易 ($\eta=+1$) 或反对易 ($\eta=-1$) 数。反之，如果对于某些 a 和 b，

$$ab-\eta ba\neq 0,$$

则它们是"量子"数。

在有限线段 $(0, L)$ 上取离散点 $0, 1, \cdots, n$，令第 i 点对应变量 φ_i，定义多元函数

$$F(\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n),$$

取 $n\to\infty$ 极限时，离散指标 i 成为连续变量 x，变量 φ_i 成为场 $\varphi(x)$，多元函数 F 成为函数 $\varphi(x)$ 的泛函

$$F(\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)\xrightarrow{n\to\infty}F[\varphi(x)], \quad (0\leqslant x\leqslant L)$$

当然，对于不同区间如 $(-\infty, \infty)$，$(0, \infty)$ 上的 $\varphi(x)$，都可以这

样引入泛函.

多元解析函数的马克劳林级数

$$F(\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{i_1} \cdots \times \sum_{i_m} \left(\frac{\partial^m F}{\partial \varphi_{i_1} \cdots \partial \varphi_{i_m}} \right)_0 \varphi_{i_1} \cdots \varphi_{i_m},$$

取 $n \to \infty$ 极限,成为解析泛函:

$$F[\varphi] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int \cdots \int dx_1 \cdots dx_m F^{(m)}(x_1, \cdots, x_m) \times \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_m).$$

如果 $\varphi(x)$ 是经典对易场, 则系数 $F^{(m)}$ 是普通的对称函数; 如果 $\varphi(x)$ 是无穷维 Grassman 代数的元素,则 $F^{(m)}$ 是完全反对称的函数. $F^{(m)}$ 可以通过泛函 $F[\varphi]$ 的变分导数来表示, 这将在后面介绍.

上面取极限过程中作了下列几种“代换”,这是有普遍意义的.

(1) 离散指标 i 成为连续变量 x;

(2) 变量 φ_i 成为场 $\varphi(x)$;

(3) 常数成为函数;

(4) 函数成为泛函;

(5) 对离散指标的求和, 换成对连续变量的求积. 这里迴避了测度问题,在最常见的情形下应有

$$\frac{1}{V} \sum_i \to \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d x,$$

其中 V 是体积, d 是空间维数.

由于我们经常要和泛函打交道,为了避免书写大量高维积分,必须简化记法.

首先, 省去积分符号, 对两次重复出现的自变量自动求积分. 这是矩阵运算中省去求和符号, 并对两次重复出现的角标自动求和(“爱因斯坦规则”)这一规定的推广. 有时还把自变量简化为数

字.

其次,只要不引起误解,自变量也省去不写. 这是广义的矩阵记法.

最后,在对易场(玻色子)情形下,有时把算子(矩阵)的书写顺序也打乱归并.

例 1

$$\int J(x)\varphi(x)dx = J(1)\varphi(1) = J\varphi.$$

例 2

$$\frac{1}{2}\int dx_1dx_2\varphi(x_1)K(x_1, x_2)\varphi(x_2)$$

$$= \frac{1}{2}\varphi(1)K(1, 2)\varphi(2) = \frac{1}{2}K\varphi^2.$$

例 3 前面解析泛函的展开式可简化为

$$F[\varphi] = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}F^{(m)}(1, 2, \cdots, m)\varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(m)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}F^{(m)}\varphi^m.$$

这种记法形式上与普通函数相同.以后将看到,这样作好处很多: 便于微分,不必区分坐标表示与动量表示,自动给出对称项数目等. 但必须注意,在必要时应写明自变量名字和保持正确顺序.

关于本小节的内容还可以参看[2—5].

1.1.2 变分导数

我们只讨论对易场情况. 对泛函的变分导数可以作为多元函数偏导数的极限引入. 多元函数自变量作无限小改变时,函数增量的线性部分为

$$dF = F(\varphi_1 + d\varphi_1, \cdots, \varphi_n + d\varphi_n)$$

$$- F(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) = \sum_i A_i d\varphi_i,$$

定义偏导数

$$A_i = \frac{\partial F}{\partial \varphi_i}.$$

同样，泛函增量的线性部分为

$$\delta F[\varphi] = F[\varphi + \delta\varphi] - F[\varphi] = \int A[\varphi, x]\delta\varphi(x)dx,$$

定义变分导数

$$A[\varphi, x] = \frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(x)},$$

它是 φ 的泛函，又可能是 x 的函数.如同偏导数记号 $\frac{\partial F}{\partial \varphi_i}$ 的分子、分母不能分开一样，变分导数 $\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(x)}$ 也是不能拆开的记号.

实际计算变分导数时，可以利用如下的定义：

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi[x]} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(F[\varphi(u) + \varepsilon\delta(x-u)] - F[\varphi(u)]).$$

变分导数具有与普通导数相似的性质：

(1) 与 $\varphi(x)$ 无关的任意函数 $f(x)$，$g(x)$ 起普通导数中常数的作用，例如

$$\frac{\delta f(x)}{\delta\varphi(y)} = 0,$$

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\{fF[\varphi] + gG[\varphi]\} = f\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(x)} + g\frac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi(x)},$$

$$\frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(y)} = \delta(x-y) \qquad \left(\text{有时简记为 } \frac{\delta\varphi}{\delta\varphi} = 1\right).$$

(2) 泛函乘积的变分导数

$$\frac{\delta}{\delta\varphi}\{F[\varphi]G[\varphi]\} = \frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi}G[\varphi] + F[\varphi]\frac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi}.$$

(3) 复合泛函的变分导数

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}F[G[\varphi]] = \int\frac{\delta F[G]}{\delta G[\varphi(y)]}\frac{\delta G[\varphi(y)]}{\delta\varphi(x)}dy,$$

或者按上一小节中的约定,简记为

$$\frac{\delta F[G[\varphi]]}{\delta\varphi}=\frac{\delta F}{\delta G}\frac{\delta G}{\delta\varphi}.$$

(4) 多元泛函的偏变分导数

多元泛函 $F[\varphi,\phi]$ 的增量

$$\delta F=\int\left\{\frac{\delta F}{\delta\varphi(x)}\delta\varphi(x)+\frac{\delta F}{\delta\phi(x)}\delta\phi(x)\right\}dx$$

中出现偏变分导数 $\frac{\delta F}{\delta\varphi}$ 和 $\frac{\delta F}{\delta\phi}$.

下面举几个变分导数的实例.

例 1 指数泛函

$$Z[J]=\exp\left(\int dxJ(x)\varphi(x)\right)\equiv e^{J\varphi}$$

的变分导数可简记为

$$\frac{\delta Z}{\delta J}=\varphi e^{J\varphi},$$

形式上与普通导数相同,写全了就是

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}=\varphi(x)\exp\left(\int dx\,J(x)\varphi(x)\right).$$

再提醒一下,我们这里讨论的是对易场 $\varphi(x)$.

例 2 泛函平移算子

普通一元函数的平移算子

$$f(x+T)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{n!}\frac{d^nf}{dx}=e^{T\frac{d}{dx}}f(x),$$

推广到多元函数是

$$F(\varphi_1+T_1,\cdots,\varphi_n+T_n)=e^{\sum\limits_i T_i\frac{\partial}{\partial\varphi_i}}F(\varphi_1,\cdots,\varphi_n),$$

取 $n\to\infty$ 极限成为

$$F[\varphi+T]=e^{T\frac{\delta}{\delta\varphi}}F[\varphi],$$

其中