



现代物理学丛书

柏林 等编著  
于 译

# 统计物理学进展

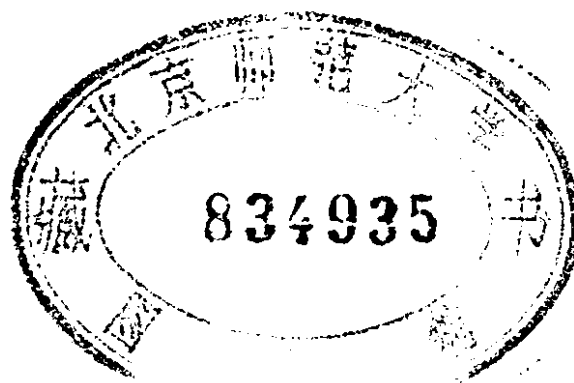
科学出版社

现代物理学丛书

# 统计物理学进展

郝柏林 于 渌 等编著

531.1=4125



科学出版社

1981

## 内 容 简 介

统计物理学研究由大量客体组成的物理系统,它是固体、等离子体、液体、气体理论和激光理论的基础之一。本书采用格林函数、算子展开、投影算子以及随机微分方程等,论述相变和临界现象、非平衡问题(包括平衡附近的过程和远离平衡的现象,特别是耗散结构的形成)。全书共分八章:统计微扰论的生成泛函,连续相变与重正化群,低维合作现象,非平衡态统计理论概述,闭路格林函数和它在非平衡统计物理中的应用,开放系统的统计,耗散结构理论,随机微分方程。

本书可供理论物理工作者和高等院校有关专业师生参考。

现代物理学丛书

### 统计物理学进展

郝柏林 于 渌 等编著

责任编辑 陈菊华

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1981年11月第一版 开本:850×1168 1/32

1981年11月第一次印刷 印张:17

印数:0001—4,500 字数:446,000

统一书号:13031·1713

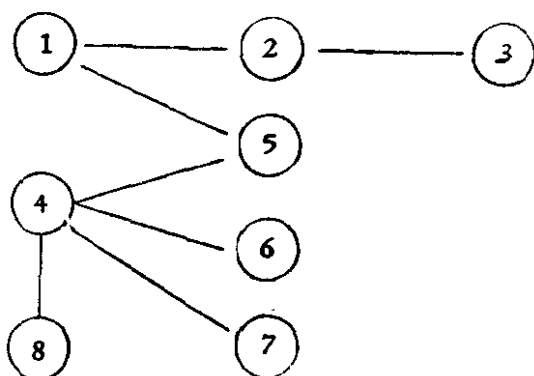
本社书号:2340·13—3

定价: 3.15 元

# 序 言

统计物理学研究由大量客体组成的物理系统.它是固体、等离子体、液体、气体理论和激光理论的基础之一.它的概念和方法在原子核和基本粒子理论中也有许多应用,而且正日益广泛地渗透到化学、生物学等方面去.

统计物理学既是物理学理论,又有方法论问题.就物理对象而言,本书主要论述相变和临界现象、非平衡问题(包括平衡附近的过程和远离平衡的现象,特别是耗散结构的形成).就方法论而言,主要阐述格林函数、算子展开、投影算子以及随机微分方程等.非平衡态统计约占本书篇幅的三分之二,这与当前统计物理学的发展趋势是一致的.本书各章在逻辑上大致有以下联系:



但每章内容相对完整,可以独立阅读,不受上述顺序限制.非平衡态统计是当前发展的前沿,有许多观点和方法还没有成为定论,请读者注意有关的新发展.还应指出,统计物理学的一些重要方面,如物理系统在不稳定点附近的行为、统计模型理论以及统计物理的若干严格结果等等,在本书中没有得到应有的反映.

本书各章内容都曾在1978年8月于庐山召开的中国物理学会年会期间,在统计物理学讨论会上报告过.这些报告评述了国际上的新进展,也反映了我国理论物理工作者的一些研究成果.会

后各作者又作了修改和补充,尽量给出了详细推导,以利阅读. 书中各章的风格体例可能不大一致,在编辑成书时也未加以统一. 各章都分别署上了作者姓名,以示负责.

我们希望本书的出版,对理论物理工作者和高等院校教师有所裨益.

# 目 录

|                                         |    |
|-----------------------------------------|----|
| 第一章 统计微扰论的生成泛函·····郝柏林                  | 1  |
| § 1.1 数学准备·····                         | 2  |
| 1.1.1 数、函数和泛函·····                      | 2  |
| 1.1.2 变分导数·····                         | 4  |
| 1.1.3 若干算子公式·····                       | 8  |
| 1.1.4 连续积分·····                         | 14 |
| 1.1.5 图论中的两个定理·····                     | 17 |
| § 1.2 微扰论级数的生成泛函·····                   | 20 |
| 1.2.1 统计模型与场论的对应关系·····                 | 20 |
| 1.2.2 统计配分函数 $Z[J]$ ——不相连关联函数的生成泛函····· | 23 |
| 1.2.3 自由能 $W[J]$ ——相连关联函数的生成泛函·····     | 28 |
| 1.2.4 热力学势 $\Gamma[M]$ ——顶角函数的生成泛函····· | 32 |
| 1.2.5 圈图展开·····                         | 37 |
| § 1.3 微扰论级数的发散问题·····                   | 43 |
| 1.3.1 量纲分析——理论的分类·····                  | 45 |
| 1.3.2 数幂定理——图的分类·····                   | 50 |
| 1.3.3 微扰论低阶图的重正化·····                   | 56 |
| 1.3.4 Zimmermann 的森林公式 ·····            | 65 |
| 1.3.5 Callan-Symanzik 方程·····           | 68 |
| 参考文献·····                               | 73 |
| 第二章 连续相变和重正化群·····于渌                    | 76 |
| § 2.1 平均场理论及其局限·····                    | 77 |
| 2.1.1 Landau 理论 ·····                   | 77 |
| 2.1.2 其他相变的类比·····                      | 82 |
| 2.1.3 涨落和空间维数·····                      | 82 |
| § 2.2 标度变换与重正化群基本思想·····                | 83 |
| 2.2.1 讨论相变的不同模型·····                    | 83 |
| 2.2.2 标度律·····                          | 85 |
| 2.2.3 重正化群变换·····                       | 87 |

|                           |        |
|---------------------------|--------|
| 2.2.4 高斯模型                | 89     |
| 2.2.5 $4-d$ 展开的递推公式       | 90     |
| § 2.3 重正化群的基本性质           | 95     |
| 2.3.1 模型与符号               | 95     |
| 2.3.2 重正化群的定义             | 97     |
| 2.3.3 生成元、不动点和线性化         | 99     |
| 2.3.4 渐近行为与临界指数           | 103    |
| § 2.4 $1/n$ 展开            | 106    |
| 2.4.1 模型与符号               | 106    |
| 2.4.2 Dyson 方程            | 107    |
| 2.4.3 $R_t$ 变换            | 109    |
| 2.4.4 生成元与不动点             | 110    |
| 2.4.5 线性化算子生成元和本征值        | 112    |
| § 2.5 圈图展开与红外发散           | 114    |
| 2.5.1 配分函数的连续积分表示         | 114    |
| 2.5.2 树图近似——平均场理论         | 115    |
| 2.5.3 单圈图近似               | 117    |
| 2.5.4 红外发散                | 119    |
| § 2.6 重正化群的场论表述           | 121    |
| 2.6.1 基本思想                | 121    |
| 2.6.2 临界点的重正化群方程          | 123    |
| 2.6.3 临界点以上的标度律           | 130    |
| 2.6.4 状态方程                | 133    |
| § 2.7 微扰论与骨架图展开           | 136    |
| 2.7.1 微扰论计算               | 137    |
| 2.7.2 骨架图展开               | 138    |
| 2.7.3 另一种微扰论计算            | 143    |
| § 2.8 结束语                 | 144    |
| 参考文献                      | 146    |
| 第三章 低维合作现象                | 孙鑫 148 |
| § 3.1 Kohn 反常和 Peierls 相变 | 148    |
| 3.1.1 Kohn 反常             | 148    |
| 3.1.2 Peierls 相变          | 151    |
| § 3.2 超晶格和电荷密度波           | 153    |
| 3.2.1 一维电荷密度波             | 153    |
| 3.2.2 二维电荷密度波             | 154    |

|                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| 3.2.3 电荷密度波的元激发.....                 | 154 |
| § 3.3 非线性元激发.....                    | 156 |
| 3.3.1 畴壁.....                        | 156 |
| 3.3.2 峰状孤子.....                      | 158 |
| § 3.4 表面次能带和二维电子气.....               | 159 |
| 3.4.1 液氦表面的电子层.....                  | 159 |
| 3.4.2 二维等离子振荡.....                   | 161 |
| 3.4.3 Wigner 晶格.....                 | 162 |
| 3.4.4 半导体反型层.....                    | 162 |
| 参考文献.....                            | 163 |
| 第四章 非平衡态统计理论概述.....霍裕平               | 165 |
| § 4.1 引言, 非平衡态统计物理.....              | 165 |
| 4.1.1 宏观与微观运动.....                   | 165 |
| 4.1.2 宏观体系的基本属性.....                 | 166 |
| 4.1.3 非平衡态统计理论发展概况及基本特点.....         | 170 |
| § 4.2 玻耳兹曼方程, 马尔科夫过程.....            | 173 |
| 4.2.1 玻耳兹曼方程及其基本性质.....              |     |
| 4.2.2 玻耳兹曼方程的谱, 流体模.....             |     |
| 4.2.3 Chapman-Enskog 展开及 Grad 解..... |     |
| 4.2.4 玻耳兹曼方程的推导.....                 |     |
| 4.2.5 Master 方程, 马尔科夫过程的讨论.....      |     |
| § 4.3 非平衡态统计理论的基本方法.....             | 202 |
| 4.3.1 密度矩阵.....                      | 202 |
| 4.3.2 算子代数的基本概念.....                 | 208 |
| 4.3.3 投影算子.....                      | 213 |
| § 4.4 趋向平衡.....                      | 217 |
| 4.4.1 有关趋向平衡的一些看法.....               | 217 |
| 4.4.2 动力系统理论.....                    | 227 |
| 4.4.3 Master 方程和耗散条件.....            | 230 |
| 4.4.4 描述宏观运动的子动力体系.....              | 242 |
| § 4.5 线性输运过程.....                    | 246 |
| 4.5.1 非平衡态热力学概要.....                 | 246 |
| 4.5.2 线性输运系数.....                    | 250 |
| 4.5.3 输运系数的计算.....                   | 258 |
| 4.5.4 波对输运过程的影响.....                 | 261 |
| 参考文献.....                            | 266 |

## 第五章 闭路格林函数和它在非平衡统计物理中的应用.....

.....周光召、苏肇冰 268

### § 5.1 闭路格林函数和微扰论..... 269

5.1.1 密度矩阵和物理量的平均值..... 270

5.1.2 闭路格林函数..... 272

5.1.3 自由标量场的闭路格林函数..... 274

5.1.4 Wick 乘积和 Wick 定理..... 281

5.1.5 微扰论..... 284

5.1.6 闭路连接格林函数和闭路顶点函数..... 286

5.1.7 紫外发散的消除和重正化..... 291

5.1.8 格林函数的 Lehmann 表示..... 298

### § 5.2 近似均匀系统中的格林函数..... 303

5.2.1 均匀系统格林函数的 Dyson 方程..... 303

5.2.2 热平衡态及其附近的格林函数..... 308

5.2.3 几个有用的运算规则..... 314

5.2.4 多时标微扰理论..... 322

5.2.5 二能级系统和激光状态..... 324

6 准粒子的输运方程..... 332

复合算子和序参量的格林函数..... 339

5.3.1 线性响应理论..... 340

5.3.2 序参量和状态的稳定性..... 344

5.3.3 格林函数的 Ward-Takahashi 恒等式..... 346

5.3.4 序参量的朗之万方程和它的量子化..... 352

5.3.5 带时间的 Ginzburg-Landau 方程..... 361

5.3.6 规范场格林函数的 W-T 恒等式..... 367

参考文献..... 371

## 第六章 开放系统的统计.....李铁城 373

### § 6.1 引论..... 373

### § 6.2 投影算符技术与广义朗之万方程..... 377

### § 6.3 研究开系的广义 Master 方程法..... 386

### § 6.4 开系的例子..... 391

6.4.1 自扩散系数..... 391

6.4.2 激光..... 392

参考文献..... 397

## 第七章 耗散结构理论.....方福康、刘若庄 398

### § 7.1 引言..... 398

|        |                         |     |
|--------|-------------------------|-----|
| § 7.2  | 耗散结构的热力学基础              | 401 |
| § 7.3  | 反应扩散方程, 稳定性             | 419 |
| § 7.4  | 分支点分析                   | 428 |
| § 7.5  | 随机理论与涨落                 | 441 |
| § 7.6  | 非线性主导方程                 | 449 |
| § 7.7  | 化学反应中的自组织作用(时间耗散结构示例)   | 459 |
| 7.7.1  | 引言                      | 459 |
| 7.7.2  | 化学反应机理                  | 460 |
| 7.7.3  | 反应动力学方程组                | 462 |
| 7.7.4  | 解的振荡行为                  | 463 |
| § 7.8  | 进化问题                    | 465 |
| 7.8.1  | 一般讨论                    | 465 |
| 7.8.2  | 反应模型                    | 466 |
| 7.8.3  | 动力学研究                   | 467 |
| 7.8.4  | 热力学解释                   | 468 |
| 参考文献   |                         | 469 |
| 第八章    | 随机微分方程                  | 173 |
| § 8.1  | 概论                      | 181 |
| 8.1.1  | 因素、条件、概率                | 471 |
| 8.1.2  | 动态系统、随机过程与随机微分方程        | 474 |
| § 8.2  | 概率论与随机过程的若干预备知识         | 478 |
| 8.2.1  | 概率场                     | 478 |
| 8.2.2  | 随机变量                    | 479 |
| 8.2.3  | 矩                       | 481 |
| 8.2.4  | 联合分布与边缘分布、相关矩与相关系数      | 482 |
| 8.2.5  | 条件数学期望                  | 483 |
| 8.2.6  | 特征函数                    | 485 |
| 8.2.7  | 高斯随机变量                  | 486 |
| 8.2.8  | 随机过程的一般概念               | 487 |
| 8.2.9  | 马尔科夫过程                  | 489 |
| 8.2.10 | 扩散过程                    | 491 |
| 8.2.11 | Wiener 过程               | 492 |
| 8.2.12 | 平稳过程                    | 494 |
| 8.2.13 | 高斯过程                    | 496 |
| 8.2.14 | 白噪音过程                   | 496 |
| 8.2.15 | 均方极限运算                  | 499 |
| 8.2.16 | 概率守恒等式、Fokker-Planck 方程 | 504 |

|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| § 8.3 具有随机初始条件的微分方程.....          | 508 |
| 8.3.1 线性情形.....                   | 509 |
| 8.3.2 非线性情形.....                  | 510 |
| 8.3.3 解过程的统计性质.....               | 510 |
| 8.3.4 刘维方程.....                   | 512 |
| § 8.4 具有随机非齐次项的微分方程, 伊藤积分.....    | 513 |
| 8.4.1 $y(t)$ 是普通随机过程的情形 .....     | 513 |
| 8.4.2 伊藤积分.....                   | 514 |
| 8.4.3 伊藤方程及其解.....                | 519 |
| 8.4.4 Ornstein-Uhlenbeck 过程 ..... | 524 |
| 8.4.5 过程的趋向平稳.....                | 526 |
| § 8.5 具有随机系数的微分方程.....            | 527 |
| 8.5.1 一般线性方程.....                 | 527 |
| 8.5.2 李亚普诺夫稳定性.....               | 529 |
| 参考文献.....                         | 531 |

# 第一章 统计微扰论的生成泛函

郝 柏 林

(中国科学院理论物理研究所)

本章主要是为后面涉及重正化群和闭路格林函数的各章作一些准备,介绍若干量子场论知识,例如微扰论级数的生成泛函、连续积分表示、圈图展开、Callan-Symanzik 方程,复合算子的重正化等等。这些内容在基本粒子和场论工作者中均已为人所共知,而一部分统计物理和固体理论工作者则尚不甚熟悉,但在今后工作中可能经常遇到。

统计和场论的相通之处在于无穷多自由度。无穷多自由度带来的问题在统计中表现得更为单纯,统计虽然免去了量子化、相对论协变性、旋量和狄拉克矩阵等等场论中必须考虑的原则和细节,但许多困难(例如微扰论级数的发散)仍然存在。想方设法把无穷多自由度约化为少量自由度来描述,在突变点附近甚至归结为一、两个自由度,这本来是热力学和统计物理学的基本精神,但是宏观系统中无穷多自由度的涨落背景是无法完全消除的,它们有时还起着决定作用,这是统计问题不同于力学或动力系统的根本之点,这就使统计更接近于量子场论。在一定意义上说,统计物理学是一种涨落场论,在处理非平衡问题时更是这样。当然,量子性在不少统计问题中也直接表现出来。因此,场论方法在统计物理学中的广泛应用,决不仅只是基于两者数学形式的类似,还有一些更为深刻的物理原因。

还应说明一点,本章的叙述比较形式,有许多技术性的推导,并集中介绍了一些必要的基本概念和辅助知识,内容比书中以后各章所引用的要稍多。

## §1.1 数 学 准 备

描述无穷多自由度要使用泛函、变分导数、连续积分等概念。但作为入门，并不需要从现代数学的抽象形式开始。我们在这里采取了一种便于推导许多工作公式的实用观点，把泛函关系看作多元函数的极限情况。在叙述中不追求数学的严格性，但指出若干可供进一步查询的文献。

### 1.1.1 数、函数和泛函

对易经典数就是普通数域上的元素。实数域  $R$  和复数域  $C$  是大家熟知的，它们是无穷维的代数。有限维的域也是常见的，电子计算机中保存的数就是一例。反对易经典数是 Grassman 代数的元素，由于本书中用不到，以后不再详述（可参看[1]和[2]）。

对易和反对易本身都是经典性质。“量子”性表现在对易或反对易时出现的非零补充项上。如果某个有限维或无穷维代数的任何两个元素  $a$  和  $b$  满足

$$ab - \eta ba = 0,$$

则它们是经典的对易 ( $\eta = +1$ ) 或反对易 ( $\eta = -1$ ) 数。反之，如果对于某些  $a$  和  $b$ ,

$$ab - \eta ba \neq 0,$$

则它们是“量子”数。

在有限线段  $(0, L)$  上取离散点  $0, 1, \dots, n$ , 令第  $i$  点对应变量  $\varphi_i$ , 定义多元函数

$$F(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n),$$

取  $n \rightarrow \infty$  极限时，离散指标  $i$  成为连续变量  $x$ , 变量  $\varphi_i$  成为场  $\varphi(x)$ , 多元函数  $F$  成为函数  $\varphi(x)$  的泛函

$$F(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F[\varphi(x)], \quad (0 \leq x \leq L)$$

当然，对于不同区间如  $(-\infty, \infty)$ ,  $(0, \infty)$  上的  $\varphi(x)$ , 都可以这

样引入泛函。

多元解析函数的马克劳林级数

$$F(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_i \dots \\ \times \sum_{i_m} \left( \frac{\partial^m F}{\partial \varphi_{i_1} \dots \partial \varphi_{i_m}} \right)_0 \varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_m},$$

取  $n \rightarrow \infty$  极限, 成为解析泛函:

$$F[\varphi] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int \dots \int dx_1 \dots dx_m F^{(m)}(x_1, \dots, x_m) \\ \times \varphi(x_1) \dots \varphi(x_m).$$

如果  $\varphi(x)$  是经典对易场, 则系数  $F^{(m)}$  是普通的对称函数; 如果  $\varphi(x)$  是无穷维 Grassman 代数的元素, 则  $F^{(m)}$  是完全反对称的函数。  $F^{(m)}$  可以通过泛函  $F[\varphi]$  的变分导数来表示, 这将在后面介绍。

上面取极限过程中作了下列几种“代换”, 这是有普遍意义的。

(1) 离散指标  $i$  成为连续变量  $x$ ;

(2) 变量  $\varphi_i$  成为场  $\varphi(x)$ ;

(3) 常数成为函数;

(4) 函数成为泛函;

(5) 对离散指标的求和, 换成对连续变量的求积。这里回避了测度问题, 在最常见的情形下应有

$$\frac{1}{V} \sum_i \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d x,$$

其中  $V$  是体积,  $d$  是空间维数。

由于我们经常要和泛函打交道, 为了避免书写大量高维积分, 必须简化记法。

首先, 省去积分符号, 对两次重复出现的自变量自动求积分。这是矩阵运算中省去求和符号, 并对两次重复出现的角标自动求和(“爱因斯坦规则”)这一规定的推广。有时还把自变量简化为数

字.

其次,只要不引起误解,自变量也省去不写.这是广义的矩阵记法.

最后,在对易场(玻色子)情形下,有时把算子(矩阵)的书写顺序也打乱归并.

例 1

$$\int J(x)\varphi(x)dx = J(1)\varphi(1) = J\varphi.$$

例 2

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 \varphi(x_1) K(x_1, x_2) \varphi(x_2) \\ = \frac{1}{2} \varphi(1) K(1, 2) \varphi(2) = \frac{1}{2} K \varphi^2. \end{aligned}$$

例 3 前面解析泛函的展开式可简化为

$$\begin{aligned} F[\varphi] &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} F^{(m)}(1, 2, \dots, m) \varphi(1) \varphi(2) \cdots \varphi(m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} F^{(m)} \varphi^m. \end{aligned}$$

这种记法形式上与普通函数相同.以后将看到,这样作好处很多:便于微分,不必区分坐标表示与动量表示,自动给出对称项数目等.但必须注意,在必要时应写明自变量名字和保持正确顺序.

关于本小节的内容还可以参看[2—5].

### 1.1.2 变分导数

我们只讨论对易场情况.对泛函的变分导数可以作为多元函数偏导数的极限引入.多元函数自变量作无限小改变时,函数增量的线性部分为

$$\begin{aligned} dF &= F(\varphi_1 + d\varphi_1, \dots, \varphi_n + d\varphi_n) \\ &- F(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \sum_i A_i d\varphi_i, \end{aligned}$$

定义偏导数

$$A_i = \frac{\partial F}{\partial \varphi_i}.$$

同样,泛函增量的线性部分为

$$\delta F[\varphi] = F[\varphi + \delta\varphi] - F[\varphi] = \int A[\varphi, x] \delta\varphi(x) dx,$$

定义变分导数

$$A[\varphi, x] = \frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(x)},$$

它是  $\varphi$  的泛函,又可能是  $x$  的函数.如同偏导数记号  $\frac{\partial F}{\partial \varphi_i}$  的分子、分母不能分开一样,变分导数  $\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(x)}$  也是不能拆开的记号.

实际计算变分导数时,可以利用如下的定义:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(x)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (F[\varphi(u) + \varepsilon\delta(x-u)] \\ &\quad - F[\varphi(u)]). \end{aligned}$$

变分导数具有与普通导数相似的性质:

(1) 与  $\varphi(x)$  无关的任意函数  $f(x)$ ,  $g(x)$  起普通导数中常数的作用,例如

$$\frac{\delta f(x)}{\delta\varphi(y)} = 0,$$

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \{fF[\varphi] + gG[\varphi]\} = f \frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(x)} + g \frac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi(x)},$$

$$\frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(y)} = \delta(x-y) \quad \left( \text{有时简记为 } \frac{\delta\varphi}{\delta\varphi} = 1 \right).$$

(2) 泛函乘积的变分导数

$$\frac{\delta}{\delta\varphi} \{F[\varphi]G[\varphi]\} = \frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi} G[\varphi] + F[\varphi] \frac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi}.$$

(3) 复合泛函的变分导数

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)} F[G[\varphi]] = \int \frac{\delta F[G]}{\delta G[\varphi(y)]} \frac{\delta G[\varphi(y)]}{\delta\varphi(x)} dy,$$

或者按上一小节中的约定,简记为

$$\frac{\delta F[G[\varphi]]}{\delta \varphi} = \frac{\delta F}{\delta G} \frac{\delta G}{\delta \varphi}.$$

#### (4) 多元泛函的偏变分导数

多元泛函  $F[\varphi, \phi]$  的增量

$$\delta F = \int \left\{ \frac{\delta F}{\delta \varphi(x)} \delta \varphi(x) + \frac{\delta F}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x) \right\} dx$$

中出现偏变分导数  $\frac{\delta F}{\delta \varphi}$  和  $\frac{\delta F}{\delta \phi}$ .

下面举几个变分导数的实例.

##### 例 1 指数泛函

$$Z[J] = \exp \left( \int dx J(x) \varphi(x) \right) = e^{J\varphi}$$

的变分导数可简记为

$$\frac{\delta Z}{\delta J} = \varphi e^{J\varphi},$$

形式上与普通导数相同,写全了就是

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \varphi(x) \exp \left( \int dx J(x) \varphi(x) \right).$$

再提醒一下,我们这里讨论的是对易场  $\varphi(x)$ .

##### 例 2 泛函平移算子

普通一元函数的平移算子

$$f(x+T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n} = e^{T \frac{d}{dx}} f(x),$$

推广到多元函数是

$$F(\varphi_1 + T_1, \cdots, \varphi_n + T_n) = e^{\sum_i T_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i}} F(\varphi_1, \cdots, \varphi_n),$$

取  $n \rightarrow \infty$  极限成为

$$F[\varphi + T] = e^{T \frac{\delta}{\delta \varphi}} F[\varphi],$$

其中