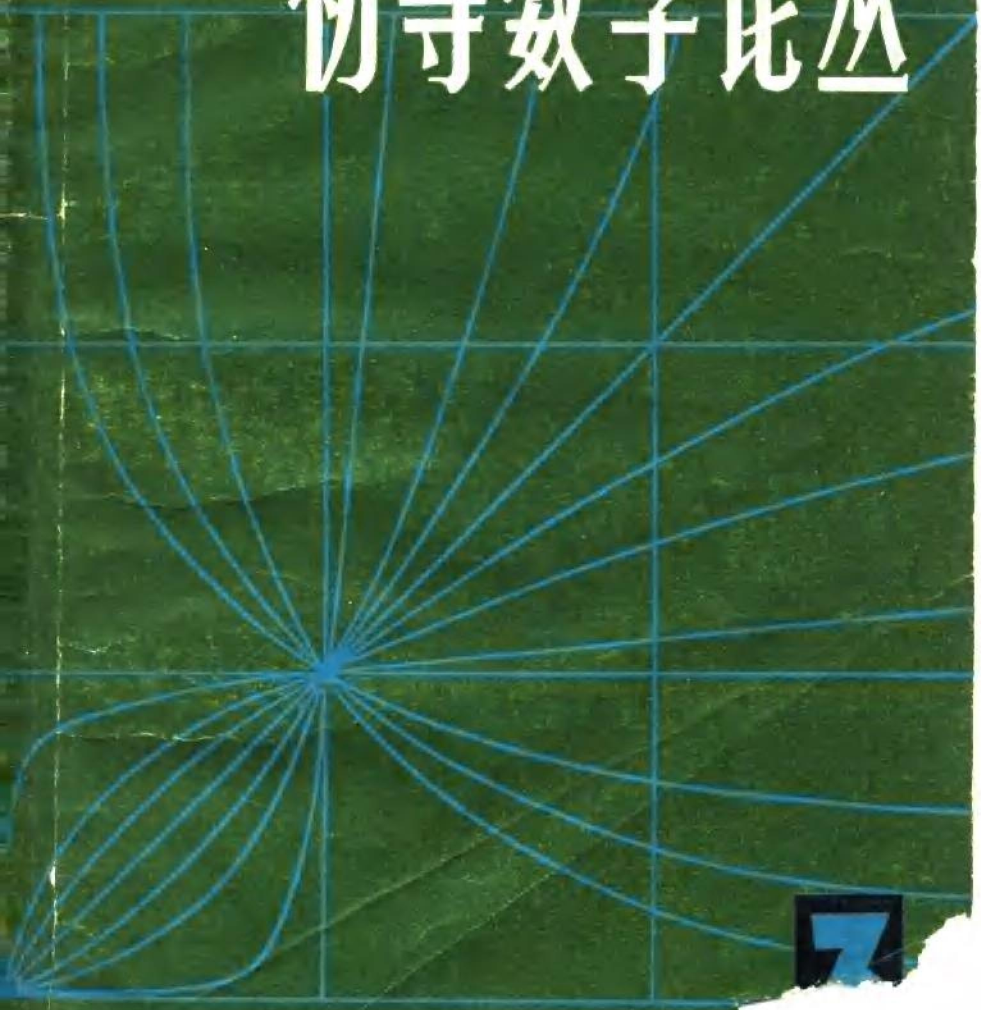
初等数学论丛



CHU DENG SHU XUE LUN C

初 等 数 学 论 丛

（第 3 辑）

上 海 教 育 出 版 社

初等数学论丛
（第3辑）
本社编
上海教育出版社出版
（上海永福路123号）
新华书店上海发行所发行 江苏南通印刷厂印刷
开本787×1092 1/32 印张5.125 字数111,000
1981年5月第1版 1981年5月第1次印刷
印数1—18,000本

统一书号：7150·2465 定价：0.43元

目　录

基本初等函数的公理化定义

河北工学院数学教研室

刘　文

本文用函数方程来定义基本初等函数，并简要地讨论这些函数的公理化理论．为什么要作这样的讨论呢？这是因为，当我们从中学数学和初等分析中熟悉了基本初等函数的通常定义和它们的性质以后，通过函数方程和公理化的方法加以进一步考察，可以加深认识各个基本初等函数的本质属性．另外，通过这种讨论也有助于了解近代数学中的公理方法．

（一）基本指数函数

定义1　设$f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数，满足函数方程

$$f(x+y)=f(x)f(y), \tag{1}$$

且对于任何x，有

$$f(x)\geqslant 1+x, \tag{2}$$

则称$f(x)$为基本指数函数．

对于上述定义，为了说明其合理性，必须解决如下三个问题：

1）满足定义条件的函数是否存在？

2）满足定义条件的函数是否唯一？

3) 所定义的函数是否和通常意义下的基本指数函数 e^x 相一致?

定理 1 $f(x)$处处大于零,且

$$f(0)=1, \qquad f(-x)=\frac{1}{f(x)}, \tag{3}$$

$$f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}. \tag{4}$$

证明 如果对于某个 x_0, 有

$$f(x_0)=0,$$

则对于任意的 x, 由(1)式有

$$f(x)=f(x_0+x-x_0)=f(x_0)f(x-x_0)=0,$$

即 $f(x)$ 恒等于零, 这与(2)式矛盾, 故 $f(x)$ 恒不等于零. 又由(1)式有

$$f(x)=f^2\left(\frac{x}{2}\right),$$

故 $f(x)$ 必定处处大于零. 又由(1)式有

$$f(0)=f(0)f(0),$$
$$f(0)=f(x)f(-x),$$

而 $f(0)\neq0$, 故(3)式成立. 由此又有

$$f(x-y)=f(x)f(-y)=\frac{f(x)}{f(y)}. \qquad \square$$

引理 1 当 $x<1$ 时,有

$$f(x)\leqslant\frac{1}{1-x}. \tag{5}$$

证明 在(2)式中,用 $-x$ 代替 x, 得

$$f(-x)\geqslant1-x,$$

于是,由(3)式,有

$$\frac{1}{f(x)}\geqslant1-x.$$

从而当 $x<1$ 时，(5)式成立. $\square$

定理 2 $f(x)$ 处处可微，且 $f'(x)=f(x)$.

证明 由(1)式有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x)[f(h)-1]}{h}, \tag{6}$$

由(2)及(5)式可知：当 $h<1$ 时，有

$$h\leqslant f(h)-1\leqslant\frac{1}{1-h}-1=\frac{h}{1-h},$$

于是当 $0<h<1$ 时，有

$$1\leqslant\frac{f(h)-1}{h}\leqslant\frac{1}{1-h};$$

当 $h<0$ 时，有

$$\frac{1}{1-h}\leqslant\frac{f(h)-1}{h}\leqslant 1,$$

从而有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=1, \tag{7}$$

于是，由(6)与(7)式即得 $f'(x)=f(x)$. $\square$

推论 $f(x)$ 具有一切阶导数，且

$$f^{(n)}(x)=f(x). \tag{8}$$

定理 3 在 $(-\infty, +\infty)$ 中，$f(x)$ 能展开为如下的幂级数：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}. \tag{9}$$

证明 根据(8)式，仿照微积分中的证明即得. $\square$

下面来讨论两个核心问题：

定理 4 满足定义条件的函数是存在的.

证明 设 $f(x)$ 由(9)式表示. 由达朗贝尔判别法，这个级数处处收敛. 根据级数乘法公式，由(9)式可得

$$f(x)f(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}x^k y^{n-k}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n!}C_n^k x^k y^{n-k}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}=f(x+y),$$

即 $f(x)$ 满足(1)式.

令 $\varphi(x)=f(x)-1-x$, 则

$$\varphi'(x)=f(x)-1.$$

由定理 2 及 $f(x)$ 的恒正性,可知 $f(x)$ 为增函数. 又 $f(0)=1$. 故当 $x>0$ 时, $\varphi'(x)>0$; 当 $x<0$ 时, $\varphi'(x)<0$. 所以 $\varphi(0)=0$ 是 φ 的最小值,因而(2)式成立. □

定理 5 满足定义 1 条件的函数是唯一的, 且和通常意义下的基本指数函数 e^x 一致.

证明 这是定理 3 的直接推论. □

注 以任意正数 a 为底的一般指数函数 $f(x)$, 可以定义为满足下列条件的函数:

1) 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上,且满足函数方程(1);

2) 在 $[0, 1]$ 上有界,且 $f(1)=a$.

可以证明,满足上述条件的函数是存在、唯一的,且可表为

$$f(x)=E(\lambda x),$$

其中 $E(x)$ 是基本指数函数, λ 是方程 $E(x)=a$ 的唯一根.

(二) 自然对数函数

定义 2 设 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数,满足函数方程

$$f(xy)=f(x)+f(y), \tag{10}$$

且当 $x>-1$ 时,有

$$f(1+x)\leqslant x, \tag{11}$$

则称 $f(x)$ 是自然对数函数.

定理 6 $f(1)=0,\qquad f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x),\qquad (12)$

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y). \tag{13}$$

证明 由(10)式,有

$$f(1)=f(1)+f(1),$$

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=f(1),$$

由此即得(12)式. 又由(10)与(12)式即得(13)式. □

引理 2 当 $x>-1$ 时,有

$$f(1+x)\geqslant\frac{x}{1+x}. \tag{14}$$

证明 由定理 6, 有

$$f(1+x)=-f\left(\frac{1}{1+x}\right)=-f\left(1-\frac{x}{1+x}\right). \tag{15}$$

当 $x>-1$ 时, $\frac{x}{1+x}<1$, 故由(11)式有

$$f\left(1-\frac{x}{1+x}\right)\leqslant\frac{-x}{1+x}. \tag{16}$$

由(15)与(16)式, 即得(14)式. □

引理 3 $f(x)$在 $x=1$ 处可微, 且 $f'(1)=1$.

证明 由(11)及(14)式, 当 $x>-1$ 时, 有

$$\frac{x}{1+x}\leqslant f(1+x)\leqslant x.$$

由此, 当 $x>0$ 时, 有

$$\frac{1}{1+x}\leqslant\frac{f(1+x)}{x}\leqslant 1; \tag{17}$$

当 $-1<x<0$ 时, 有

$$\frac{1}{1+x}\geqslant\frac{f(1+x)}{x}\geqslant 1. \tag{18}$$

由(17)与(18)式，并注意到 $f(1)=0$，即证得

$$f'(1)=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)}{x}=1. \tag{19}$$

定理 7 $f(x)$处处可微，且

$$f'(x)=\frac{1}{x}.$$

证明 由(10)式有

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{f\left(x\cdot\frac{x+\Delta x}{x}\right)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{f(x)+f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-f(x)}{\Delta x}=\frac{f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}\cdot\frac{1}{x}. \tag{20}$$

由(19)及(20)式，即得

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{1}{x}. \qquad \square$$

定理 8 满足定义 2 条件的函数是存在、唯一的，且和通常意义下的自然对数函数 $\ln x$ 一致.

证明 由于 $f'(x)=\frac{1}{x}$，故

$$f(x)=\int_1^x\frac{1}{t}\,dt+c, \tag{21}$$

其中 c 为常数. 又由于 $f(1)=0$，故上式中的 c 必为零，从而满足定义 2 条件的函数是唯一的.

下面我们来验证，当 $c=0$ 时，(21)式所表示的函数的确满足定义条件，从而解决存在性问题:

1) 对于任意的正数 x、y，有

$$f(xy)=\int_1^{xy}\frac{1}{t}\,dt=\int_1^x\frac{1}{t}\,dt+\int_x^{xy}\frac{1}{t}\,dt,$$

在第二个积分中，作变换 $t=xu$，有

$$\int_x^{xy}\frac{1}{t}dt=\int_1^y\frac{du}{u},$$

于是有

$$f(xy)=\int_1^x\frac{1}{t}dt+\int_1^y\frac{1}{t}dt=f(x)+f(y),$$

从而 $f(x)$ 满足(10)式.

2) 根据积分的简单性质，不难证明：

当 $x>0$ 时，$\int_1^{1+x}\frac{1}{t}dt<x$;

当 $-1<x<0$ 时，

$$\int_1^{1+x}\frac{1}{t}dt=-\int_{1+x}^1\frac{1}{t}dt<x,$$

即 $f(x)$ 满足(11)式.

由 $c=0$ 的 (21) 式，可知满足定义条件的函数和通常意义下的自然对数函数一致. □

注 以不等于1的正数 a 为底的一般对数函数 $f(x)$，可以定义为满足下列条件的函数：

1) 定义在 $(0, +\infty)$ 上，且满足函数方程(10)式；

2) $f(a)=1$;

3) 在区间 $[1, a]$ (或 $[a, 1]$) 上有界.

可以证明，满足上述条件的函数是存在、唯一的，且可表为

$$f(x)=\frac{L(x)}{L(a)},$$

其中 $L(x)$ 是自然对数函数.

(三) 幂 函 数

定义 3 设 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上不恒等于零的函数，满足函数方程

$$f(xy)=f(x)f(y), \tag{22}$$

且在 $x=1$ 处可微(设 $f'(1)=m$), 则称 $f(x)$ 是 m 次幂函数.

定理 9 $f(x)$处处大于零.

证明 用反证法. 如果对某个 $x_0>0$ 有

$$f(x_0)=0,$$

则对于任意的 $x>0$, 有

$$f(x)=f\left(x_0\cdot\frac{x}{x_0}\right)=f(x_0)f\left(\frac{x}{x_0}\right)=0,$$

这与 $f(x)$ 不恒等于零的条件矛盾, 故 $f(x)$ 必定处处不为零; 又由(22)式, 有

$$f(x)=f^2(\sqrt{x}),$$

从而 $f(x)$ 必定处处大于零. □

推论 $f(1)=1$.

证明 由(22)式, 有

$$f(1)=f^2(1).$$

由于 $f(1)>0$, 故由上式即得 $f(1)=1$. □

根据这个推论, $f'(1)=m$ 的条件可以写为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-1}{x}=m. \tag{23}$$

定理 10 $f(x)$处处可微, 且

$$f'(x)=\frac{mf(x)}{x}. \tag{24}$$

证明 由(22)式, 有

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x)-f(x)&=f\left[x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]-f(x)\\ &=f(x)\left[f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-1\right]. \end{aligned}$$

于是, 由(23)式, 有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)-1}{\Delta x}$$

$$=\frac{f(x)}{x}\lim_{u\to 0}\frac{f(1+u)-1}{u}=\frac{mf(x)}{x},$$

其中 $u=\dfrac{\Delta x}{x}$. 这就证得了(24)式成立. □

定理 11 $f(x)$ 具有一切阶导数，且

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{x^n}m(m-1)\cdots(m-n+1)f(x). \qquad (25)$$

证明 利用数学归纳法，由定理 10 即得. □

定理 12 在区间(0, 2)上，$f(x)$ 能展开为如下的泰勒级数

$$f(x)=1+m(x-1)+\frac{m(m-1)}{2!}(x-1)^2+\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}(x-1)^n+\cdots. \qquad (26)$$

证明 根据(25)式，仿照微积分中的证明即得. □

如果引用记号

$$\binom{m}{0}=1, \qquad \binom{m}{n}=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!},$$

这里 m 是任意实数，n 是正整数，则可把(26)式写成

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}(x-1)^n. \qquad (27)$$

显然，(27)式可写为

$$f(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n, \quad -1<x<1. \qquad (28)$$

定理 13 满足定义 3 条件的函数是唯一的.

证明 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是满足定义 3 条件的两个函数，由(26)式，可知当 $0<x\leqslant 1$ 时，有

$$f(x)=g(x).$$

今设 $x>1$，则由

$$f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=1,$$

$$g\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=g(x)g\left(\frac{1}{x}\right)=1;$$

而 $0<\dfrac{1}{x}<1$，即有

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=g\left(\frac{1}{x}\right),$$

这就证得了 $f(x)=g(x)$. □

定理 14 满足定义条件的函数是存在的，且和通常意义下的幂函数一致.

证明 设 $E(x)$ 是定义 1 所确定的基本指数函数，$L(x)$ 是定义 2 所确定的自然对数函数，m 是任意实数，令

$$f(x)=E[mL(x)]. \tag{29}$$

下面我们证明 $f(x)$ 满足定义 3 中的条件.

设 x、y 是任意正数，由(10)及(1)式，有

$$\begin{aligned}f(xy)&=E[mL(xy)]=E[mL(x)+mL(y)]\\&=E[mL(x)]\cdot E[mL(y)]=f(x)f(y),\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 满足(22)式.

又由于 $E'(x)=E(x)$，$L(1)=0$，$L'(1)=1$，故由复合函数的求导公式有

$$f'(1)=E[mL(1)]\cdot mL'(1)=m.$$

于是我们就证明了 $f(x)$ 是 m 次幂函数.

由于 $E(x)$ 与 $L(x)$ 分别与通常意义下的基本指数函数

与自然对数函数一致，故由唯一性定理13及(29)式知，满足定义3中的条件的函数与通常意义下的幂函数是一致的. □

从定义3出发，可以不依赖于通常代数和分析中幂运算的结论，推出幂函数的所有性质，诸如：

1）设$f(x)$是m次幂函数，$g(x)$是n次幂函数(m、n是任意实数)，则$f(x)g(x)$是$m+n$次幂函数，$f[g(x)]$是mn次幂函数.

2）设$x>0$，$f_m(x)$、$f_h(x)$分别为m次和h次幂函数(m，h是任意实数)，则

$$\lim_{h\to m} f_h(x)=f_m(x).$$

（四）正弦函数与余弦函数

定义4 设$f(x)$与$g(x)$是定义在$(-\infty, +\infty)$上的函数，且满足如下条件：

1）对于任何x、y有

$$f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y); \tag{30}$$

2）$f(0)=1$; (31)

3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=1$, (32)

则分别称$f(x)$与$g(x)$为余弦函数与正弦函数.

定理15 对于任何x，有

$$f^2(x)+g^2(x)=1. \tag{33}$$

证明 在(30)式中，令$x=y$，并利用(31)式，即得. □

推论1 $g(0)=0$. (34)

推论2 条件(32)等价于$g'(0)=1$.

推论3 $f(x)$与$g(x)$是有界函数.

定理 16 $f(x)$ 是偶函数，即
$$f(-y)=f(y). \tag{35}$$
证明 在(30)式中，令 $x=0$，并利用(31)与(34)式即得. □

引理 4 如果
$$g(x)=g(y)=0, \tag{36}$$
则
$$g(x-y)=0. \tag{37}$$
证明 由(36)与(33)式，有
$$f^2(x)=f^2(y)=1. \tag{38}$$
从而由(33)、(30)、(36)与(38)式，有
$$g^2(x-y)=1-f^2(x-y)=1-[f(x)f(y)]^2=0.$$
由此即得(37)式. □

引理 5 $g(2x)=f(x)[g(x)-g(-x)]$. (39)

证明 由(33)与(35)式，有
$$g^2(-x)=g^2(x). \tag{40}$$
在(30)式中，分别令 $y=-x$ 和 $y=2x$，并利用(35)式，得
$$f(2x)=f^2(x)+g(x)g(-x), \tag{41}$$
$$f(x)=f(x)f(2x)+g(x)g(2x). \tag{42}$$
利用(41)式，消去(42)式中的 $f(2x)$，得
$$f(x)=f(x)[f^2(x)+g(x)g(-x)]+g(x)g(2x),$$
即
$$g(x)g(2x)=f(x)[1-f^2(x)-g(x)g(-x)].$$
利用(33)式，得
$$g(x)g(2x)=f(x)g(x)[g(x)-g(-x)].$$
如果 $g(x)\neq 0$，则由上式得(39)式；如果 $g(x)=0$，则由(40)式，知 $g(-x)=0$，于是由引理 4 有 $g(2x)=0$，从而(39)式仍成立. □

定理 17 $g(x)$ 是奇函数,即

$$g(-x)=-g(x). \tag{43}$$

证明 对于任意的 x, 由(40)式,有

$$g^2\left(-\frac{x}{2}\right)=g^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

如果 $g\left(-\frac{x}{2}\right)=g\left(\frac{x}{2}\right)$, 则由(39)式, 有 $g(x)=0$, 于是, 由(40)式,有

$$g(-x)=-g(x)=0;$$

如果 $g\left(-\frac{x}{2}\right)=-g\left(\frac{x}{2}\right)$,则由(39)式,有

$$g(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)g\left(\frac{x}{2}\right),$$

$$\begin{aligned}g(-x)&=f\left(-\frac{x}{2}\right)\left[g\left(-\frac{x}{2}\right)-g\left(\frac{x}{2}\right)\right]\\&=-2f\left(\frac{x}{2}\right)g\left(\frac{x}{2}\right),\end{aligned}$$

故此时(43)式仍成立. □

定理 18 下列加法公式成立:

$$f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y); \tag{44}$$

$$g(x+y)=g(x)f(y)+f(x)g(y); \tag{45}$$

$$g(x-y)=g(x)f(y)-f(x)g(y). \tag{46}$$

证明 根据 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的奇偶性,由(30)式,即可推出(44)式.

(30)与(44)式相加,得

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y). \tag{47}$$

在(30)式中,用 $x+y$ 代替 y, 并利用(35)式,得

$$f(y)=f(x)f(x+y)+g(x)g(x+y),$$

利用(44)式,从上式消去 $f(x+y)$, 得