电 磁 场 理 论

上 册

杨 弃 疾

高等教育出版社

内容简介

本书共分上、下二册。上册五章包括电磁场的基本方程和计算方法以及物理概念的介绍，下册五章包括衍射、绕射、散射、几何光学和时域问题的一些基本概念和处理方法的介绍。

本书内容丰富系统，着眼于打好基础理论，概念清晰准确，数学演算详细、稳健。本书可供研究生学习，也可作为相关学科的大学教师、科研工作者的参考书。

(京)112号

电 磁 场 理 论

上 册

杨 弃 疾

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 23.5 字数 540 000

1992年7月第1版 1992年7月第1次印刷

印数 0001—1 796

ISBN7-04-002342-3/TM·133

定价 11.95 元

7111245115

为学若登山好景若遥峰
览〻外书新天五湖四海收眼底
心胸豁然 鸟道何须艰难找寻
扪岩险阻尝当意志坚 大路
平坦多无边不到崖岸
浪淘沙

杨齐庄

序

本书是在作者为研究生所授“应用电磁场理论”油印讲义的基础上，增补和翻修而形成的。上册五章包括基本方程和方法以及物理概念的介绍，下册五章包括衍射、绕射、散射、几何光学和时域问题的一些基本概念和处理方法的介绍。为节省篇幅，一些与已有书籍中相应章节无大区别的内容，尽管有重要意义，如电磁波在各向异性介质中的传播等[1]，均割爱删去。

本书是为从事电磁场技术的工作者在大学本科知识的基础上加深和开扩技术基础知识而撰写的。所以一切与物理学其它分支联系较密的章节：如能量转换过程、超低温下的电磁场、弹性体在电磁场中的胁变和振动、电磁流体力学、等离子体中的电磁场、电子光学和微波电子学、光学中的电磁场问题等，虽在技术上都具有广泛而重要的意义，本书仍概不涉及。至于微观和运动系统中的电磁场则另成体系，本书更无须涉及。

时至今日，电磁场技术的服务对象已不胜枚举，上至天文、下至地质，旁及政治、军事、经济、医药、卫生、文化等众多领域，且与多种技术结合形成新的技术，如与地球物理结合而形成大地测深技术，与医学结合而形成电磁环境保护学等。技术科学的发展有两方面的必要且充分条件：一是客观上有需要，二是发展的物质条件和知识条件成熟。电磁场理论作为电磁场技术的基础理论，它的发展是电磁场技术发展的先决条件之一。同时，它又必须不断地从电磁场技术的发展中寻找课题，吸收研究成果，来得到自身的发展条件。每一项电磁场技术都有其特殊的原理、处理方法和与其它学科的联系。电磁场理论只能包含某些电磁场技术中的共同概念和方法，不可能包罗电磁场技术的所有概念和方法。但是作为某项具体电磁场技术的工作者，不能把注意力只集中在自己从事的这项具体技术上，而应当经常注意电磁场理论以及其它有关基础理论的发展，从中吸收新的概念和处理方法，以丰富和提高分析和解决自己所遇到的技术问题的能力。为了有相当深度的处理能力，必须要有相当广泛的知识。没有广度，也不可能有深度。学问是为应用的，不能应用的理论是谓空谈。但是学问的应用正如武艺的应用，只有在长期锻练和揣摩之后，才能用之于一时而奏效。立竿见影是千载难逢的巧合。作者不耻献丑，在本书之首向读者敬献浪淘沙一阕[2]，其目的就在于希望读者能坚持提高，坚持开阔眼界。

数学不仅为各门科学提供定量分析的工具，也为科学的思维提供思维的方法。一切科学理论问题，只有建立了相应的数学模型，能够运用数学方法去进行分析，才能得到具体的、定量的结果。而没有量，也就不可能确定质。数学的定理、公式虽然是数学家思维的成果，数学定义、公理的提出和推理的方法则不可能离开作为背景的物质世界。J.C.Maxwell 的伟大功绩不仅在于提出了位移电流的概念和预见到电磁波的存在与光即是电磁波，而且在于把电磁学从零零散散的状态总结成系统的理论，建立起它的基本方程，而使电磁学的发展能够与数学相傍而行。只是在达到了这一境地之后，电磁场理论才有了飞速的发展。工欲善其事，必先利其

器。没有合手的工具，能工巧匠也不可能制出精美的工艺品。如果说有些理论是脱离实际的，那只是因为它没有物质世界的背景、也不能用于解决物质世界中存在的问题（无论直接或间接），绝不是因为它运用了数学语言和数学方法。电磁场理论的发展必须反复地经过由物理到数学、经过数学加工再返回物理，这样的过程。在这过程中间，人们常常只看到用数学的语言和逻辑描述和分析数学问题，看不到物质的实际（在为简化分析而决定取舍时和选取适用的解时，仍须考虑有关量的实际情况）。这是正常的情形。电磁场工作者应当努力锻练自己掌握这样的思维方式。

本世纪后一半比起前一半来，电磁场理论内容的丰富是不可同日而语的。但是在数学工具的运用上，其进展的速度却远远低于过去。过去的电磁场理论工作者不仅要掌握分析数学的基本方法，甚至也能对数学有所贡献。今天，分析数学已经在抽象的程度和内容的广泛上有了飞跃的发展，电磁场理论则似乎还与古典分析数学相依为命，而与现代数学甚是缘悭。这种状态的改变迟早会成为迫在眉睫的事，在技术上要求解决的理论问题越来越复杂，而计算机和软件的容量、运算速度和处理能力也正以日益陡峭的斜率上升。不久的将来，要求于电磁场理论工作者的，可能是用比较简洁的方式来描述问题的数学模型，而用相当概括的语言和符号输给计算机，繁琐的推导已无须人去进行，而要求于人的则是更为抽象的概括性的数学加工。

造成电磁场理论与数学分道扬镳的主要原因在于知识的膨胀速度与日俱增，而要求于人的知识面也与日俱增，因而一个人不可能既精于一门技术，又能在理论上和数学上有较深的修养，这种矛盾必然日益尖锐，不可能缓解，除非在分工上采取分中有合、合中有分的办法。

考察数学的体系可见，它的发展趋势是定义和公理的概括性和推理的严密性与抽象性日益提高。对于电磁场理论工作者，他所需要的往往不是这种严密的推理，而是概念和结果与物质实际的联系。例如算子理论是分析数学的一项很受重视的分支，已经有了十分丰富的内容。这些内容都是针对某些类型的算子的研究。对于电磁场理论的研究者，关心的不是这些算子理论的形成，而是在实际上的算子（例如∇^2）在某些场区域的条件下具有那些数学性质。因此，需要了解的是这种算子属于那一种类型，关于这种算子的性质有那些研究成果。为此，需要的是半描述、半论证的数学材料，而并不是天衣无缝的大部头严密论证的数学书。对于古典数学也有类似的需要。例如各种超越函数并不因为现代数学和计算机的发展而成为不需要的东西，因为数学的应用最终还需给出定量结果，而超越函数的应用常能使计算式的表达简练。所以描述各种函数的性质而省去推导的数学材料也是很需要的。这种材料与罗列各种公式的数学手册互相并不能代替。这就是说，电磁场理论的研究者应当熟悉数学的性能却不需要能从事数学工作。就像机加工工人应熟悉某些机床的性能，以便很好地操作它，制出精密的产品，并不需要会制造机床，但也不能只会查阅产品目录，了解各种机床的指标。这就需要一些“桥梁工作者”来给数学和技术科学之间建起联系的桥梁，作者遗憾耽误了十多年宝贵光阴，而今已不可能完成这样的愿望。在本书中虽也作了少许描述数学概念的尝试，不过是点滴而已。这种看法如果基本合理，希望有条件的同道能够将这座桥梁及早建起，使现代数学的成果能在电磁场理论的发展中显现其威力。

半个世纪前，J.Stratton 出版了他的《电磁理论》著作，基本上反映了那个时代电磁场理论的水平，半个世纪以来，电磁场理论已有了长足的进展，任何人都只能在其中某些部分进行研究，其著作充其量只能反映某些部分的进展。全面总结今天已经达到的水平和前沿的展望已不甚可能。作者东隅已逝，攀登珠穆朗玛峰已经无望，把希望寄托于年青的同志。但是作者并不自弃，愿为有志攀登珠峰的勇士在山脚下铺一段路，以节省其力量而用于向山崖上攀登。本书虽几经易稿，错误仍在所难免。希望读者以本书提供的材料作为线索，本着尽信书则不如无书的精神独立思考。如不吝赐教，指出其中的错误，将不胜感激。

本书定稿时接受了吕保维学部委员的重要建议；在撰稿前和过程中得到许多朋友和学友的鼓励和切磋，并在稿中吸收了他们的一些成果；妻子周方同志多次鼓励和督促我，并帮助我整理稿件；高教出版社的同志为出版此书作了大量的工作，在此一并向他(她)们表示感谢。我的业师孟昭英教授和我早年追随过的闵乃大教授、钟世模教授(已故)对我的成长和学风的建立曾给以关怀和教导，藉此机会向他们表示敬意。

作　者

1988 年冬于清华大学

1) 例如可看 M. Born, E. Wolf：《光学原理》第十四章。В. Л. Гинзбург(金兹堡)：《电磁波在等离子体中的传播》(1970) 1978 年中译本。

2) 文曰：为学若登山，好景无边。峰峦之外有新天。五洲四海收眼底，心胸豁然。鸟道何艰难！攀蔓扪岩。险阻岂当意志坚。大路平坦多安逸，不到峰巅。

目　录

第一章　场的基本量与基本关系

§1　电场和磁场

人们认识物质的各种存在形式，是通过物质之间各种形式的相互作用。电荷之间或电流之间有相互作用，其表现为相互的引力或斥力。人们通过感知这种力的存在，并且通过科学的方法来区别这种力和别种力（如万有引力），而判断电荷或电流的存在。人们感知电磁相互作用的历史已有两千年左右①，但直到十八世纪才出现公认的电荷学说。那也不过是能解释带电体之间之所以有引力或斥力，是由于它们"带电"。各种带电基本粒子的发现，只不过使人知道了"带电"的单元。至于"电"是什么？为什么电有正、负之分？至今还是没有弄清楚。人们的认识只能而且必能逐步深入，永远没有把所有的问题都弄清楚的时候。我们宁可在知其然而不尽知其所以然的情况下，承认电荷和电磁相互作用的存在，而去对它作定量研究（但量的研究有助于对质的了解），让后人去进一步知其所以然，而不要制定一个电荷的"定义"，以自我满足。

凡相互作用必有传递作用的媒介。这个问题在历史上曾有过激烈的争论。"超距作用"论者认为，电磁力的传递无需媒介，它可以超越物体间的空间而达到。虽然超距作用论者中间不乏对物理学有巨大贡献的学者，这种观点却已被实践所抛弃。以 M.Faraday 为代表的"以太"论者坚持物质之间的作用力只能靠物质媒介来传递。他们认为宇宙空间弥漫着称为"以太"(ether)的特种物质。电荷对于"以太"可以施加作用而使之如同被拉紧的橡皮那样发生胁强。通过"以太"的这种性质，使两个带电体之间的相互作用力可以传达到对方。正是这种作用力必须经媒介来传达的观点以及高超的实验工作，使得 M.Faraday 在电磁学成为物理学中的一个学科作出了卓越的贡献。"以太"学说在电磁学中占统治地位，直到上世纪末，恩格斯甚至曾提到②"以太粒子"，就是说"以太"不仅是物质，而且也是由基本单元——粒子或质点所构成。"以太"学说没能脱离机械论的范畴，它把一切物理现象都等同于机械运动，所以无法摆脱自身的许多矛盾。"以太"在本世纪初终于被扬弃了。但是电荷之间相互作用的传递仍然需要通过物质媒介，这就是电磁场。电磁波的发现表明，电磁相互作用的传递并不是通过电荷对其周围的"以太"施加作用，而是电荷的周围存在着电磁场这种物质。电磁场不仅可以存在于电荷周围，而且可以脱离电荷，以电磁波的形式向远离电荷的方向运动。

---

① 王充（公元一世纪）：《论衡·乱龙》："顿牟掇芥"意为琥珀（或玳瑁）可吸取轻物。但又说"磁石、钩象之石，非顿牟也，皆能掇芥。"意为磁石也能吸取轻物。（指的是针。因为又说"磁石引针"）可见对于电力和磁力尚未分清。

② 《自然辩证法》（1971 年，中译本第 54 页）。又 J.C.Maxwell 为大英百科全书所写的词条"Aether"中，还计算了"以太"的密度为 $1.07\times10^{-16}kg/m^3$，刚度系数约为铁的 10^{-9}倍。

但是电磁场究竟是一种什么样的物质，它为什么能而且只能传递电磁相互作用，也还是远远没弄清楚的。在电磁场脱离电荷而自由运动时，固然是以电磁波的形式存在，而电磁波即是光子流，光子是具有能量、质量而只能在以光速运动的状态下存在的物质。但是静止的电荷或恒速运动的电荷之间的相互作用是否也是通过电磁波①？电子在其能量发生跃迁时发射光子的过程是什么样的？这些问题也不是现在就能回答的问题。我们还是知其然而不尽知其所以然地承认，电荷之间的相互作用是通过它们周围的电磁场，电磁场是一种物质，在电荷的周围必然存在着电磁场，电磁场能对电荷施加作用力，这种力也就是电荷之间的电磁相互作用力。其余的问题让将来的人们去深入研究吧。

应当把能对电荷施加作用力看作电磁场的一种性质。电磁场是一种物质，而不是作用力。电磁场作为一种物质必然有其存在的空间，但电磁场并不是空间，更不是"电磁力作用的空间"。我们的任务是研究电磁场定量的性质(从而也有助于质的了解)，我们的出发点是通过物理实验得到的定量关系。所以无需对"电荷"、"电磁场"下一个定义再从定义出发。

但是为了研究某种物质的性质，需要对能表示其性质而且能测得的一些量作出规定。对于电磁场，不能如对宏观物质那样规定其"质量密度"，而只能根据其对定量的电荷所施加的力的大小来规定其"强度"。物质的基本性质是其所具有的能量。能量密度和质量密度或强度有一定的关系。但后两者更易于作直接的定量分析。而且物质的性质也远非都能用能量来表示的。在五十年代曾有人想用能量密度来作为场的基本量，没有成功。所以至今仍然以电磁场的强度为基本量。

1785 年 C.A.de Coulomb 所作的静电力实验是第一个定量的电学实验。这个实验的结果表明，当两个带电物体之间的距离远大于物体的线度时，两物体间的相互静电力正比于它们的电荷，而与其间的距离的平方成反比。根据这个结果，规定了**电场强度 $\boldsymbol{E}$**的定义：当体积微小的电荷②q 放置在 P 点时，假定它不使原来的电荷分布发生改变，而它所受的力为 $\boldsymbol{f}_e$，则原来的电荷在 P 点的电场强度为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{f}_e/q$。在选定了电荷和电场强度的单位后，Coulomb 的实验结果还给出了比例因数的值。在国际单位制③(SI 制)中，电荷的单位是 C(库仑)即 A·s(安培秒)，电场强度的单位是 V/m(伏特/米)，等同于 N/C(牛顿/库仑)。在距离 R 远大于电荷的线度处(因而可以认为电荷集于一点)，见图一，电荷 Q 的静电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{r}_1 \tag{1}$$

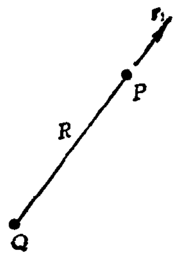
这里 $\boldsymbol{r}_1$ 是由电荷"点"指向场点 P 的单位矢量，在 SI 制中，$\varepsilon_0=1/36\pi\times10^9$。$\boldsymbol{\varepsilon}_0$ 具有单位 F/m(法拉/米)。

电场不只是存在于静止电荷的周围。在通电流的导体中、远离了电荷的电磁波中、通有交变电流的导线周围都存在着电场。电荷不仅在静止状态下受到电场力，在运动状态下也受电

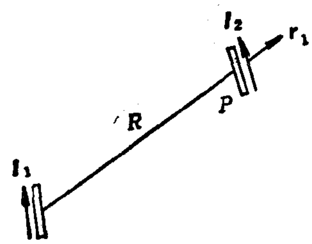
①汤川秀树等在其《基本粒子》(1969)中说："带电粒子间的作用力由一方粒子放出光子而另一方粒子吸收光子的过程产生"(1975 年中译本第 45 页)。但甲粒子为何单向乙粒子方向发射光子而不向其它方向发射？这光子的频率如何决定？光子是单个发射还是接连不断地发射？发射光子和接收对方来的光子是同时还是有时差？

② 在不涉及带电体的其他性质时，就把"电荷"和"带电体"等同起来。以后对于"电流"和"载电流体"也同样如此。

③ 单位制的介绍在本章§9。



图一



图二

场力。但在运动状态下还会受到磁场力。1846 年 W.Weber 发现电荷之间的力还与其运动速度、加速度有关。为了区分两者，把只和电荷大小有关，而与电荷的运动方向和速度无关的力规定为**电场力**。而把与电荷的运动方向和速度也有关的力规定为**磁场力**。

最先发现电流的磁效应和电流所受的磁场力的是 H.C.Oersted(1819)。定性地提出电流的磁场力基本定律的是 A.M.Ampére(1822)。同年，J.B.Biot 和 F.Savart 从实验结果中总结出直线电流之间的磁场力的定量关系。设有长度为 l_1 和 l_2、载有恒定电流 $\boldsymbol{I}_1$ 和 $\boldsymbol{I}_2$ 的两个直线电流元，如图二所示。则 $\boldsymbol{I}_2 l_2$ 电流元所受电流元 $\boldsymbol{I}_1 l_1$ 的磁场力为

$$\boldsymbol{f}_m=\frac{\mu_0}{4\pi R^2}l_1 l_2 \boldsymbol{I}_2\times(\boldsymbol{I}_1\times\boldsymbol{r}_1) \tag{2}$$

它垂直于 $\boldsymbol{I}_2$，并且卧于 $\boldsymbol{I}_1$ 和 $\boldsymbol{r}$ 所在的平面内。在 SI 制中，其中 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}$，它具有单位 H/m(亨利/米)。

早在1750年，I. Michell就已经用实验证实了磁极之间的作用力与其距离的平方成反比。最初规定磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的定义时，也是像静电场那样，规定为作用于试探用的“单位N极”上的力①。根据这样作出的磁场强度定义和 Oersted 的实验结果，电流元 $\boldsymbol{I}_2 l_2$ 所受的磁力为

$$\boldsymbol{f}_m=\mu_0 l_2 \boldsymbol{I}_2\times\boldsymbol{H} \tag{3}$$

因而Biot-Savart 实验结果给出电流元$\boldsymbol{I}_1 l_1$在P点的**磁场强度**为

$$\boldsymbol{H}(P)=\frac{l_1}{4\pi R^2}\boldsymbol{I}_1\times\boldsymbol{r}_1 \tag{4}$$

虽然在 $\boldsymbol{I}_1$ 和 $\boldsymbol{I}_2$ 平行时 $\boldsymbol{f}_m$ 也是引力或斥力，但是当 $\boldsymbol{I}_1$ 和 $\boldsymbol{I}_2$ 各沿任意方向时，$\boldsymbol{f}_m$ 并非总是沿着确定的直线，所以不能按照与$\boldsymbol{f}_m$平行的方向来规定磁场强度$\boldsymbol{H}$，像对于电场强度所规定的那样。事实上，按照古老的方式对磁场强度所规定的定义，只要转到以式(3) 为定义式，就适用于现在的分析方法了。

磁场强度的单位在SI制中为A/m(安培/米)。

电荷在运动时也形成电流。但是它并不是恒定电流。即使电荷的运动速度是恒定的，除了它是沿着运动方向的均匀线电荷以外，穿过每一横截面的时间只有一瞬间，与导线中的恒定电流连续不断地穿过电流的横截面是不同的。所以不能用(3) 式来求磁场对于运动的点电荷

① 在Maxwell的著作中，称$\boldsymbol{H}$是作用于单位S极上的力，但是他用的是左手坐标系，所以他的结果在形式上与现在的没有区别。

的磁力。直到1892年(即J. C. Maxwell发表他的电磁动力论27年以后)，才由H. A. Lorentz推导出运动电荷在电磁场中所受的电磁力为

$$\boldsymbol{f}=q\boldsymbol{E}+\mu_0 q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H} \tag{5}$$

这里q是点电荷，$\boldsymbol{v}$是它的运动速度。当然这里假定观察仪器和电、磁场的源是相对静止的。这个力就称为Lorentz力。

如前所述，磁场不只存在于磁铁或恒定电流周围，也存在于电磁波中、运动的电荷周围和通有变动电流的导线周围。电磁场在这些情况中是一个整体，电荷q所受的力是电磁力，为区分二者，把与受力电荷的运动速度$\boldsymbol{v}$有关的力称为磁力。

在1811年S. D. Poisson提出标量势的概念，并得到它的微分方程以后，静电场和磁铁的磁场的理论系统就已完成了。电磁学的理论则应当从Faraday的假说开始。M. Faraday不仅用实验方法发现了电磁感应现象，而且提出了对这种现象的解释。

电磁感应现象是1831年Faraday和J. Henry各自独立发现的。他们在一个无源的线圈上接联检流计，使与这线圈相邻的另一线圈中的电流发生改变，或使这线圈与一条磁铁(永久或电磁铁)相对插套，都在检流计中通过电流。正因有了电磁感应现象的发现，才有变压器、发电机的发明，人类才能进入电气化时代。但如Faraday和他的后继者都只停留在对这现象的承认上，电磁场理论作为一门理论科学是不可能形成的。J. C. Maxwell的电磁波假说也不可能提出。

Faraday对于物理现象的研究从来不满足于知其然，他总要提出一个假说来解释其所以然。由于他的假说有合理的成份，同时电磁学形成一门学科的客观条件也已具备，所以他提出的假说推动了电磁学的前进。但在他们那个时代，对于电磁现象的理论思维只能是设想一个机械模型，运用类比的方法来考虑其中发生的物理过程。Faraday设想在电荷、磁铁或电流周围的“以太”有如被无数变截面的细管所填满，在其中充满不可压缩流体，每一截面上的流速等于该处的场强。流速与管的截面积成反比，正好与场强的平方反比规律一致。于是在场区域中可以画出许多流线，它们在每一点的切线都与该点的场强方向相合，这些流线称为“力线”。这就是我们现在用疏密分布的力线图来表示场结构的来源。Faraday所想象的不可压缩流体的流量我们现在称为“通量”。由于下节将叙述的原因，**电通量密度取$\varepsilon_0\boldsymbol{E}$**，称之为“**电位移强度**”，**磁通量密度取$\mu_0\boldsymbol{H}$**，称之为“磁感应强度”。在SI制中，$\varepsilon_0\boldsymbol{E}$的单位是$\mathrm{C/m^2}$(库仑/米^2)，$\mu_0\boldsymbol{H}$的单位是$\mathrm{wb/m^2}$(韦伯/米^2)，等同于$\mathrm{V\cdot s/m^2}$(伏特·秒/米^2)。

电磁学教科书① 中都给出用立体角证明的Gauss定律：

$$\int_S \varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=q_e,\qquad \int_S \mu_0\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=q_m \tag{6}$$

q_e和q_m分别是闭面S中所包含的电荷和“磁荷”，这里不重复其证明了。

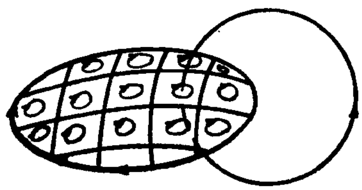
Faraday认识到，两条导线接通电源时会引起电流而发生相对运动；导体运动而切割磁力线时会在导线上引起电动势，如果闭路也发生电流。要区分两者。前者有相互作用力而电流

① 例如王先冲：《电磁场理论及应用》(1986)§1-4.

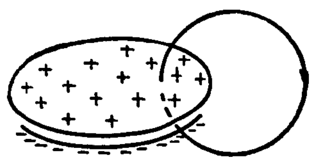
不改变，后者如开路，电动势变为电压而没有作用力。所以磁力线数目是一种状态。他设想，当导线接通电源而在其周围存在磁场时，它就处在一种特定状态，这种状态阻碍导线中产生电流。如果导线上没有电源，当它进入磁场中时，这种状态则将使它有能力去产生电流。这种能力是导线在平常的环境下所不具有的。这种物质的电状态是尚未认识的，它可能对许多产生电流的现象都有重要的影响。Faraday称这种状态为**电兴奋状态**①。

Faraday没有给出这种状态的数学表达式。这个工作是J. C. Maxwell完成的。在他26岁时(1856年)发表的"论Faraday的力线"一文②中，已给出了电磁场理论基本方程的雏形。

对于闭合恒定电流的磁场，Ampére所总结出来的基本定律只是定性的。他指出：1) 数值相等、方向相反的电流引起数值相等而方向相反的力；2) 两个通电流的闭线环及其相对位置按比例改变尺寸时，其相互作用力不变；3) 圆载流导线环在磁场中不受使之在其平面内旋转的力。Maxwell据此判断，磁力也符合平方反比的规律，也是只有引力或斥力，所以也适用不可压缩流体模型。现在，磁力线是与电流闭环互相套链的。可以把一个电流闭环看成一个磁壳的边缘。这个磁壳可以分解为许多小块，每块的边缘都是一个小电流环，如图三(a)所示。每两块的公共边上的电流的作用恰好互相抵消，有效的仍是实在的电流闭环。这个磁壳可以和图三(b)所示的电偶极壳相比。均匀电偶极壳上相对两点之间的电势差，等于电场强度沿两点之间的任何一条缺口环路(不穿过电偶极壳)的积分，是常数③。因此，磁场强度沿闭环路(缺口极小，在磁场的情形，缺口上的积分自然可以不计)的积分也是常数。它与积分环路的形状、穿



(a)



(b)

图 三

过磁壳的点的位置无关。这个常数显然应与积分环路所套住的电流成正比，比例因数与单位制有关④，这就是我们现在称为Ampére定律的基本关系式，在SI单位制中，它写作

$$\int_{c} \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = I_{\mathrm{c}} \tag{7}$$

在现在的电磁学教科书中⑤，都是根据Biot-Savart定律(4)式来推导出这个式子，这里不再重复给出了。

对于电磁感应定律，虽然Faraday已经给出定量的描述："如导体闭环包围若干磁力线，由

① Electro-tonic State。

② W. D. Niven：*"The Scientific Papers of J. C. Maxwell"*(1890)，卷I. 第155—229页。

③ 下节将给出推导。

④ *"Scientific Papers of J. C. Maxwell"*卷II第125—143页。Maxwell是先选定比例因数来确定电流单位的。这就是cgs电磁制的电流单位。

⑤ 例如王先冲：《电磁场理论及应用》，§2-2。

于某种原因，力线的数目减少，则将在闭环上引起电动势，其数量等于单位时间减少的磁力线数"；而且，Maxwell在其1868年所写的《静电与电磁力之比较》一文中，也重复了这个描述，并且把它和Ampére定律式(7)并列，Maxwell却不愿意采用这种描述作为电磁感应定律的表达形式。他在《论Faraday的力线》一文中表示，要找到一个与感应电动势存在于相同位置的"自然"的量，以避免考虑"人为的"穿过环线的磁力线数目。这个自然的量就是我们现在称之为"矢量势"的量。无论是在《论Faraday的力线》一文中、1865年发表① 的《电磁动力论》(此文总结了电磁场的基本微分关系式，并提出光的电磁波理论)一文中，还是后来出版的电磁学著作②中，他始终没有采用磁力线数目改变的表达式作为电磁感应定律的表达式。Maxwell的推导包含着深刻的物理意义。但是，作为定量分析场结构的基本关系式，还是采用磁力线数目改变的表达式更方便。因为它直接给出电和磁的关系，并且和Ampére定律的表达式的形式相仿。只要把"磁力线数目"改为"磁通"，就成为我们现在通用的描述形式了。在SI制中，它写作③

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \mu_0 \boldsymbol{H}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{8}$$

根据式(1)可以证明(与万有引力相同地)，静电场强度沿任何闭口曲线的积分都是0。所以上式中的 $\boldsymbol{E}$ 如果包含静电场的强度，它也是成立的，$\boldsymbol{H}$ 中如果包含静磁场强度当然也成立。

Maxwell 的推导比较复杂，将在另一节(§6)中用现在常用的符号来推导，并给出他的符号与现在常用符号的对照表。

§2 电磁场与物质的相互作用

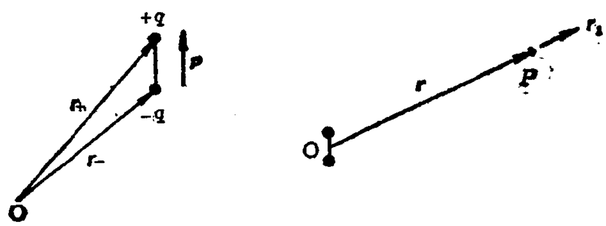
这个标题不太严格。因为电磁场也是物质，电磁辐射的基本单元——光子也是基本粒子。本书所研究的问题都是相对于分子的线度也是大尺度的问题，即宏观问题，在这种尺度下，一块"无限小"的体积也能包含很大数量的分子，所以任何效应都是相当大量分子的总效应。在这种尺度下，物体可以看成"连续"的——在数量(体积或质量)上无论怎样细分，也不出现质的变化。场则仿佛是具有某种电磁性质的连续空间，它们可以进入物体内而与之重合，所以这样的问题也叫做"连续媒质电动力学"。与其相对的是微观问题，它研究分子、原子乃至更小尺度中的电磁相互作用。显然，在宏观尺度上得到的结果不见得都适用于微观尺度的问题。

分子的电磁性质是物质构造学研究的对象，材料的电磁性质是固体物理与材料物理研究的对象。对于电磁场理论，材料的电磁性质抽象为三个电磁参数——导电率 σ、介电率 ε 和导磁率 μ。后两个是应用分布偶极子模型来说明的。由这种模型引出了场的两个辅助量——极化强度 $\boldsymbol{P}$ 和磁化强度 $\boldsymbol{M}$。为了说明这两个辅助量的意义，先来看看电、磁偶极子的一些性质。

① "*Scientific Papers of* J. C. Maxwell"，卷I，第526—597页。

② J. C. Maxwell"*A Treatise on Electricity and Magnetism*"。第一版，1873；第二版，1881；第三版，1891。

③ 以后约定用 ∂S 表示一块面积 S 的周界(它当然是闭曲线)，用 ∂V 表示一块体积 V 的表面(它当然是闭曲面)。



(a) (b)

图四

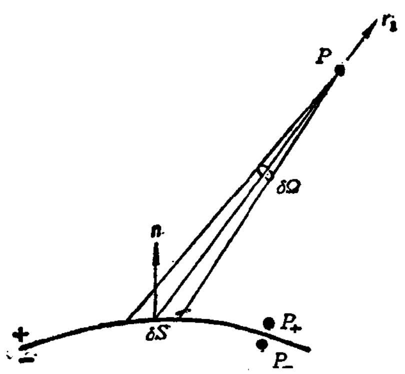
一对正、负等量电荷放在相邻的位置上，如图四(a)，就成为一个**电偶极子**，$\boldsymbol{p}=q(\boldsymbol{r}_+-\boldsymbol{r}_-)$称为它的偶极矩。取电偶极子中心为原点，以 P 点的位置矢径 $\boldsymbol{r}$ 代表 P 点，则在距离 r 远大于偶极电荷的间距$|\boldsymbol{r}_+-\boldsymbol{r}_-|$时，可以应用式(1)得到 $\boldsymbol{r}$ 点的静电势为

$$\varphi_e(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{p}\cdot\nabla\frac{1}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}_1}{r^2} \tag{9 a}$$

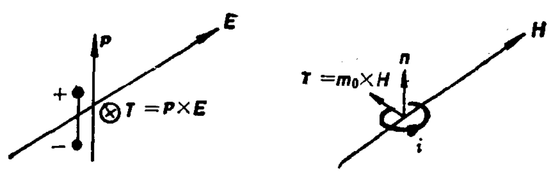
静电场则为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}_1}{r^2} \tag{9b}$$

求陡度的微分是对 $\boldsymbol{r}$ 点的坐标进行的。



图五



(a) (b)

图六

对于图三(b)那样的电偶极壳，应用此式，可以求得空间 P 点的静电势。设电偶极壳单位面积的偶极矩为 $\boldsymbol{P}$，壳面积为 S，则

$$\varphi_e(P)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S\frac{P\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_1}{r^2}\mathrm{d}S$$

但$\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_1}{r^2}\delta S$ 是 δS 面积在 P 点所张的立体角 $\delta\Omega$，所以

$$\varphi_e(P)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Omega_P}P\mathrm{d}\Omega \tag{10}$$

Ω_P 是 S 在 P 点所张的立体角。使 P 点趋近于偶极壳上表面上一点 P_+，则该点附近小块面积所张的立体角为 2π，其它面积所张立体角为 0。因此 $\varphi_e(P_+)=P(P)/2\varepsilon_0$，当 P 点趋近于偶极壳上 P_+ 点对面的 P_- 点时，则有

$\varphi_e(P_-)=-P(P)/2\varepsilon_0$。因此，对面两点的电势差为

$\varphi_e(P_+)-\varphi_e(P_-)=P(P)/\varepsilon_0$。

由图六(a)很容易证明，电偶极子在电场中所受的转矩为 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}$。应用式(3)可以证明，图六($b$)中面积为 S，通电流 i 的小线环在磁场中所受的转矩为 $\boldsymbol{T}=(\mu_0 iS)\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}$。如令 $\boldsymbol{m}_0=\mu_0 i\boldsymbol{S}$ 为载流小线环的磁偶极矩，则 $\boldsymbol{m}_0$ 正好与 $\boldsymbol{p}$ 相对应，$\boldsymbol{H}$ 正好与 $\boldsymbol{E}$ 相对应。对于图三(a)所示"磁壳"，单位面积的磁偶极矩是 $\mu_0 i$。所以两面对应点间的磁势差，亦即 $\boldsymbol{H}$ 沿套住电流的闭环 C 的积分等于 I_C，这就是式(7)

由于历史形成的习惯，载流小线环的**磁矩**定为 $\boldsymbol{m}=iS\boldsymbol{n}=\boldsymbol{m}_0/\mu_0$，所以对应于式(9 b)，载流小线环在 $\boldsymbol{r}$ 点引起的磁场强度为

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\pi}\nabla\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}_1}{r^2} \tag{11}$$

对于电媒质，设想在电场(自由电荷的电场和电媒质被极化而引起的电场之和)作用下，成为电偶极子的连续分布(这过程即是**极化**)，每单位体积的电偶极矩为 $\boldsymbol{P}$，称为**极化强度**。设一块电介质的体积为 V，在其中任意 $\boldsymbol{r}'$ 点的极化强度为 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')$，而 V 以外的场点为 $\boldsymbol{r}$。于是，由式(9 b)有

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\nabla\left(\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\right)\mathrm{d}V' \tag{12}$$

$\mathrm{d}V'$ 表示对 $\boldsymbol{r}'$ 点的坐标作积分，$\boldsymbol{r}_1$ 是由 $\boldsymbol{r}'$ 指向 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量。令它的方向余弦为 $\cos\theta_j(j=1,2,3)$，又令沿直线坐标轴的单位矢量为 $\boldsymbol{x}_j$，即 $\boldsymbol{r}_1=\sum\limits_{j=1}^{3}\boldsymbol{x}_j\cos\theta_j$，由恒等式

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\equiv(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})$$

注意 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')$ 对 $\boldsymbol{r}$ 点坐标的导数是 0，并且可以证明

$$\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|^2}=0 \tag{13}$$

有

$$\begin{aligned}\nabla\left(\frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\right)&=\sum_{i,j=1}^{3}\boldsymbol{x}_j\quad P_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\cos\theta_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\right)\\&=-\sum_{i,j=1}^{3}\boldsymbol{x}_j\ P_i\frac{\partial}{\partial x'_i}\left(\frac{\cos\theta_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\right)\\&=-\sum_{i,j=1}^{3}\boldsymbol{x}_j\boldsymbol{P}\cdot\nabla'\left(\frac{\cos\theta_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\right)\end{aligned}$$

∇' 表示求陡度时对 $\boldsymbol{r}'$ 点的坐标求导。又由恒等式

$$\nabla'\cdot\left(\frac{\cos\theta_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{P}\right)\equiv\boldsymbol{P}\cdot\nabla'\left(\frac{\cos\theta_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\right)+\frac{\cos\theta_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\nabla'\cdot\boldsymbol{P}$$

并应用 Gauss 定理，得到

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \boldsymbol{x}_i\left[\int_{\partial V}\frac{\cos\theta_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{n}'\mathrm{d}S'-\int_V\frac{\cos\theta_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\nabla'\cdot\boldsymbol{P}\mathrm{d}V'\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{\partial V}\frac{\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{n}'\mathrm{d}S'-\int_V\frac{\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'\right] \tag{14}$$

上列推导过程假定了$\frac{\cos\theta_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')$对于$\boldsymbol{r}'$点坐标是连续的，其散度在$V$中是可积的。当$\boldsymbol{r}$点在$V$以外时，这显然是成立的。这结果表明，在介质极化时，对于介质以外的场点，其内部如同有以$-\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')$为密度的整体电荷，在其表面上如同有以$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{n}'$为密度的表面电荷。这就是所谓“束缚电荷”。

在求介质内部某$\boldsymbol{r}$点场强时就遇到了问题，无论式(1)或(9 a,b)，都不允许R或r成为无限小，因为式(1)是在R远大于电荷的线度的条件下得到的。如果R与电荷的线度为同量级，测试电荷必然影响源电荷的分布，这电荷的分布形式将随着两电荷的“距离”(如果还可以定出一个距离来)而改变。同时，在物理上也不可能有无限大的力存在。所以在“点电荷”或偶极子的近旁，场强还是不知道的。如果要求介质内部$\boldsymbol{r}$点的场强，就遇到了求某一偶极子上的场强的问题，就遇到了$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=0$的问题。其实这问题在求彻体分布的电荷中某点$\boldsymbol{r}$的场强时就已遇到了。不过那时如以$\boldsymbol{r}$点为球心，采用球坐标来作积分，还可以得到有限的值。现在，式(12)被积函数是$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$的$-3$次幂。这就出现了积分发散的问题。其实式(13)在包含$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=0$的区域内并不成立，所以式(14)虽然不发散，但并不成立。以后我们将在很多地方遇到这个所谓源点场强的问题。这是一个物理实际与数学模型之间存在着矛盾的问题。至今还没有彻底解决的办法。

物理学不可能是单纯思维的产物，不可避免地在某些环节上运用经验或猜测，并用大量的实践来检验其结果。在这里，我们只采用式(14)的物理意义而不顾及它成立的条件①。于是可以把电荷分为自由电荷和束缚电荷两类，以后ρ_e和ρ_{se}都只代表自由电荷的体密度和面密度。于是，令

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P} \tag{15}$$

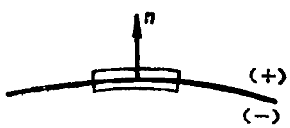
则在均匀或连续渐变媒质中，将式(6)中的闭面S所包围的体积收缩为一点的邻域，即得

$$\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho_e-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$$

即

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_e \tag{16}$$

而在介质的间断面内外，用一个小扁盒包起一块间断面，如图七所示，对这小盒应用式(16)和式(14)，得到



图七

① 以后将多处遇到在物理上不应发散而在数学表达式上却出现发散的问题，都是采用违反常规数学原则的办法来避免发散。称之为“发散积分正则化”。这是在没有根本解决办法之前的临时措施。