结构优化设计原理与应用

朱伯芳　黎展眉　张璧城编著

水利电力出版社

结构优化设计原理与应用

朱伯芳　黎展眉　张璧城编著

水利电力出版社

结构优化设计原理与应用
朱伯芳　黎展眉　张璧城编著
*
水利电力出版社出版
（北京三里河路6号）
新华书店北京发行所发行・各地新华书店经售
北京军区空军后勤部印刷厂印刷
*
787×1092毫米　16开本　18.25印张　410千字
1984年12月第一版　1984年12月北京第一次印刷
印数0001—7640册　定价3.40元
书号 15143・5566

内 容 提 要

本书系统地阐述了结构优化设计的基本原理、计算方法及其在工程中的应用。全书共十四章。书中首先阐明如何建立结构优化设计的数学模型和计算方法，特别着重说明了从工程和力学观点出发提出的各种简化计算、加快收敛速度的策略和技巧。书中最后介绍了优化设计在梁、柱、桁架、刚架、高层建筑、钢筋混凝土等各种杆件结构以及重力坝、拱坝(双曲壳体)等连续介质结构中的应用。

本书可供工程设计和科研人员使用，也可供有关高等院校师生参考。

结用5号

前　　言

结构优化是近二十年发展起来的一门新技术，在结构设计中采用优化方法，可以提高设计质量，加快设计速度。从已有经验来看，与传统设计方法相比，优化设计可以使工程造价降低5～25%，从而带来巨大经济效益。目前结构优化理论正对结构设计产生重大影响。

在国外，六十年代初期，首先在航空部门开始了结构优化，不久在土建、造船、机械等部门也相继开展起来了。在国内，1977年以前只有少量零星的研究工作，大量的研究工作和工程应用是在1977年以后才开展起来的。目前在土建、水电、航空、机械、造船等部门都进行了不少工作，发展很快。

结构优化设计是一门边缘性学科。一方面，它是研究结构设计的，属于工程学范畴；另一方面，它采用的主要计算方法属于现代数学的一个分支——运筹学，这又属于数学的范畴。因此，如何写好一本结构优化设计的书是颇费斟酌的。从国外出版的一些结构优化设计的书籍来看，如写得不好，容易出现两种毛病。一种毛病是从数学家的角度来写，写得比较抽象，实际上成了一本数学规划的书，工程设计人员不容易看懂，而且在内容上也没有充分反映结构设计的特点；另一种毛病就是主要从结构设计的角度来写，在数学规划方法方面写得太少、太浅，工程人员在读完这样一本书以后，并不能真正掌握优化设计的方法。为了掌握有效的计算方法，他还得再读一本数学规划的书。可是目前在结构优化设计中比较有效的计算方法并不是单纯的数学规划方法，而是在应用数学规划方法的同时，加进了许多工程和力学的办法，实际上是数学方法和工程与力学方法的混合，这种方法在一般的数学规划书籍中当然是找不到的。

本书是为从事结构设计的工程技术人员而写的。作者希望，读者在看完本书以后，可以学会两件事。一是会建立结构优化设计的数学模型，把一个结构设计问题转化成一个优化问题；二是能掌握有效的计算方法，能把他面临的优化问题正确地解算出来，从而得到一个好的设计方案。为此，本书一方面系统地阐述了结构优化设计的基本原理；另一方面又详细地阐述了各种实用的优化计算方法及其在工程中的应用。

本书取材，力求实用，对于实际工程中有用的计算方法进行了全面、系统的阐述，俾使读者通过本书能掌握有关的基本概念和方法，并应用于实际工程。对于一般的理论性问题，只说明一些主要结论，不作详细推导。

本书在写作方法上，尽量做到深入浅出，便于自学。对于一些工程技术人员较难掌握而又比较重要的概念，如共轭方向、Kuhn-Tucker条件、梯度投影等等，本书都采用一种便于工程技术人员理解的方式来阐述。为了加深读者对问题的理解，书中列入了一些例题，大体可分为两类。一类是大型例题，目的在于说明目前的解题规模和应用情况，变量比较多；另一类是小型例题，目的在于说明基本概念和计算过程，为了便于把问题讲清楚

目　录

第一章 引　　论

§1-1　结构优化的意义

人们在结构设计中，总希望在给定的荷载条件下得到在技术经济上尽量符合理想的设计方案。为了达到这个目的，传统的办法是采用重复设计法。首先，根据同类型结构的已有经验，加上设计者的判断，拟出初步方案，然后进行结构的强度、刚度和稳定性的计算分析。设计人员根据对有关成果的分析来修改设计方案，对修改后的方案再进行计算分析，然后再修改结构设计。这样反复计算、修改，直到得出满意的设计方案为止。

这种重复设计方法有两方面缺陷。一方面设计繁复冗长，效率很低；另一方面，一般设计单位不大可能花费大量的人力和时间去进行多方案的比较，往往最终确定的方案并非理想的可行方案。最终方案的经济合理性多受初始方案的影响，并且在很大程度上取决于设计者的经验。也可以说，重复设计方法所得的最终方案是受设计者的经验和判断力影响较大的较优方案。它的择定往往伴随一定程度的主观随意性，并非纯由工程客观条件所决定的最优方案。不同的设计人员，在相同的工程客观条件下，完全有可能得出不同的设计方案。

人类通过工程实践，很早便产生了优化设计的构思，如早期的等强度梁、米歇尔（Michell）桁架的理论研究等。但是，结构优化作为一门独立的学科出现，却只是近二十年左右的事情，这与其他有关的学科技术的发展是分不开的。

六十年代两门学科的发展给结构优化的发展提供了重要的基础。一个是有限元法的发展，解决了复杂结构的分析问题，为优化设计提供了前提；另一个是运筹学中数学规划方法的发展，为结构优化提供了许多有效的数学方法。而电子计算机的发展，又为结构优化提供了高效能的计算工具，使得对大型工程结构进行优化成为可能。在上述三个因素的促进下，结构优化在近二十年发展很快。

结构优化的发展和应用将使结构设计达到新的阶段，利用优化方法和电子计算机计算，可迅速求出给定条件下的最优设计方案，使设计人员从繁琐的重复设计中解放出来，设计速度可大大加快，而且设计质量也可大大提高，据已有经验，与传统设计方法相比，优化设计可节省工程投资 5～25%左右，在经济上可带来很大效益。

结构优化设计大体上可分为三个阶段。第一个阶段是建立数学模型，把一个工程结构的设计问题变成一个数学问题；第二个阶段是选定一个合理的、有效的计算方法；第三个阶段是编制通用电算程序。电算程序建立起来以后，对于同一类型的结构，都可由电子计算机迅速给出最优设计方案来。因此对于一个设计单位来说，应该建立一个结构优化的程序库，其中包括各种工程结构的优化程序。建立结构优化程序库以后，必将使设计效率大

为提高。

有一点必须讲清楚，结构优化所给出的解答，从数学上来说，是在给定条件下的最优解。但实际设计问题是很复杂的，在建立数学模型时，通常只能抓住一些主要因素，而往往要忽略一些次要因素以简化计算，另外有些因素对结构设计有一定影响，但其影响又难以用数字表示，这些因素在数学模型中也是无法考虑的。所以不能把优化设计提供的最优解理解为绝对的“最优”。但它是一个良好的基础，在这个基础上，设计者根据全面的判断，还可以进行一些必要的修改。当然，由于结构优化的数学模型中已考虑了主要的因素，所以通常不至于有大的修改，而且数学模型越完善，修改的余地就越小。

对于如何进行优化，工程师与数学家的观点往往是有所不同的。数学家多着眼于寻求精确的理论解，而在工程师看来，由于数学模型中已有一定的近似性，追求理论上严格的最优解是意义不大的，因此工程师们比较感兴趣的是收敛快、最好是开头几次迭代目标函数就能大幅度下降的优化方法，以便很快能得到实用的解答。

§1-2 结构优化的概念

如上所述，结构优化的任务就是在给定的条件下从许多可行的方案中寻求优化的方案。为了说明结构优化的基本概念，下面用一个简单例子作为导引[7]。

设一管柱如图1-2-1所示，它的底部固定，顶端自由，承受轴向压荷载$P=2000$公斤，柱长$L=200$厘米，弹性模量$E=2\times10^6$公斤/厘米^2，容重$\rho=0.0078$公斤/厘米^3，其横截面为均匀圆环，厚度为t，平均直径为

$$D=\frac{1}{2}(D_0+D_i)$$

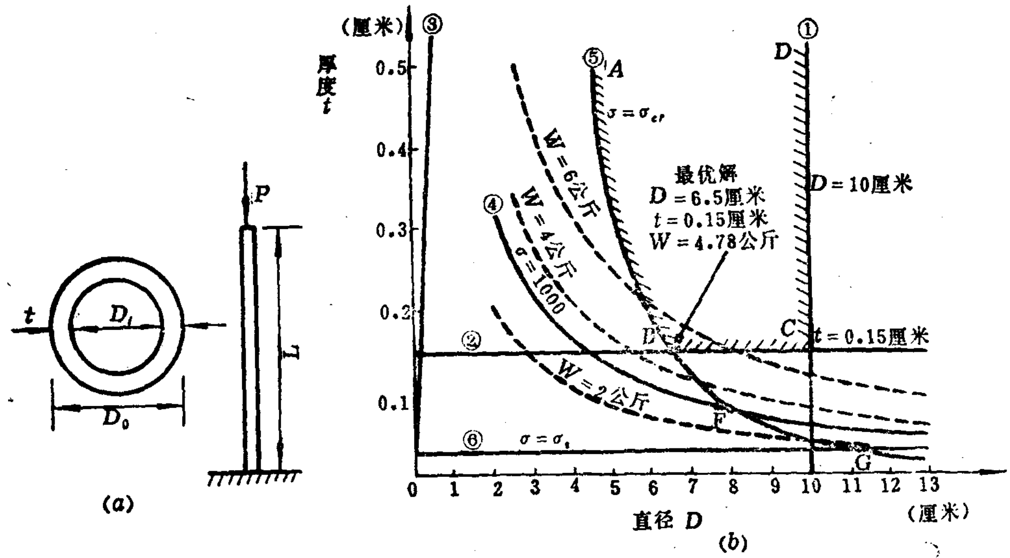

图 1-2-1

(a)管柱；(b)图解法示意

式中D_i、D_0分别为内外直径，根据使用条件，要求直径$D\leqslant 10$厘米，制造工艺要求柱的厚度$t\geqslant 0.15$厘米。在强度及稳定方面，在荷载作用下，要求柱内压应力σ不超过1000公斤/厘米^2，也不允许发生纵向屈曲和管壁的局部屈曲。

试求满足上述各项要求的、使柱的重量最轻时的直径D和厚度t。这是一个结构优化的问题，共有D和t两个变量，其余参数都已确定。柱的重量为

$$W=\rho L\pi Dt$$

将已知的ρ、L的数值代入，得

$$W=4.9Dt \tag{1-2-1}$$

当柱子取不同的D、t值时，由上式即可得到不同的重量W。但D和t必须满足前述各项要求，不能任意取值。下面我们分析一下这些要求对变量D、t所施加的限制。在图1-2-1中，以直径D为横坐标，以厚度t为纵坐标，首先考虑几何上的限制，由于要求

$$D\leqslant 10\text{厘米}$$

故在图中作与纵轴平行的直线$D=10$厘米，如①，D的取值必须在直线①以左，它以右必须排除。又由要求

$$t\geqslant 0.15\text{厘米}$$

在图中作水平直线$t=0.15$厘米如②，t的取值必须在直线②以上，它以下的区域必须排除。再有，管的内径$D_i=D-t$，在几何上应满足$D_i\geqslant 0$，由此可得

$$D\geqslant t$$

因此应排除$D<t$的情况，作直线$D=t$如③，即此直线以左的区域也应排除。

现在再考虑力学条件，柱内应力为

$$\sigma=\frac{P}{\pi Dt}$$

由压应力不超过1000公斤/厘米^{2}的限制，可得

$$\frac{P}{\pi Dt}-1000\leqslant 0$$

即

$$Dt\geqslant\frac{P}{1000\pi}=\frac{2}{\pi}$$

在上式中取等号，作曲线$t=\dfrac{2}{\pi D}$如④，在此曲线以下的区域必须排除。

发生纵向弯曲时，按欧拉公式柱的临界荷重为

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EJ}{4L^2}$$

式中J为惯性矩，以$J=\dfrac{\pi D^3 t}{8}$代入上式，可得纵向屈曲时柱的临界应力为

$$\sigma_{cr}=\frac{P_{cr}}{\pi Dt}=\frac{\pi^2 ED^2}{32L^2}$$

要求柱的实际应力σ不超过临界应力，即

$$\sigma-\sigma_{cr}=\frac{P}{\pi Dt}-\frac{\pi^2 ED^2}{32L^2}\leqslant 0$$

用已知的P、E、L数值代入上式，并取等号，在图中作曲线⑤，要满足不发生纵向屈曲的条件，应排除曲线⑤以下的区域。

管柱还应符合不发生管壁局部屈曲的条件，即实际应力σ不超过局部屈曲临界应力σ_s：

$$\sigma-\sigma_s\leqslant 0$$

式中σ_s为局部屈曲临界应力，可由下式计算

$$\sigma_s=\frac{0.4Et}{D}$$

故可将不发生局部屈曲的条件表示为

$$\frac{P}{\pi Dt}-\frac{0.4Et}{D}\leqslant 0$$

因为D和t均应大于零，由上式可推得

$$t-0.0282\geqslant 0$$

在上式中取等号，作直线$t=0.0282$如⑥，要使不发生局部屈曲，应排除直线⑥以下的区域。但在本例$D\leqslant 10$厘米的条件下，不发生局部屈曲的要求低于压应力不超过1000公斤/厘米^{2}的要求，直线⑥在曲线⑤之下，实际上不起控制作用。

综合以上情况，可知满足上述各项几何和力学条件的点应落在区域$ABCD$之内（如图中阴影所示），现在的任务是在这个区域内找出柱的重量W最轻的点。

首先，分别令$W=6$，4，2公斤，按式（1-2-1）得出重量等值线如图中虚线所示。不难发现，在图中阴影所示的区域$ABCD$内，每一个点（D，t）都代表一个满足全部几何与力学条件的可行的设计方案，但对应于不同的点子，重量也不同，当点子朝左下方移动时，重量W将趋于减小，在点B，W为极小值，因而是最优解，即

$$D=6.5\text{厘米}，\ t=0.15\text{厘米}，\ W=4.78\text{公斤}$$

点B为曲线⑤与直线②的交点，即表明此处纵向屈曲条件和最小厚度条件起控制作用。

若将最小厚度的条件放宽，例如改为

$$t\geqslant 0.05\text{厘米}$$

则图中的直线②将平行下移，B、C点也相应下移，此时最优点将是F点，相应的$D=8.05$厘米，$t=0.079$厘米，$W=3.12$公斤。这里起控制作用的条件是$\sigma\leqslant 1000$公斤/厘米^{2}和不发生纵向屈曲，而$t\geqslant 0.05$厘米的条件未起作用。

从上例可知，在容许区域内的任何一点，都代表满足全部给定条件的一个可行设计方案，但其中只有一点使结构重量取极小值，这点即为最优设计方案。该例中变量只有两个，可通过图解方法求出最优解。实际工程中设计变量很多，不便用图解方法求解，必须采用其他的有效方法，有关内容将在以后章节中介绍。

§1-3 结构优化的数学模型

从上节的例子可看出，结构优化的基本步骤是：首先，将工程实际问题用数学表达式

表示，即建立数学模型；然后采用适宜的优化方法使问题得解。当然，如何建立数学模型与所用的优化方法是有一定关系的。在交代优化问题的数学描述方式之前，我们先定义几个名词：

1.给定参数

指预先给定的描述结构特性的参数，在优化设计过程中，其值是固定的，因此可作为常数考虑。如上节例中的荷载P、柱长L、弹性模量E及材料容重ρ等都属给定参数。

2.设计变量

指在优化设计过程中所要选择的描述结构特性的量，它的数值当然是可变的。如上例中的柱子直径D和厚度t都属设计变量。

设计变量通常用x_1，x_2，…，x_n表示，并构成一个向量

$$\boldsymbol{x}=[x_1 \quad x_2 \cdots x_n]^T$$

3.目标函数

指优化设计所追求的目标，它是设计变量的函数，如前例中柱的重量$W(D, t)$便是目标函数，一般将目标函数表示为$V(\boldsymbol{x})$。

4.约束条件

指结构设计中为满足使用上的各方面的要求，对设计方案施加的种种限制，如保证结构正常工作的强度、刚度和稳定要求，规范的有关规定及构造上的要求等等。前例中对于柱的尺寸、应力及稳定的限制(即$D\leqslant 10$，$t\geqslant 0.15$，$\sigma\leqslant 1000$，$\sigma-\sigma_{cr}\leqslant 0$，$\sigma-\sigma_s\leqslant 0$)都属约束条件。约束条件一般表示为

等式约束：$h_j(\boldsymbol{x})=0$，$j=1, 2, \cdots, m$（m为等式约束条件的个数）；

不等式约束：$g_j(\boldsymbol{x})\leqslant 0$，$j=m+1, \cdots, p$（$p-m$为不等式约束条件的个数）。

引进以上名词后，可以将结构优化设计定义如下：结构优化设计是对于已知的给定参数，求出满足全部约束条件并使目标函数取最小值的设计变量的解。

这个定义可用数学方式表示为

$$\left.\begin{array}{ll}\text{极小化} & V(\boldsymbol{x}) \\ \text{约　束} & h_j(\boldsymbol{x})=0,\ j=1,2,\cdots,m \\ & g_j(\boldsymbol{x})\leqslant 0,\ j=m+1,\cdots,p\end{array}\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}1)$$

建立结构优化的数学模型是将实际工程中的结构优化设计问题转化为数学问题的一个非常重要的步骤。建立数学模型包括选定设计变量，选择目标函数，建立约束方程等内容。在建立数学模型的过程中，要充分吸收已有的工程经验，注意所得到的解答易于在实际工程中应用，而且在现有条件下确实能够求出解答来。只有这样，所建立的数学模型才有实际意义。

§1-4 结构优化的类型

结构优化，可分为以下三种类型：

1.结构截面优化

在结构类型、材料、布局、轮廓几何形状已定条件下，求结构各单元的最优截面尺

寸。如对结点位置已定的桁架或刚架求各构件最优截面尺寸，对坝体中面几何形状已定的双曲拱坝求坝体厚度，等等。对这一类问题，近二十年来研究较多，理论及方法已渐趋成熟，在某些领域的应用已见成效。虽然在如何提高计算效率等方面还有些工作可做，但今后重点应放在推广应用方面。

2.结构形状优化

结构形状优化，也称为结构的几何优化，它是在结构类型、材料、布局已定的条件下，对结构几何形状进行优化。例如，对布局已定的桁架或刚架的结点位置及截面尺寸进行优化。对双曲拱坝的中面几何形状及坝体厚度进行优化，等等。这一类问题目前正处于发展阶段，看来问题的解决并不十分困难。

3.结构拓扑优化

结构拓扑优化就是对结构的构件布局和结点联结关系进行优化。以一个桁架结构来说，这个桁架应分为几个节间？各结点之间如何联结？等等。结构拓扑优化是比较困难的。

在结构设计中还有一个结构类型和材料问题。例如，在设计一座桥梁时，是选用预应力混凝土桥呢，还是选用钢吊桥、斜张桥、桁架桥？在设计一座水坝时，是选用土坝呢、还是选用混凝土重力坝、支墩坝或拱坝？这个问题目前还是用方案比较方法解决。即根据工程具体情况，确定几种可能的结构类型，然后分别进行优化设计，得到各种类型的最优设计，最后再进行综合分析比较，从中选定一个结构方案。

§1-5 设 计 变 量

设计变量是在优化过程中所要选择的量，优化的目的就是要寻找这些变量的最优组合。如何选用设计变量是个重要的问题，关于这方面本书第三章中将有详细的阐述。设计变量通常有连续变量和离散变量两种类型。

（1）连续设计变量　这类变量在优化过程中是连续变化的，如前例中的D、t都是。在优化中处理这类变量比较方便，设计变量的数目也可能少一些，对于拱坝等体型复杂的结构，采取连续设计变量易于保证外形的连续性。

（2）离散设计变量　这类变量在优化中是跳跃式变化的，如供选用的型钢的截面积及钢筋直径都不是连续的。在优化中对离散设计变量的处理比连续设计变量要困难一些。一种办法是直接按变量离散变化的情况逐个选取，这在变量数目不多，问题较简单时可以采用。对于变量数目较大、问题较复杂的情况，往往采用离散变量连续化的方法，以简化计算。

下面给出离散变量连续化的一个例子。对于工字钢截面，假定各离散点之间的断面是连续变化的，用下面式子建立变量间的关系：

$$\left.\begin{aligned} A&=a_1 I_x^{b_1}\\ Z_x&=a_2 I_x^{b_2}\\ Z_y&=a_3 I_x^{b_3}\\ I_y&=a_4 I_x^{b_4}\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}5\text{-}1)$$

式中　　A——工字钢截面积；

I_x——截面对 x 轴的惯性矩；

I_y——截面对 y 轴的惯性矩；

Z_x——关于 x 轴的截面模量；

Z_y——关于 y 轴的截面模量；

$a_1 \sim a_4, b_1 \sim b_4$——系数。

可通过规格截面（即离散点）上述各量的对数关系来确定系数 $a_1 \sim a_4$，$b_1 \sim b_4$。这些系数得出后，便可利用（1-5-1）式来选取上述A、I、Z各量的连续变化值。优化之后，选一个与最终值接近的离散规格值来替换，当然，这是一个近似的最优解，但计算要简便得多。

如何求a_1、b_1等系数，先考察第一个式子，两边取对数，有

$$\lg A = \lg(a_1 I_x^{b_1}) = \lg a_1 + b_1 \lg I_x$$

作各离散点的$\lg A \sim \lg I_x$关系图，如图1-5-1中的直线1，则该直线的斜率即为b_1，在$\lg A$轴上的截距即为a_1。同理，作$\lg Z_x$、$\lg Z_y$、$\lg I_y$与$\lg I_x$的关系图，可求得各相应系数。图1-5-1为对于我国热轧普通工字钢(GB706-65)型号10，12，14，16，18，20a，22a，24a，27a，30a所作的对数关系图。表1-5-1是根据该图及计算所求得的各组系数值。

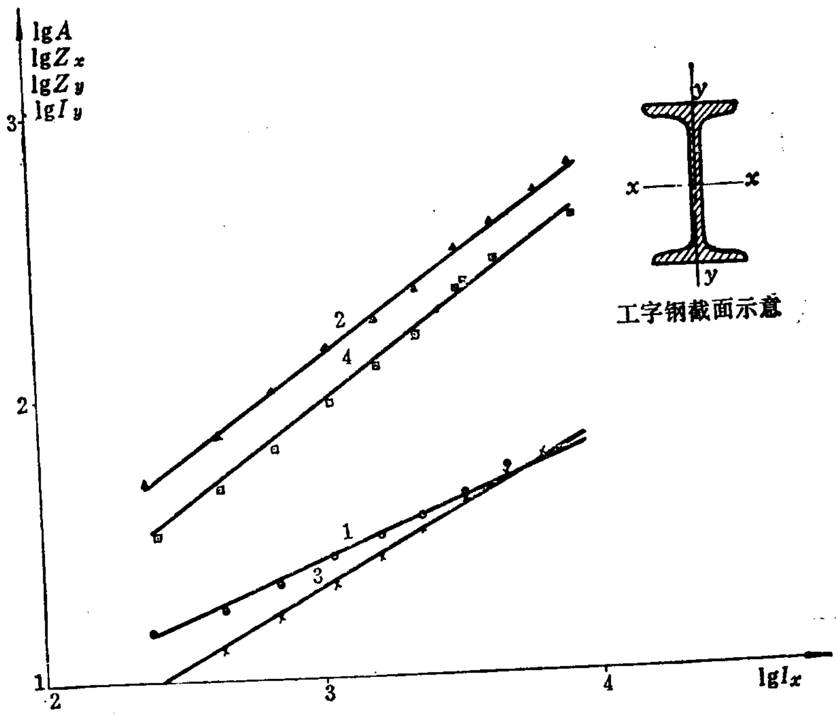

图 1-5-1

单位：A—厘米^2；Z_x，Z_y—厘米^3；I_x，I_y—厘米^4；1—$\lg A$；2—$\lg Z_x$；3—$\lg Z_y$；4—$\lg I_y$

在结构优化中，如果设计变量代表杆件截面，显然其数值不应小于零（即$x_i \geq 0$）。根据使用要求，设计变量变化的范围可能是被限制的，这种限制也就是一种约束条件。

通常，设计变量的数目越多，自由度越大，优化的效果越好，但计算量也越大。

表 1-5-1

a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4
1.560	1.047	0.525	0.660	0.404	0.699	0.525	0.713

§1-6 目 标 函 数

目标函数是人们用来衡量设计好坏的一种指标。采用什么样的指标来反映设计好坏的程度比较恰当，显然与结构本身的技术经济特性有关。通常采用的目标函数有：结构重量、结构体积、结构造价三种。

1. 结构重量

认为设计的结构重量最轻则达到了设计优化。杆件结构重量可表示如下：

$$W=\sum_{i=1}^{n}\rho_i l_i A_i \tag{1-6-1}$$

式中 ρ_i、l_i、A_i 分别为杆件容重、长度及截面积。当然，实际问题很复杂，结构重量不一定能全面地代表设计的质量，但在某些条件下加以简化，也可具有一定的代表性。例如对于飞机结构，应有载重大、航程长、使用经济、价格便宜等方面要求。但在各种因素相对稳定的条件下，在设计飞机结构时，在满足安全要求的条件下使重量最轻，对于满足上述各项设计要求总是有利的。因此，在飞机结构的优化设计中常以结构重量作为目标函数。

2. 结构体积

认为结构体积最小则设计达到最优。结构体积可表示为

$$V=\sum_{i=1}^{n}l_i A_i \tag{1-6-2}$$

式中l_i——构件i的长度；A_i——构件i的截面积。如各构件的容重相同，则结构体积与结构重量是等价的。

3. 结构造价

在优化过程中，认为结构造价最低则设计最优，结构造价可表示为：

$$C=\sum_{i=1}^{n}c_i l_i A_i \tag{1-6-3}$$

式中c_i——构件i的单位体积造价。在钢筋混凝土结构优化设计中，除了钢筋和混凝土的造价外，还可以把模板的造价也包括在目标函数中。

对于均质结构，如素混凝土结构、钢结构等，通常用结构重量W或体积V作目标函数。对于非均质结构，如钢筋混凝土结构，通常用结构造价C作目标函数。

§1-7 约 束 条 件

约束条件一般有几何约束条件和性态约束条件两种。

1.几何约束条件

即在几何尺寸方面对设计变量加以限制。如前例中的$D\leqslant 10$厘米，$t\geqslant 0.15$厘米以及$D\geqslant t$都属几何约束。几何约束条件是根据使用及工艺要求而提出的，一般比较简单，可以用数学表达式表示，是显式约束。

2.性态约束条件

性态约束条件是对结构的工作性态所施加的一些限制。例如，对结构的应力、位移、自振频率等施加的如下限制：

$$\sigma_j(\boldsymbol{x})-\bar{\sigma}_j\leqslant 0 \tag{1-7-1}$$

$$u_i(\boldsymbol{x})-\bar{u}_i\leqslant 0 \tag{1-7-2}$$

$$q_i(\boldsymbol{x})-\overline{q}\leqslant 0 \tag{1-7-3}$$

式中$\sigma_j(\boldsymbol{x})$、$\bar{\sigma}_j$分别为第j单元的应力和允许应力，$u_i(\boldsymbol{x})$、$\bar{u}_i$分别为第i点的位移和允许位移，$q_i(\boldsymbol{x})$、$\overline{q}$分别为结构的第i个自振频率和允许值。

在上列三式中，允许值$\bar{\sigma}_j$、$\bar{u}_i$和$\overline{q}$是事先已给定的数值，但$\sigma_j(\boldsymbol{x})$、$u_i(\boldsymbol{x})$及$q_i(\boldsymbol{x})$却是设计变量$\boldsymbol{x}$的函数，除了一些极简单的结构，可用$\boldsymbol{x}$的显式表示外，对于实际的工程结构，都难以用$\boldsymbol{x}$的显式表示，而对于每一个设计点$\boldsymbol{x}$都必需进行一次结构分析才能求出其应力和位移，如果要求出自振频率的话，还要再进行一次频率分析。因此，对于实际的工程结构，性态约束往往是隐式约束，在本书第三章，我们将阐明如何把隐式约束变换成显式约束，以简化计算。

3.带参变数的约束条件

如图1-7-1（a）所示，当结构承受一个移动荷载时，结构内部应力不但与设计变量$\boldsymbol{x}$有关，而且还与荷载移动的距离s有关，即$\sigma=\sigma(\boldsymbol{x},\ s)$。因此，应力约束条件应写成：

$$\sigma_j(\boldsymbol{x},\ s)-\bar{\sigma}_j\leqslant 0,\quad 0\leqslant s\leqslant L \tag{1-7-4}$$

在这里，s是一个参变数，其变化范围为0至L（L为荷载移动的范围，此处是跨度）。

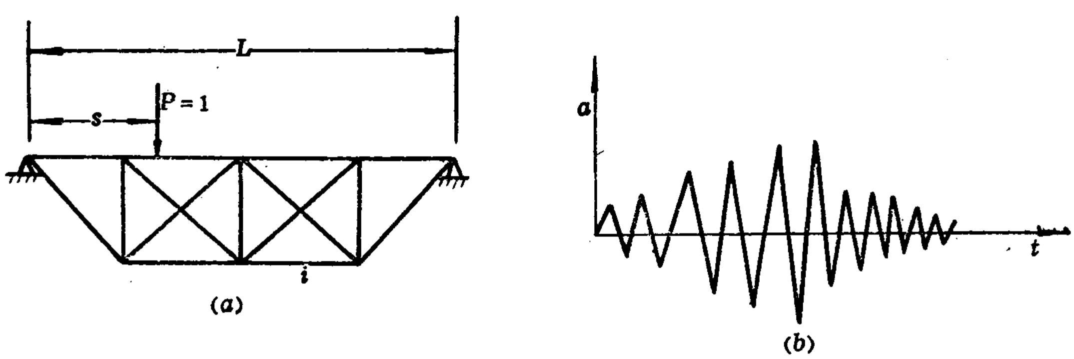

图 1-7-1

又如结构遭受到一次地震，地面运动加速度是时间t的函数，如图1-7-1（b）所示，显然，这时结构应力也是时间t的函数，应力约束条件可写成：

$$\sigma_j(\boldsymbol{x},\ t)-\bar{\sigma}_j\leqslant 0 \tag{1-7-5}$$

在这里，时间t就是参变数。

处理带参变数的约束条件的一个办法是，让参变数s或t取有限个离散值：