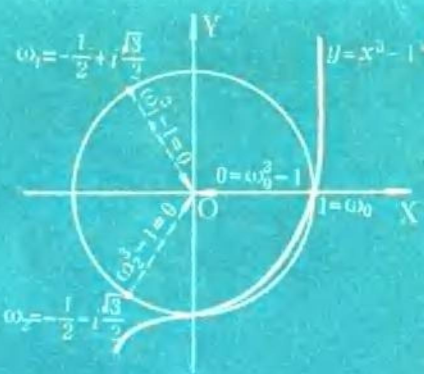
数学进修用书



王祖樾

方程与多项式

ANGCHENGYUDUOXIANGSHI

浙江人民出版社

数学进修用书

方程与多项式

王祖樾

浙江人民出版社

数学进修用书

方 程 与 多 项 式

王 祖 樾

*

浙江人民出版社出版
浙江新华印刷厂印刷
浙江省新华书店发行

开本：787×1092 1/32 印张：3 5/8
1975年4月第 一 版
1979年4月第一次印刷
印数：1—150,000

统一书号：7103·1049
定 价：0.27 元

内 容 提 要

本书较详细地叙述了整式代数方程、多项式的基本性质和多项式求根等中学数学与高等代数基础知识，并介绍了微积分中的导函数概念在根的近似计算方面的应用，还编入少量思考练习题，适合中学师生和工农青年自学.

编 辑 说 明

这套丛书主要是为中学数学教师编写的. 随着教育事业的发展, 教师队伍迅速壮大, 新教师大量增加. 在新的长征中, 他们担负着为祖国培养千千万万建设人才的极其光荣的任务. 当前他们需要尽快地熟悉和掌握教育部新编教材, 努力提高教育质量, 因而进修的要求十分迫切. 本丛书出版目的就是为他们进修提供一点比较系统的材料. 编写时照顾教师队伍的实际状况, 内容比教育部新编中学数学教材要扩大、加深和提高一些, 使学完以后继续自学大学有关数学课程, 基础打得更加扎实. 同时也注意适当联系中学教学实际, 有助于教师进行教学. 丛书也适合具有高中程度的学生和工农青年自学.

前　言

方程，自古以来，一直是一个富有吸引力的数学研究课题．在社会生产实践的推动下，在一代又一代人智力的精心培育下，方程研究的硕果累累，方程研究的内容日益更新．

方程一词源于我国古代最著名的数学著作《九章算术》(公元一世纪左右成书)，书的第八章叫做“方程章”，其内容相当于我们现在的线性方程组．由于古代采用“竹筹”记数，将方程组的系数用竹筹排列出来成为长方形，然后变动长方形的竹筹阵以求解答，这种“列筹成方的课程”就称为方程．现在，我们把方程组中的一个等式称为方程，已与该词作为方程组的古义有所差别．现在我们知道，含有未知数的等式叫做方程，这是一种最简单的规定．可见，方程是一个向人们提出一定问题的等式．

方程的概念是不断发展的．随着运算对象的扩大，运算方式的增加，方程的类型和内容也在不断地扩大与增加．

在运算对象是“数”的这样一个范畴里，对未知数如果只限于进行代数运算(加、减、乘、除、乘方与开方)，那么相应的方程就是代数方程(又分整式方程、分式方程和无理方程)；在所谓超越运算下(超越运算，这只是一种习惯说法，并不严格．这种“运算”不是常义下的运算，而是一种初等超越函数的函数对应关系)，则是超越方程(又分指数方程、对数方程、三角方程和反三角方程等等)．

如果把运算对象从“数”扩大到“函数”，把函数当作考察对象，那么方程中的“未知数”就变为“未知元”，对未知元——“未知函数”只限于作初等运算(代数运算和超越运

算)，那么相应地叫做函数方程；如果实施的是微分运算、积分运算，那么相应地就叫做微分方程、积分方程了.

在逻辑代数里又有所谓布尔方程……

总之，方程可广义地说成是含未知元的某种运算意义下的等量关系式，而解方程就是找出满足这种等量关系式的未知元.

我们这本小册子，只能涉及方程这个广阔领域里的一部分——整式代数方程. 但是，正是它才是方程的发源地. 方程的研究首先是从整式代数方程开始的；并且，在十九世纪关于五次及五次以上的整式代数方程无公式解的重大的历史性的突破后，又促进了一个研究一般元素之间建立运算关系的新分支——群论的诞生. 因此，传统的"方程论"就是指整式代数方程的理论.

整式代数方程的左端就是多项式，因此整式代数方程的研究又归结为多项式理论的研究. 这本小册子的定名为"方程与多项式"，就是为了清楚地表明，书中所讲的方程理论就是由多项式组成的整式代数方程.

这本小册子的内容安排是想按照具体——抽象——具体的格式分为三个部分. 第一部分是从§1至§7，着重介绍方程的公式解法和特殊解法的解题技巧，特别强调了未知量代换或变量代换是解决问题的有力杠杆. 第二部分是从§8至§12，介绍了多项式的可除性理论并完成了作为代数发展一个里程碑的代数基本定理的证明. 第三部分是从§13至§15，着重介绍了插值多项式、根的界限与近似计算，作为第二部分理论的具体应用和具体实现. 最后一节§15运用了微积分中的导数概念使根的近似计算的讨论更加深入.

由于水平的限制和编写时间的仓促，在这本小册子中可能有不少缺点与错误，笔者诚挚地希望读者批评指正.

目　录

§ 1　从列算式到列方程

大家知道，在算术里，用列算式来解应用题，需要经过一番相当的思考；可是，一旦改用列方程的代数解法，问题却变得比较简单了.

为什么用算术解法显得困难，而用代数解法却变得容易呢？其中的“奥妙”在哪里呢？让我们看一个例子.

例　敌机以每分钟 16 公里速度窜犯我领空，我机以每分钟 22 公里速度出击相距 289 公里处的敌机，在相距 0.3 公里时开炮而击落敌机，问我机飞行时间（炮弹飞行时间忽略不计）.

列算式的算术解法：敌我两机相向而行，以每分钟(22＋16)公里的速度接近，接近到 0.3 公里处敌机被击落，因而敌我两机相向飞行的总距离是（289－0.3）公里，最后可得

$$\text{我机飞行时间}=\frac{289-0.3}{22+16}\approx 7.6\,(\text{分}).\tag{1}$$

列方程的代数解法：设我机飞行时间为 x 分钟，将问题的条件“翻译”为等式，可得

$$22x+16x+0.3=289,\tag{2}$$

通过移项、合并同类项，最后得

$$x=\frac{289-0.3}{22+16}.\tag{3}$$

由上看到，用算术解法所列出的等式（1），恰好就是代数解法最后得到的等式（3）. 这就是说，列算式的算术解法，从头至尾全凭思考、分析，一次就要给出一个未知数在一边已知数在

另一边的等量关系(3)，难度较高．列方程的代数解法只要列出等量关系(2)，而从(2)至(3)则已是十分自然的程式化的运算，这样，用符号及运算代替了算术解法中的一部分思考，使难度降低了．这种程式化的过渡实现了对"算术解法的无一定规则进行思考"的突破．须知，这种突破归功于用字母代"数"、设未知数以及正负数运算法则的三者结合，这也就是变难为易的奥妙所在．详细地说，用字母代"数"提供了表达一般的数量关系的可能；"设未知数 x"使"未知"暂时看作"已知"，和各已知数"一视同仁"、"地位平等"，从而列出方程；最后利用正负数运算解出"未知"，实现了"未知"——"暂时已知"——"解出未知"这样一个由未知到已知的矛盾转化．

顺便指出，如果遇到一个算术应用题，我们不会列算式的话，那么只要用代数的办法列出方程，移项、合并同类项，但保留一切数据而不化简，最后求得的未知数 x 的算式，就是算术解法里所要列出的算式．在这个算式中恢复各数据本来的具体意义，就不难找出列算式的思路．

总之，用列方程的代数解法来解决实际问题，是势在必行，成为数学发展的必然了．

现在我们可以仔细地讨论一下"什么是方程"了．

最初等的一种提法是：含有未知数的等式叫做方程．这种定义仅是描述性的、形式的，还未涉及方程的"内在"．方程概念的完整定义，可以从函数观点这一角度给出，也可以从纯粹的抽象代数这种角度上给出．在具有一定代数结构的集合上的多项式理论建立之后，我们就可以纯代数地给出方程概念的定义．我们不能在这本通俗读物中给出这一方面的介绍．下面，只给出函数观点下的一元方程的定义．

定义 设函数 $f(x)$，$g(x)$在数集M上有定义，由这两个函数建立的关系式

$$f(x)=g(x)$$

叫做方程．如果自变量x在M上取到数值α，使等式

$$f(\alpha)=g(\alpha)$$

成立，那么α就叫做这个方程在数集M上的一个解或根．

显然，根据方程解的定义，方程

$$f(x)=g(x) \quad 与 \quad [f(x)-g(x)]=0$$

具有相同的解，即是两个具有同样解的方程．因此，讨论方程时，也可以仅讨论方程右端为0的情形，即讨论形如

$$F(x)=0$$

的方程．

以函数$F(x)$的类型，我们来定名方程的类型．

当$F(x)$为多项式（整式）函数、分式函数、或还含无理函数时，相应的方程$F(x)=0$分别叫做整式方程、分式方程及无理方程．整式与分式方程统称有理方程，有理与无理方程又统称代数方程．

当$F(x)$除含代数运算外，还含指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数时，相应的方程$F(x)=0$分别叫做指数方程、对数方程、三角方程及反三角方程．它们统称超越方程，即$F(x)$还含初等超越函数时，相应的方程$F(x)=0$叫做超越方程．

无理方程常可通过"有理化"分式方程通过"整式化"化为整式方程．因此，从理论上讲，研究代数方程的重点是研究整式方程．

由n次多项式得到的方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (a_0\neq 0),$$

叫做n次代数方程，或简称为n次方程，其中系数$a_0, a_1, \cdots\cdots,$

a_n取实数或复数，或根据需要规定为整数或有理数.

思考与练习

1. 对于一个未知数的应用题，为什么用列方程的代数解法比算术解法容易得多？
2. 试比较方程的描述性定义与方程的函数定义．为什么中学教学时常采用前一定义，而施教者必须弄懂后一定义？（后一定义是两个方程是否同解的理论根据）
3. 选择一个较难的算术应用题，用列方程的代数解法诱导出算术解法.

§ 2 数域与方程的解

通常，在给出方程时，方程中的函数的定义域并未明确指出，因此这种函数定义域常理解为使函数有意义的数集. 使函数有意义是什么意思呢？函数$\sqrt{x}$，在实数范围里考虑，只对$x\geqslant 0$有意义，其定义域为$[0,+\infty)$；如果在复数范围里考虑，那么对一切实数与复数都有意义，其定义域为数平面，即全部复数.

还有，n次方程中的n次多项式的函数，它的定义域是什么呢？显然，这完全是人为赋予的，可以是全体整数，可以是全体有理数、全体实数，更可以是全体复数. 总之，视我们预先的假定而定.

这样一来，什么叫做方程有解、无解呢？问题的回答就复杂了.

$2x-3=0$，在自然数集上无解，在分数集合上有解；

$2x+3=0$，在正数集合上无解，在有理数集上有解；

$x^2-2=0$，在有理数集上无解，在实数集上有解；

$x^2+1=0$，在实数集上无解，在复数集上有解；

$\frac{1}{x}=0$，在普通的数集上无解，在近代新产生的非标准数集上有解，其解为非标准数无穷大.

把上述方程问题放在抽象代数里讨论，就显得更为一般. 某个方程在某个具有某种运算的集合里无解，而当这个集合扩张以后，那么在扩张后的集合里就可能有解了.

历史的进程表明，无理数、正负数以及虚数这些数概念发展中的主要里程碑，都是因解决方程问题遇到了障碍而研究、建立的．至于代数数（如整数，有理数、以及$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ 等）与超越数（如 π，e 等）也以是否是整系数整式方程的解而区分的．总之，方程问题传递了实践要求建立新数的信息，而新数的建立反过来又解决了方程问题；在新的高度上，新的方程问题又再传递实践要求建立新的运算对象的信息．方程与数正是这样互为因果、互相促进、辩证地向前发展的．

也许会产生这样的疑问：方程有解、无解这种相对性，不确定性，不是使方程解的研究变得毫无意义了吗？能否这样说，$x^2=-1$ 无解，我们制造了一个形式符号 $i=\sqrt{-1}$，把 i 当作 $x^2=-1$ 的解，方程 $x^2=-1$ 不就有解了吗？如果这个办法可行的话，那么任何方程都可以定义一个解，解方程就变得十分轻而易举和毫无意义了．事实并非如此．把纯粹符号 $i=\sqrt{-1}$ 当作方程 $x^2=-1$ 的解，这无非是一种自我安慰，用未知来回答未知的办法，丝毫未给我们增加什么知识，最多不过是搞了一个形式解．要把形式解 $x=i$ 转化为真正有意义的解，就必须使符号 $i=\sqrt{-1}$ 变成“数”——可运算的对象，亦即在实数与 i 之间找出一套运算规律，使 $a+bi$（a，b 为实数）受控于这套所谓复数的运算规律，到了这个时候，我们把具有运算能力的 i 叫做方程 $x^2=-1$ 的解，就变的十分有意义了．只有在这以后，i 所反映的客观背景才有可能弄清楚：它代表垂直于横轴的单位向量，“i 乘以数平面某点”的作用，就等于把该点绕原点旋转90°．

今后我们把有理数全体、实数全体、复数全体，分别叫做有理数域、实数域、复数域．这是三个最常用的最重要的数域（数域有它特定的定义，可在高等代数书中查到）．

综合上述，数域和解方程是密切相关的．首先要弄清在什么数集、数域上讨论方程这个前提，然后再确定在该数集、数域上方程是否有解，解是什么，或近似解是什么．

思考与练习

1.方程有解无解的确切含义是什么？

2.你是否可以论述一下，方程的研究对每次数概念扩张的重大作用．

§ 3　二次方程的进一步讨论

我们在复数域上讨论二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0). \tag{1}$$

一、　用未知数代换法解二次方程

为了消除二次方程的一次项并求得解，我们作如下未知数代换：

$$x=y-\frac{b}{2a};$$

于是，方程 (1) 化为

$$a\left(y-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(y-\frac{b}{2a}\right)+c=0,$$

$$ay^2-\frac{b^2}{4a}+c=0,$$

$$y^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

$$y=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

从而方程 (1) 在复数域里有两个解或两个根：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{2}$$

当 $b^2-4ac\neq 0$ 时，二次方程在复数域里有两个不相同的

根. 对于实系数二次方程，若 $b^2-4ac>0$，则二次方程有两个不相同的实根，若 $b^2-4ac<0$，则有一对共轭复根.

当 $b^2-4ac=0$ 时，二次方程的二个根相同. 这时，我们把这个根$\left(x_{1,2}=\dfrac{-b}{2a}\right)$叫做该二次方程的重根.

未知数代换或变量代换法，是转变运算形式利于解决问题的有力杠杆，必须细心加以领会. 在解三次、四次方程或其他方程时，我们将会进一步看到这种方法的优越、简捷，在高等数学里，这种方法更是被广泛地应用着.

二、根与系数的关系——韦达定理

由 (2) 可以验证

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases} \tag{3}$$

现在再直接给出上述证明：设 x_1，x_2 为二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，那么有

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a(x-x_1)(x-x_2),$$

或

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2,$$

比较上式两端系数，即有 (3) 式.

(3) 式称为根与系数关系的韦达(法国数学家，1540—1603)定理，它深刻地揭示了整式代数方程根与系数之间的内在联系. 我们在 § 7 还要详细讨论. 对于二次项系数为 1 的二次方程，它的一次项系数是两根之和的相反数，它的常数项是两