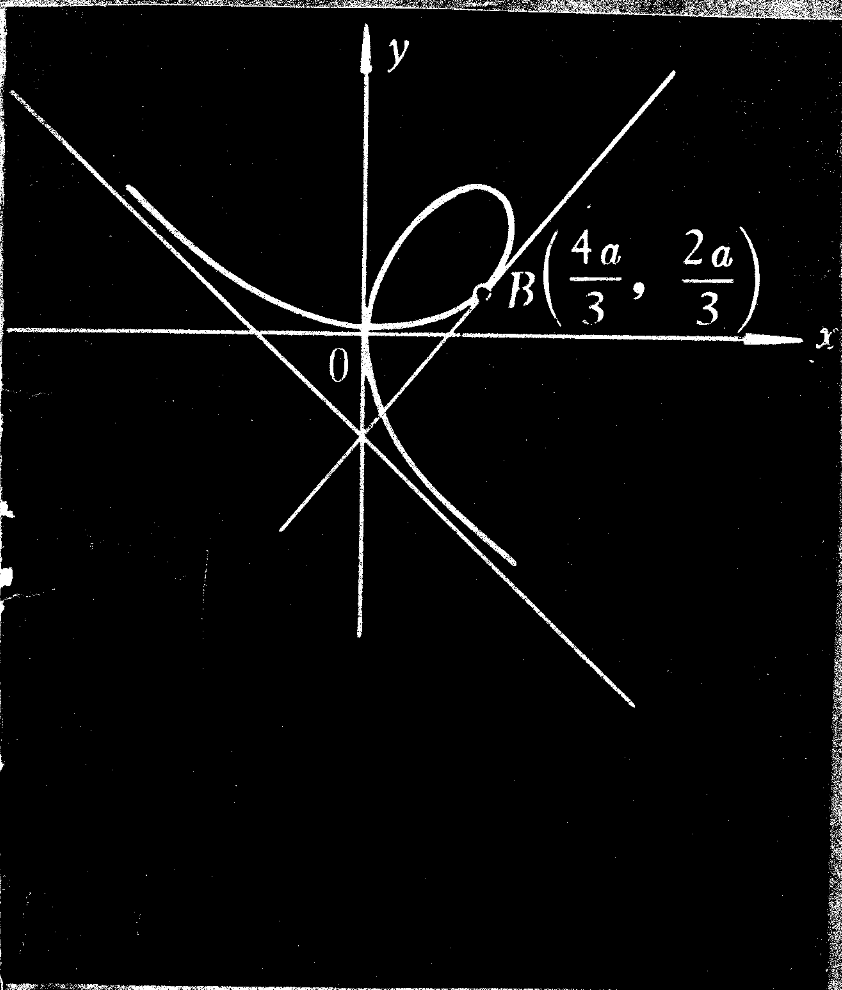
y
x
0
$B\left(\frac{4a}{3}, \frac{2a}{3}\right)$

函　　数

章志敏　张素亮　编著

科　学　出　版　社

1 9 8 5

内 容 简 介

本书通过具体的历史事实，对变量数学的基本内容做了简单的介绍，叙述了函数的概念，研究函数的方法，以及函数的一些初步应用.

为了便于读者自学，书中穿插了一些练习题，书末附有答案.

本书可供大中学生、中学数学教师阅读.

函 数

章志敏 张素亮 编著

责任编辑 陈永锵 毕 颖

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985年2月第一版 开本：787×1092 1/32

1985年2月第一次印刷 印张：7

印数：0001—14,200 字数：134,000

统一书号：13031·2803

本社书号：3942·13—1

定价： 1.30 元

编 者 的 话

世界上没有一样东西不在变化,“轻舟已过万重山”说的是景物在运动变化;“乡音无改鬓毛摧”说的是人的运动变化.俗话说:“稳如泰山”,实际上,一百万年以来,泰山已升高了几百米.每一样东西都在增长或收缩,变热或冷却,它们的位置,它们的颜色,它们的组成都在变化.正因如此,变量数学的方法已经渗透到我们生活中的各个部分.每架飞机、每台电视机、每座桥梁、每艘宇宙飞船都和变量数学产生一定的联系.

本书对变量数学的基本内容做了简单的介绍,叙述了函数的概念、研究函数的方法以及函数的一些初步应用.编写过程中,我们总是希望把概念剖析得透彻一点,把方法介绍得条理一些.但是由于我们水平的限制,这些良好的愿望不一定能够达到.因此我们只能把培根的一句话,敬献给广大读者:

“读书时不可存心诘难作者,不可尽信书上所言,…而应推敲细思.”

本书部分材料,选自《数学通报》有关文献,数学史的部分,大部分取材于梁宗巨先生编的《世界数学史简编》.在此表示感谢.

限于作者水平，书中难免有缺点和错误之处，敬请读者批评指正。

编　者

目　　录

第一章 函数的定义

回顾十七世纪初期欧洲的科学文化舞台，可以看到那里正在经历着动荡和变革．伦敦的戏迷们正在悼念不久前去世的莎士比亚；蒙德维狄在创作世界第一部大型歌剧；哈维刚刚开始他的一系列著名演讲——论述心脏并非情感的活动中心，而是血液的泵；开普勒发表的行星运动三定律，它将确切地描述各大行星是怎样绕日运行的；哥白尼提出的日心说被罗马的宗教裁判宣布为异端邪说；用新发明的望远镜忙忙碌碌地进行观察的伽利略，已接到教会的严厉警告，要他放弃对哥白尼的热心支持．数学领域也正处在一批新发现的前夕，揭开序幕的是法国的哲学家、数学家笛卡儿（Descartes）．

1616 年的冬天，严寒侵袭着德国的多瑙河，在河畔的诸伊堡军营中，笛卡儿终日在深思，他正在寻找“一种不可思议的科学基础”．在 11 月 10 日，他在一间狭小的火炉间里一边烤火，一边沉思．突然，长期酝酿中的“方法”，像闪电般地闪进他的脑海，这使他久久不能平静，晚上连做恶梦．笛卡儿自己写道：“第二天，我开始懂得这惊人发现的基本原理了．”

惊人的发现是什么？这就是把数学中对立着的两个研究对象“形”和“数”统一起来，并且引入“变量”的概念，这是数学中一项划时代的创举．恩格斯指出：“数学中的转折点是笛

卡儿的变数. 有了变数,运动进入了数学,有了变数,辩证法进入了数学,…"[1].

笛卡儿引入了变量(或变数)的思想,当时还没有使用变量这一术语,他称为"未知和未定的量"(*unknown and indeterminate quantities*),同时也引入了"函数". 笛卡儿在指出 y 和 x 是变量的时候,已注意到 y 依赖于 x 而变.

一、函数的定义

笛卡儿写的第一次涉及到变量的书,名叫"几何学",出版时间是 1637 年. 三百多年过去了,函数这一重要概念目前已成为数学中基础柱石之一,它已是近代科学技术中不可缺少的工具. 函数概念的定义,现在被叙述为:

设给定两个变量 x 及 y,其变动区域为 M 和 N,如果 M 中的每一个 x 值,总有一个确定的 y(在 N 内)和它对应,则变量 y 称为变量 x 的函数.

分析一下函数的定义,可以看出它是由三部分构成. 变量 x 的取值范围 M,我们称为函数的定义域;变量 y 的变化范围,称为函数的值域;确定 x 与 y 的数值间的对应关系,一般用 $f(x)$ 表示. 在同时研究两个或多个函数时,一般要用不同的符号表示它们的对应关系,如 $F(x)$、$G(x)$、$g(x)$ 等等. 表示函数对应关系有各种不同的方法,常用的有下述三种:

---

1) 恩格斯:《自然辩证法》,人民出版社 1971 年版,第 9 页.

1. 公式法

这种方法就是用数学表达式把自变量 x 与函数之间的依从关系写出来. 即在自变量 x 与必要的常数之间，按一定顺序施行若干次数学运算就能把函数之值算出来. 例如，二次函数的一般形式为:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0),$$

这就是对于自变量 x 和常数 a、b、c 经过乘方、乘法和加法构成一个代数式 $ax^2 + bx + c$ 来表示 x 与函数 y 之间的依从关系.

用公式法表示函数的优点是: 函数关系清楚；容易从自变量求出函数的对应值；便于用分析的方法讨论函数的性质. 缺点是不直观，有时需要作复杂的计算.

2. 列表法

这种方法就是把自变量值和对应函数值用列表方式表示出来. 例如，三角函数表、火车客票价目表等.

列表法的优点是不需要计算就能知道函数的值. 但是表中列出来的函数值毕竟有限，而函数的值一般多至无穷. 如果用列表法就很不方便. 另一缺点是不容易从表中考察函数的变化情况，讨论函数的性质不够方便.

3. 图象法

在一个函数关系中，以自变量的值为横坐标，以函数的对应值为纵坐标，由这样的所有点在平面上所成的轨迹，叫做函数的图象.

函数的图象一般是曲线，包括特殊情况的直线. 一般有

了函数就能画出它的图象，反过来说，平面上的一条曲线，又确定一个函数．用曲线表示函数的方法，叫做图象法．例如，气温记录仪画出来的曲线，就是用图象法给出来的函数．

对于图象法给出来的函数，既不能进行数学运算，又不能得到函数的准确数值，这是图象法的缺点．它的优点是直观，可以启发我们的研究方向和检验结果．

二、函数的定义域

定义域是指使函数有意义的自变量 x 的取值范围．若函数的对应关系是用公式法表示的，那末求函数定义域可以参考下述准则：

（1）当函数为整式时，它的定义域是全体实数；

（2）当函数为偶次根式时，它的定义域由能使根号内的式子大于或等于 0 的数组成；

（3）当函数为分式时，它的定义域由能使分母不等于 0 的数组成；

（4）当函数为对数函数时，它的定义域由能使真数表达式大于 0 的数组成；

（5）若函数的解析式是由几个数学式子组合而成的，则这个函数的定义域就必须取这几个数学式子允许值范围的公共部分．

如果函数的对应关系是由图象法表示的，那么可用观察法求出定义域．

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\lg(5-x)$；

(2) $f(x)=\sqrt{\sin x}$；

(3) $f(x)=\log_a[\log_a(\log_a x)]$。

解 (1) 因二次根式内的代数式的值必须 $\geqslant 0$；分式的分母 $\neq 0$；

对数式的真数必须 >0。

故函数 $f(x)$ 的定义域就是适合下列不等式组的解：

$$\begin{cases} x-2\geqslant 0\\ x-3\neq 0\\ 5-x>0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x\geqslant 2\\ x\neq 3\\ x<5 \end{cases}$$

得：$2\leqslant x<3$ 与 $3<x<5$。

(2) 因偶次根式内的式子必须 $\geqslant 0$，

故 $$\sin x\geqslant 0$$

即 $$2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi \quad (k\text{ 为整数})$$

也就是说 $f(x)$ 的定义域为 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$ (k 为整数)。

(3) 因对数式的真数必须 >0，

故当 $a>1$ 时，必须有 $\log_a(\log_a x)>0$，

即 $$\log_a x>1,$$

$$x>a.$$

当 $0<a<1$ 时，也必须有 $\log_a(\log_a x)>0$，

故 $$0<\log_a x<1,$$

即 $$a<x<1.$$

也就是说 $f(x)$ 的定义域是:

$$\begin{cases} x > a, & 当 a > 1 时; \\ a < x < 1, & 当 a < 1 时. \end{cases}$$

例 2 指出下列各函数是否完全相同?

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = \frac{x^2}{x}, \quad f_3(x) = (\sqrt{x})^2,$$

$$f_4(x) = \sqrt[3]{x^3}, \quad f_5(x) = 2^{\log_2 x}.$$

解 经过变形得:

$$f_2(x) = x \ (x \neq 0), \quad f_3(x) = x \ (x \geqslant 0),$$

$$f_4(x) = x \ (x \in R), \quad f_5(x) = x \ (x > 0).$$

因为两个函数的定义域不同,即使对应关系相同,也是不同的函数,所以只有 $f_4(x)$ 与 $f_1(x)$ 相同,其它各函数均不是同一函数.这一例题说明了,将函数变形化简时,需要在原函数的定义域上进行,变形化简后,要将定义域标注在后,以示说明.

例 3 指出正切函数 $y = \operatorname{tg} x$ 的定义域.

解 观察正切函数 $y = \operatorname{tg} x$ 的图象(图 1.1)可知,当

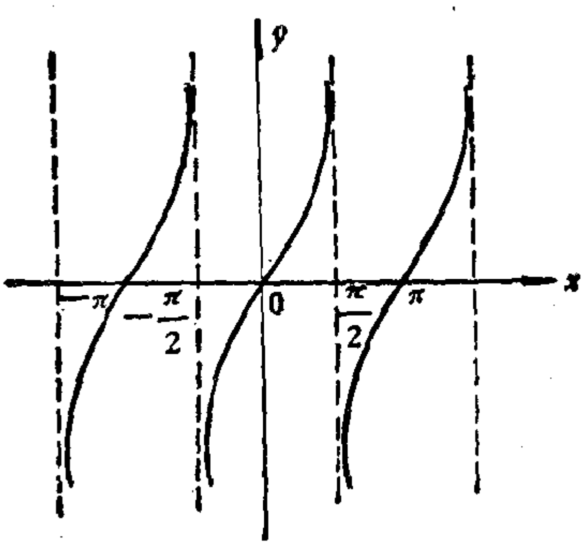

图 1.1

$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时（k 是整数），$\mathrm{tg}\,x$ 的值不存在，即 $y=\mathrm{tg}\,x$ 的定义域是：$\left(x: x \neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in J\right)$，（其中 J 是整数集）。

三、函数的值域

值域是指函数 y 的变化范围．若函数的对应关系是用公式法表示的，那末求函数的值域可用观察法和函数变换法，若函数的对应关系是用图象法表示的，那末由图象的位置可以确定函数的值域．

1．观察法

对一些简单的函数可在定义域及函数对应关系的基础上确定函数的值域，这种方法称为观察法．

例1　求函数 $y=\sqrt{x^2+3}$ 的值域．

解　显然算术根 y 非负，但因 $x^2\geqslant 0$，故 $x^2+3\geqslant 3$，$\sqrt{x^2+3}\geqslant\sqrt{3}$，所以函数的值域是 $\sqrt{3}\leqslant y<+\infty$．

例2　求函数 $y=\frac{x+1}{x+2}$ 的值域．

解　由 $x+1\neq x+2$，得 $y=\frac{x+1}{x+2}\neq 1$，故函数的值域为 $(-\infty,1)$，$(1,+\infty)$．

在求有理分式函数的值域时，容易出现的错误是：(1) 认为定义域要除去使分母为零的值，故值域也要除去某些值；(2) 不考虑分式的特征而认为值域为一切实数．这两种偏向

均应防止.

2. 函数变换法

由函数关系式 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$，再求函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域以确定函数 $y=f(x)$ 值域的方法，称为求值域的函数变换法.

例 3 求函数 $y=\dfrac{1}{(x-1)(2x-1)}$ 的值域.

解 由 $y=\dfrac{1}{(x-1)(2x-1)}$ 解出 $x=\dfrac{3y\pm\sqrt{y^2+8y}}{4y}$.

再求 $x=\dfrac{3y\pm\sqrt{y^2-8y}}{4y}$ 的定义域,即解不等式组:

$$\begin{cases} y^2+8y\geqslant 0 \\ y\neq 0 \end{cases} \quad \text{得} \quad \begin{cases} -\infty<y\leqslant -8 \\ 0<y<+\infty \end{cases}$$

所求函数 $y=\dfrac{1}{(x-1)(2x-1)}$ 的值域为 $(-\infty,-8]$, $(0,+\infty)$.

例 4 求函数 $y=x+\sqrt{1-2x}$ 的值域.

解 由 $y=x+\sqrt{1-2x}$ 解出

$$x=(y-1)\pm\sqrt{2-2y}.$$

再求 $x=(y-1)\pm\sqrt{2-2y}$ 的定义域为 $(-\infty,1]$.

所求函数 $y=x+\sqrt{1-2x}$ 的值域为 $(-\infty,1]$.

3. 图象法

利用函数的图象来确定函数值域的方法,称为图象法.

例 5 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2}$ 的值域.

解 函数的定义域是 $[-1, 2)$ 和 $(2, +\infty)$，且当 x 在 $[-1, 2)$ 中取值时，y 的值由零减小到负无穷，当 x 在 $(2, +\infty)$ 中取值时，y 的值由正无穷逐步趋近于零．由图象（图 1.2）可见值域为全体实数．

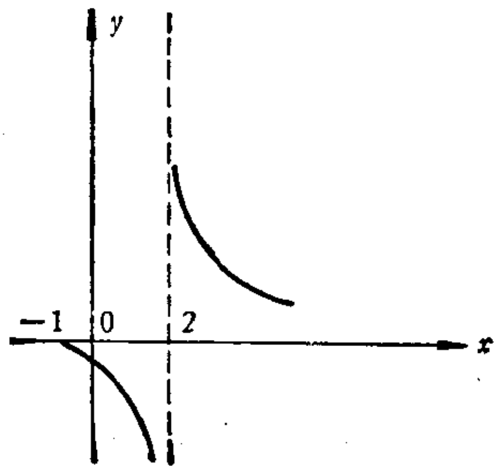

图 1.2

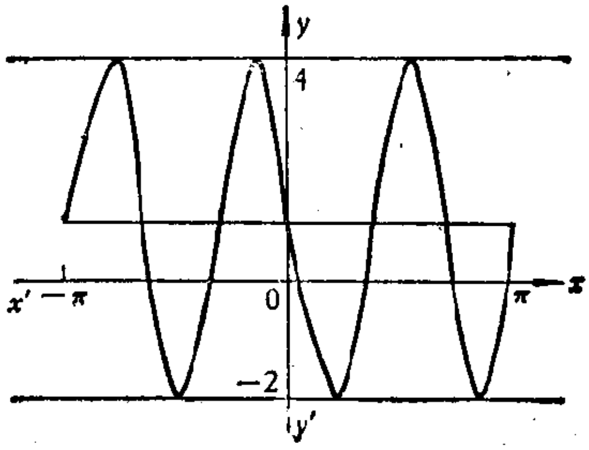

图 1.3

例 6 求函数 $y=3\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1$ 的值域．

解 把 $\sin x$ 的图象周期缩小 3 倍 $\left(\text{即周期 } \dfrac{2}{3}\pi\right)$，再向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位；然后把振幅扩大 3 倍，再向上平移 1 个单位．即得 $y=3\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1$ 的图象(图 1.3)．由图象可以看出函数的值域是 $[-2, 4]$．

四、函数的对应关系

自变量 x 与函数 y 的对应关系是指，我们对于自变量 x

的一个确定的数值 x_0（定义域内）应以如何的方式求出函数 y 的对应值 y_0. 对应关系一般用 f、g、F 等字母来表示. 如:

$$f:\ x \to y = x^2 - 3x + 1,$$

其对应关系 f 为: 自变量的平方减去自变量的 3 倍再加 1. 若以 t^3 和 $(a+b)$ 分别为自变量，那末按照这个对应关系便得出:

$$f:\ t^3 \to y = (t^3)^2 - 3t^3 + 1.$$

$$f:\ (a+b) \to y = (a+b)^2 - 3(a+b) + 1.$$

又如，$\varphi:\ (x+1) \to y = \dfrac{(x+1)^3}{2} + (x+1)$,

其对应关系 φ 为: 自变量的立方除以 2 再加自变量. 于是得出:

$$\varphi:\ x \to y = \frac{x^3}{2} + x.$$

$$\varphi:\ (x-1) \to y = \frac{(x-1)^3}{2} + (x-1).$$

例 1 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}\ (x>0)$，求 $f(x)$.

解 (1) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x}} + \sqrt{1 + \left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}}\right)^2}$,

故 $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$

(2) 因 $f(x) = f\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}}\right)$, 故 $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{1 + \left(\dfrac{1}{x}\right)^2}$