多元微积分

复旦大学数学系　主编

魏　国　华　编

上海科学技术出版社

责任编辑 沈鲲龄

多 元 微 积 分
复旦大学数学系 主编
魏 国 华 编
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）
新华书店上海发行所发行　　江苏扬中印刷厂印刷
开本 850×1156 1/32 印张 11.125 字数 294,000
1988 年 1 月第 1 版 1988 年 1 月第 1 次印刷
印数 1－8,500
ISBN 7-5323-0675-5/O·72

定价：3.25 元

序

多年以来,我系一直在尝试着对数学专业以及计算数学、力学专业的教材进行改革.这项工作从六十年代一开始就着手进行了,在上海科学技术出版社的大力支持下,1960年出版了一套试用教材,并在此基础上经过修订,从1962年到1965年陆续出版了《数学分析》、《常微分方程》、《概率论与数理统计》、《数学物理方程》、《实变函数与泛函分析概要》等教材,为我系教材改革提供了一些经验.当时就数学教材提出的一些问题,如理论联系实际和教学内容现代化等问题,在今天也仍然是有意义的.

1980年,教育部颁发了部属综合性大学理科数学专业、计算数学专业的教学计划和各门课程的教学大纲.同时指出,执行教学计划和教学大纲应该体现"统一性与灵活性相结合的原则".按照我们的体会,所谓统一性是指:教学计划和教学大纲是从总体上反映了教和学两个方面所应该达到的基本要求;而灵活性则是指在具体实施时应该从实际情况出发,在不降低基本要求的前提下,有所创新和改革.我们打算按照这一指导思想陆续编写一套教材.

要在教学计划和教学大纲的指导下编写出一套比较成熟的教材,实在不是一件轻而易举的事,它应该是一个长期努力的过程.这次编写只是作为这个过程的又一个新的开端.

数学学科与某些别的学科不同,它的基础知识相对地来说是比较成熟和稳定的.其中大量经典的内容,即使是按照现代科学技术的发展水平来看,也是必不可少的.这是一个基本的事实,是我们编写时选材的重要依据.但是我们还注意到,在各门基础课程的教材中应当防止片面追求自身的完备化,应当根据每门课程在整个教学计划中的作用和地位以及学时的安排,作整体的考虑,使各门教材内容的深度和广度互相衔接,协调一致,既能和教学计划中的安排相一致,又符合学生学习过程中由浅入深的认识规律.我

们希望做到各门课程的教材，都能在教学计划规定的学时数内完成教学.

对某些经典的内容，我们尝试按现代数学的观点加以处理，使思想更严谨、陈述更明确简炼，并起到承上启下的作用. 在进行这种尝试的时候，力求使这些处理方法能为大多数教师所接受，正确处理好具体和抽象、特殊和一般、实际和理论的辩证关系.

不断总结课堂教学的经验，是编好教材的前提之一，这次编写的教材都经过多次的课堂教学实践. 一般是先编成讲义，在教学过程中，检查交流，听取有关教师和学生的意见，不断改进，其目的是为了在保证教学要求的前提下，教师便于教，学生便于学. 我们将按照各门教材在教学实践中的成熟程度，陆续交付出版.

编写一套适应于四个现代化发展需要的数学教材，是一项长期而又艰巨的任务. 由于我们的水平有限，实践也还不够，教材中出现各种各样的缺点和错误在所难免，殷切期望专家和广大读者提出宝贵的意见，给予批评指正，使我们的教材编写工作，日趋成熟.

上海科学技术出版社的同志对于我们的教材建设多年来一直给予密切配合和大力支持，我们表示衷心的感谢.

复旦大学数学系

1982.4.

编 者 的 话

在根据多年教学实践并经过多次修改的讲义的基础上，我们编写了这套供高等学校中非数学专业选用的高等数学教材，共包括以下五个分册：

《一元微积分》(陈开明编)；《多元微积分》(魏国华编)；《常微分方程》(尚汉冀编)；《线性代数》(陈开明编)；《概率论与数理统计》(陈开明编).

根据我们的教学实践，以上各分册依次分别可供60学时、85学时、35学时、40学时、30学时左右教学之用.

随着科学技术的迅速发展及电子计算机的普及使用，在自然科学、工程技术乃至社会科学等各个领域中越来越广泛地应用近代数学和应用数学的成果. 与此相适应，高等学校的许多非数学类专业对本专业的学生应具备的数学素质提出了新的要求，要求高等学校的数学课程能在不增加或少增加教学时数的前提下，使学生能学到更丰富、更有用的数学知识；学到更强的运用数学工具的能力. 我们就是基于这一精神编写这套教材的.

考虑到教材内容现代化的总趋势，这套教材除了在叙述表达方面注意了恰当地运用近代数学的观点和语言外，还注意到了调整教材中各部分内容的比例，协调了各部分内容的深度和广度. 总的来说，与传统的高等数学教材相比，微积分部分内容作了合理压缩；而线性代数、常微分方程、概率论与数理统计等部分内容适当加强了. 这套教材中还增添了一些与数值方法相联系的内容，以适应推广使用电子计算机的需要.

在本教材的编写风格上，我们力求做到线索清楚、组织科学、叙述准确、详简适当、以便于读者能抓住高等数学的中心内容，提高分析问题和解决问题的能力；有助于读者提高阅读与自学数学的能力. 本教材配备的习题也力求有助于读者通过系统训练而获

得较好的分析与解题的能力.

这套教材适合于理工、师范(非数学专业)、管理、经济等各类专业用作教材或参考书. 由于这些专业对数学内容的选择有很大的差异,为了方便于教学的选用,我们将这套教材分为五个分册, 各分册之间既有联系又有相对独立性,每分册的编排也尽量采用"分块结构",尽量设置相对独立的章节. 有的独立性较强的或非基本内容的章节和练习题,加上了 * 号,以示醒目. 不同专业使用这套教材时,可根据各自情况选用全部或部分;另外, 也可供高等学校的一些进修班、培训班选用. 考虑到非数学类专业课程教学安排上的需要,本分册将级数和广义积分两部分内容安排在最后两章.

在教材的编写、修改及试教过程中,我们得到复旦大学中许多同事的帮助, 其中朱学炎、徐振远、陈惠江、王婉华、郑广平等老师给书稿提出了宝贵的修改意见;陆飞、黄云敏等老师协助做了一些编写工作,在此谨向上述同志表示衷心的感谢.

编者　1986年1月

目　　录

第一章　向量和空间解析几何

§1　向　　量

1. 向量的概念

有些物理量不但在数量上有大小之分，而且还有方向上的区别，例如位移、速度、力等等. 一般我们把这种既有大小又有方向的量称为向量. 如果两个向量的大小相等、方向相同，就称它们是相等的向量.

一段以点 O 和点 A 为端点的直线段，若指定其中一个端点 O 为起点，另一端点 A 为终点，则称此线段为有向线段，记为 OA. 有向线段 OA 在图形上可用在线段 OA 上加自点 O 指向点 A 的箭头表示. 因为有向线段 OA 非但有一定的长度，而且也规定了一个指向，因此可采用有向线段作为向量的几何表示. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的指向表示向量的方向(见图 1.1). 我们采用 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{O'A'}$、$\overrightarrow{PB}$ 或 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{a}'$、$\boldsymbol{b}$ 分别表示图 1.1 中相应的向量. 图 1.1 中直线段 OA 与 $O'A'$ 的长度相等，而且有向线段 OA 与 $O'A'$ 的指向一致，因此它们所表示的向量是相等的，即 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{O'A'}$. 下面我们通过有向线段来阐明向量运算和运算规则.

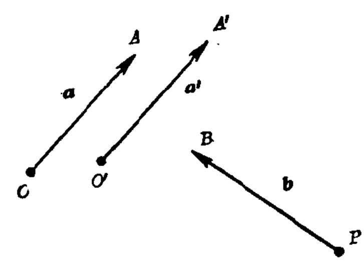


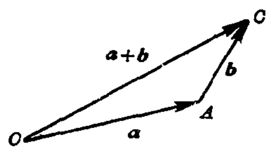
图　1.1

1° 向量的模　表示向量大小的数值(绝对值)称为该向量的模，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模用 $|\boldsymbol{a}|$ 表示. 图 1.1 中向量 $\overrightarrow{OA}$ 的模 $|\overrightarrow{OA}|$ 即为有向线段 OA 的长度

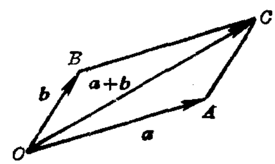
2° 零向量　若 $|\boldsymbol{a}|=0$，则称 $\boldsymbol{a}$ 为零向量. 一般用 $\mathbf{0}$ 表示零向量. 显然零向量的几何表示为一个几何点. 因此我们规定零向

量的方向可以是任意指向.

3° $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 给定向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$, 则向量 $\overrightarrow{OC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和,记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(见图 1.2($a$)).这种定义向量加法运算的规则称为三角形规则. 如果上述图形中 O、A、C 三点不共线,则我们也可采用下述平行四边形规则定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和. 作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,再以 OA 和 OB 为相邻的两边作平行四边形 $OACB$, 那么向量 $\overrightarrow{OC}$ 即为所求的 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(见图 1.2($b$)). 根据平行四边形的性质可知,这时



(a)



(b)

图 1.2

$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}.$$

因而由三角形规则可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}\\&=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

当图 1.2(a)中 O、A、C 三点共线时, 也可看作是图 1.2(b)中 O、A、C、B 四点在一条直线上的情况, 易知这时上述结论仍然成立. 因而向量的加法运算是适合交换律的, 即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}. \tag{1.1}$$

给定向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$, 要求向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 之和以及向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 之和. 从图 1.3 可以得到下述结果:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}&=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c},\\\overrightarrow{OC}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).\end{aligned}$$

所以向量的加法运算适合结合律, 即

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}). \tag{1.2}$$

今后上式等号两端的和式都记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, 称它为向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 之

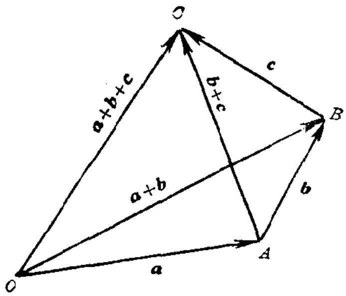


图 1.3

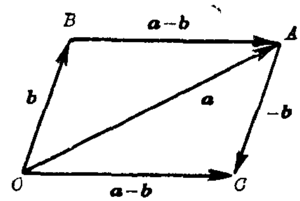


图 1.4

和.

根据向量加法运算规则和零向量定义,便知下列结论成立:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}. \tag{1.3}$$

4° $-\boldsymbol{a}$ 对于给定的向量 $\boldsymbol{a}$, 向量 $-\boldsymbol{a}$ 的定义如下:它的模 $|-\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|$,它的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反. 如果有向线段 OA 表示 $\boldsymbol{a}$,则有向线段 AO 就表示向量 $-\boldsymbol{a}$. 由加法运算规则易知下列结论成立:

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}. \tag{1.4}$$

我们还把向量 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差, 记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则向量 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(见图 1.4).

5° $\lambda\boldsymbol{a}$ λ 为一实数, $\lambda\boldsymbol{a}$ 表示一个向量, 它的定义如下(图 1.5):

$\lambda\boldsymbol{a}$	模 $\|\lambda\boldsymbol{a}\|$	方 向
$\lambda=0$	0	任 意
$\lambda>0$	$\|\lambda\|\cdot\|\boldsymbol{a}\|$	与 $\boldsymbol{a}$ 一致
$\lambda<0$	$\|\lambda\|\cdot\|\boldsymbol{a}\|$	与 $\boldsymbol{a}$ 相反

根据相似三角形的性质,由图 1.6 便得

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}. \tag{1.5}$$

设 λ、μ 为两任意实数,则根据上述定义易知下列结论成立:

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}, \tag{1.6}$$

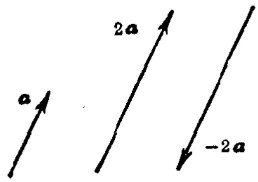


图 1.5

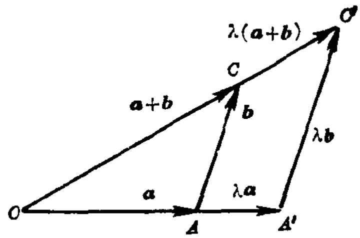


图 1.6

$$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a}), \tag{1.7}$$

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}. \tag{1.8}$$

6° 单位向量　若$|\boldsymbol{a}|=1$，则称$\boldsymbol{a}$为单位向量. 对于任一非零向量$\boldsymbol{a}$，易知向量$\boldsymbol{a}_0=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$是与$\boldsymbol{a}$方向一致的一个单位向量. 如果已知$\boldsymbol{a}_0$为与向量$\boldsymbol{a}$方向一致的一个单位向量，则向量$\boldsymbol{a}$可写成下列形式:

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}_0. \tag{1.9}$$

$|\boldsymbol{a}|$和$\boldsymbol{a}_0$分别刻划了向量$\boldsymbol{a}$的数量特征和方向特征.

7° 向量的分解　两个或两个以上的向量通过加法运算可以合成一个和向量. 例如，给定向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，可以合成一个和向量$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$. 反之，一个向量也可以按需要把它看作是由两个或两个以上向量合成的结果(当然根据不同需要可以有不同的分解方式).

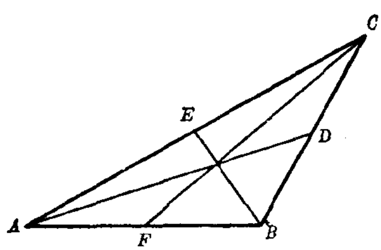


图 1.7

例 1　已知D、E、F分别为三角形的三条边BC、CA、AB上的中点(见图1.7). 求证: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$.

证明　从图1.7可得:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA},$$

$$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

将上述三式相加，便得

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\mathbf{0}.$$

例 2 已知 G 为三角形 ABC 之重心，O 为空间任一点. 求证：
$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

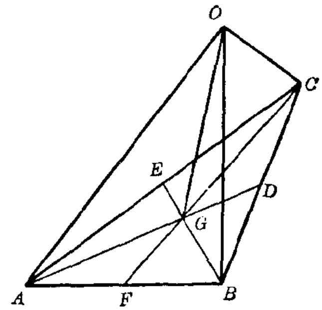


图 1.8

证明 从图 1.8 可得

$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG},$$
$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG},$$
$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CG}.$$

三式相加，便得

$$3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}.$$

根据三角形重心的性质可知：

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BE},\ \overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CF}.$$

再由例 1 可得：

$$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF})=\mathbf{0}.$$

因此最后得到

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

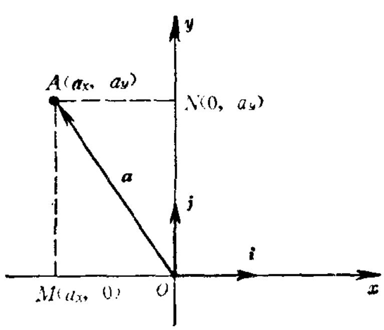


图 1.9

2. 向量的坐标表示

首先讨论平面的情况. 设 xOy 为一平面直角坐标系. 在此坐标系中，有一个指向为 x 轴正向的单位向量 $\boldsymbol{i}$ 和一个指向为 y 轴正向的单位向量 $\boldsymbol{j}$（见图 1.9）. 设 $\boldsymbol{a}$ 为 xOy 平面上的任一向量. 以坐标原点 O 为起点作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，记点 A 的坐标为 (a_x, a_y). 于是点 A 在 x 轴

和 y 轴上的投影点分别为 $M(a_x, 0)$ 和 $N(0, a_y)$. 按照向量加法运算和 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的定义，得

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}. \tag{1.10}$$

这样，数组 (a_x, a_y) 通过坐标平面上的点 A 与坐标平面上的向量 $\boldsymbol{a}$ 建立了一一对应的关系. 我们也把 (a_x, a_y) 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模即为线段 OA 的长度，所以

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}. \tag{1.11}$$

上述平面直角坐标系 xOy 也可以看成是由原点 O 和平面上两个相互垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 组成，所以也可记为 $\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$.

进一步讨论空间情形. 设 O 为空间一点，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 为空间相互垂直的单位向量，且它们排列符合*右手法则*，即当将右手的食指、中指和姆指竖成相互垂直的位置时，食指、中指、姆指的指向能分别与向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的指向一致. 通过点 O 分别沿 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 指向作三条有向直线 Ox、Oy、Oz，构成了一个*空间直角坐标系*，记为 $\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$，如图 1.10 所示. Ox、Oy、Oz 就是坐标系的三根*坐标轴*，分别称为*x 轴*、*y 轴*、*z 轴*. 由 x 轴和 y 轴所决定的平面称为 *xOy 坐标面*，同样还有 *yOz 坐标面*和 *zOx 坐标面*. 点 O 称为*坐标原点*，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 均称为*坐标向量*.

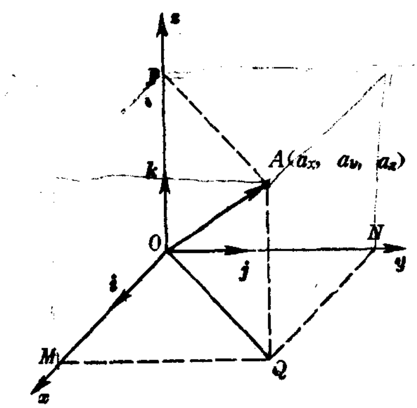


图 1.10

设 $\boldsymbol{a}$ 为空间任一向量，以坐标原点 O 为起点作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，再按坐标轴方向把 $\overrightarrow{OA}$ 分解成

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}, \tag{1.12}$$

其中 $\overrightarrow{OM}$、$\overrightarrow{ON}$、$\overrightarrow{OP}$ 为分别与坐标向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 平行（即方向一致或相反）的向量（图1.10）. 根据 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的定义，向量 $\overrightarrow{OM}$、$\overrightarrow{ON}$、$\overrightarrow{OP}$ 可分别写成下列形式:

$$\overrightarrow{OM}=a_x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{ON}=a_y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OP}=a_z\boldsymbol{k},$$

其中 a_x、a_y、a_z 都是实数. 于是向量 $\boldsymbol{a}$ 可分解成

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}. \tag{1.13}$$

这样，数组 (a_x, a_y, a_z) 就与空间向量 $\boldsymbol{a}$ 之间建立了一一对应关系，我们称数组 (a_x, a_y, a_z) 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在空间直角坐标系 $\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 中的坐标，称式(1.13)为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

下面讨论利用 $\boldsymbol{a}$ 的坐标 a_x, a_y, a_z 表示 $|\boldsymbol{a}|$. 从图 1.10 可知 $\overrightarrow{OQ}$ 为 xOy 坐标面上的向量，且

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}.$$

由式(1.11)可知

$$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}.$$

又 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OP}$, $OQAP$ 是一个矩形，线段 QA 的长度等于 $|a_z|$. 因此向量 $\boldsymbol{a}$ 的模 $|\boldsymbol{a}|$ 可表示为

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{1.14}$$

现讨论空间中任一点的坐标. 容易明白，空间任一点 A 的位置由起点在坐标原点 O 的向量 $\overrightarrow{OA}$ 完全确定. 若 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ 的坐标表示式为(1.13)，我们也称数组 (a_x, a_y, a_z) 是点 A 的坐标.

如果空间点 A 落在 xOy 坐标面上，则按照坐标轴方向将向量 $\overrightarrow{OA}$ 分解时，式(1.12)中 $\overrightarrow{OP}$ 必为零向量. 所以式(1.13)中实数 $a_z=0$. 因此在 xOy 坐标面上任一点 A 的坐标形式必为 $(a_x, a_y, 0)$. 易知，坐标形式为 $(a_x, a_y, 0)$ 的点 A 也必在 xOy 坐标面上. 同样，空间点 A 在 yOz 坐标面上当且仅当它的坐标形式为 $(0, a_y, a_z)$；点 A 在 zOx 坐标面上当且仅当它的坐标形式为 $(a_x, 0, a_z)$.

因为 x 轴既在坐标面 xOy 上，又在坐标面 zOx 上，因而点 A 在 x 轴上当且仅当点 A 的坐标形式为 $(a_x, 0, 0)$. 同样，点 A 在 y 轴上当且仅当点 A 的坐标形式为 $(0, a_y, 0)$；点 A 在 z 轴上当且仅当点 A 的坐标形式为 $(0, 0, a_z)$.

例 3 指出下列各点中，哪些是坐标面上的点，哪些又是坐标轴上的点：

$$A(-2, 0, 1), \quad B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$C(-1,\ 0,\ 0),\quad D(0,\ \pi,\ 0),$$
$$E(0,\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3}),\quad F(-1,\ 1+\sqrt{5},\ 1-\sqrt{5}).$$

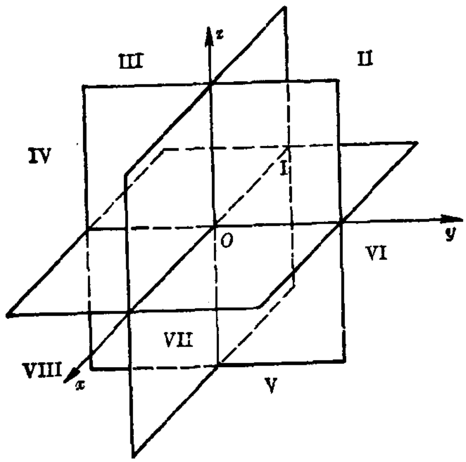


图 1.11

解 A、C 在 zOx 上；D、E 在 yOz 上；C、D 在 xOy 上．C 在 x 轴上；D 在 y 轴上．

空间中不在坐标面上的点被三个坐标面分成八个部分，每一部分称为一个卦限，分别称为第I、II、III、IV、V、VI、VII、VIII卦限（参看图1.11）．显然，空间一点 $M(x, y, z)$ 在第I卦限内当且仅当 $x>0,\ y>0,\ z>0$；其余可以类推．

下面讨论向量运算 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的坐标表示．设向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的坐标分别为 $(a_x,\ a_y,\ a_z)$ 和 $(b_x,\ b_y,\ b_z)$．易知有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})+(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k},\end{aligned}\tag{1.15}$$

因此向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的坐标为 $(a_x+b_x,\ a_y+b_y,\ a_z+b_z)$．又

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\\&=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k},\end{aligned}\tag{1.16}$$

因此向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的坐标为 $(\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z)$．

例4 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的坐标分别为 $(4,\ -1,\ 3)$ 和 $(5,\ 2,\ 3)$，试求向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 和 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 的坐标表示式．

解 由式(1.15)和(1.16)，便得

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})=-\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j},$$

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}&=2(4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})+3(5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\\&=23\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

例5 已知点 $P_1,\ P_2,\ P_3$ 的坐标分别为 $(a_1,\ b_1,\ c_1)$、$(a$, l