# 点集拓扑学基础

吴东兴 著

科学出版社

# 点集拓扑学基础

吴东兴著

J2/1-170/09

师范大学 藏书 图书馆
753398

科学出版社

1981

## 内 容 简 介

本书为点集拓扑学方面的一本入门书，通俗易懂。本书可供高等院校数学系师生参考。


点集拓扑学基础

吴东兴著

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

石家庄地区印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1981 年 3 月第 一 版　　开本：787×1092　1/32

1981 年 3 月第一次印刷　　印张：5 1/4

印数：0001—8,500　　字数：117,000

统一书号：13031·1497

本社书号：2059·13—1

定价：0.85 元

# 序　言

并不十分准确！

恩格斯说“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系”(«反杜林论»,第35页).因此,数学研究人类社会实践中出现的数与形. 但是，同一百多年前恩格斯说这些话的时候相比，数与形的概念已经有了很大的变化. 由于生产力的不断发展与人类认识能力的不断提高，数与形所包含的内容也不断地扩大. 现代数学所研究的数与形是任一抽象集合的空间形式和数量关系.作为现代数学主要分支的拓扑学,主要是研究抽象集合的空间形式. 因此，拓扑学是高度抽象地研究现实世界空间形式的学科. 它的重要性是很明显的.

作为拓扑学的基础——点集拓扑学更是近代数学的基础. 它对于近代数学的作用,如同欧氏几何学对于初等数学,解析几何学对于微积分. 因此，学习与研究点集拓扑学对于学习与研究近代数学是必不可少的.

本书建立新的体系，试图使逻辑严格性与直观明显性结合起来. 尤其注意从马克思主义认识论的角度进行阐述. 但限于作者水平,不妥与错误之处恐怕不少,请读者批评指正!

本书承作者的老师方嘉琳同志仔细审阅全稿，提出不少宝贵意见,在此,谨致以深切的谢意!

吴东兴

1978年9月

# 目　　录





试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

# 第一章　集合引论

## §1　集合的概念

**1.1.1**　集合这个概念，是数学的基本概念之一，它是人们在长期社会实践中产生的．

人们在长期实践中，逐步认识到，往往必须把具有相同性质的对象的全体作为一个单一的对象来处理．例如，在农业生产中，往往把播种同一类种子的禾田作为一个单一的对象来考虑安排耕作措施；在工业生产中，往往把相同规格和同样精度的零件按同样的方式加工；学校教学，则往往把相同程度的学生编为一个班，安排一个课表．同样，在数学中，也往往需要把具有某种特殊性质的对象的全体当作一个单一的对象来加以考虑和处理．于是，就得到集合的概念．例如，方程 $x^2-5x+6=0$ 的根的全体构成一个集合；又如，自然数的全体也构成一个集合．

我们用大写字母 $A$，$B$，… 等表示集合，而用小写字母 $a,b,\cdots;x,y,\cdots$ 等表示构成集合的对象．构成一个集合的对象称为这个集合的元素．用记号

$$a\in A$$

表示对象 $a$ 是集合 $A$ 的一个元素，读作"$a$ 属于 $A$"（注意 $\in$ 是希腊文"属于"一字 $\epsilon\sigma\tau\iota$ 的第一个字母）．例如，以 $A$ 表示方程 $x^2-5x+6=0$ 的根所成的集合，则

$2\in A$，因为 2 是 $x^2-5x+6=0$ 的根；

$3\in A$，因为 3 是 $x^2-5x+6=0$ 的根．

因为 4 不是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根，所以 4 不是集合 $A$ 的元素，记为

$$4 \notin A,$$

读作"4 不属于 $A$"。同样，以$N$表示自然数的全体所成的集合，则

$$1 \in N, 2 \in N, 3 \in N, 4 \in N, \cdots.$$

但是，$\frac{1}{2} \notin N$，因为$\frac{1}{2}$不是自然数；$\sqrt{2} \notin N$，因为 $\sqrt{2}$ 不是自然数。为了表示集合$M$是由具有性质 $p$ 的对象构成的，并且是只由具有性质 $p$ 的对象构成的，记为

$$M=\{x \mid x \text{ 有性质 } p\}$$

或

$$M=\{x : x \text{ 有性质 } p\}.$$

例如

$$A=\{x \mid x \text{ 满足 } x^2-5x+6=0\}$$

表示 $A$ 是由方程 $x^2-5x+6=0$ 的根的全体所成的集。又如

$$N=\{x \mid x \text{ 是自然数}\}$$

表示$N$是自然数全体所成的集。

一个集合的元素可以有无限多个，例如自然数集$N$；也可以有有限多个，例如集合

$$A=\{x \mid x \text{ 满足 } x^2-5x+6=0\},$$

它只有两个元素(数 2 和数 3)，也可以只有一个元素，例如集合

$$C=\{x \mid x \text{ 满足 } 2x-6=0\},$$

它只有一个元素(数 3)，称为单元素集；一个集合也可以不含有任何元素，例如集合

$$\{x \mid x \text{是满足方程 } x^2+1=0 \text{ 的实数}\},$$

这样的集合称为空集合，用记号 $\phi$ 表示．

如果一个集合的元素可以全部写出来，我们也可以将这个集合的元素全部写在花括弧内以表示这个集合．例如集合

$$A=\{x \mid x \text{ 满足 } x^2-5x+6=0\}$$

也可记为

$$A=\{2,3\}.$$

同样，单元素集

$$C=\{x \mid x \text{ 满足} 2x-6=0\}$$

可记为

$$C=\{3\}.$$

但要注意，$\{0\}$表示由数 0 组成的单元素集，它与空集合 $\phi$ 是根本不同的．

**1.1.2** 一个集合$M$的部分元素所构成的集合$N$ 称为$M$的子集，记为

$$N\subset M(\text{或 } M\supset N).$$

读作$N$包含于$M$(或$M$包含$N$)．例如，上例中的集合 $A$，$N$ 和 $C$ 之间有关系

$$A\subset N, C\subset A.$$

又如，设 $R$ 为有理数全体所成的集，则 $N\subset R$．

一般说来，要肯定 $N\subset M$，就必须证明$N$的每一个元素都是 $M$ 的元素，也就是要证明“如果 $x\in N$，则 $x\in M$”．因此，对于任何一个集合$M$，必有 $M\subset M$．即任一集合是它自己的子集．此外，$N\subset M$ 也等于说“如果 $x\notin M$，则 $x\notin N$”．因此，$\phi\subset M$，即空集合是任何一个集合的子集．如果两个集合$M$和 $N$ 由相同的元素组成，这两个集合相等，记为 $M=N$．要证明 $M=N$，就是要证明 $M\subset N$ 而且 $N\subset M$．如果两个集合$M$和$N$的元素不完全相同，这两个集合不相等，记为 $M\neq N$．例如

$$\{2,3\}\neq\{3\},$$

$$\{2\}\neq\{3\}.$$

如果 $N\subset M$，且 $N\neq M$，$N\neq\phi$，则 $N$ 称为$M$的真子集.

## §2 集合的运算

**1.2.1** 两个集合 $A$ 和 $B$ 的并集合，记为 $A\cup B$. 这个集合包含 $A$ 与 $B$ 中所有的元素，但不含有其他的元素. 即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

例如 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

显然，$A\cup B=B\cup A$，$A\cup A=A$，$A\cup\phi=A$.
为了证明 $A\cup B=B\cup A$，我们只须证明

$$A\cup B\subset B\cup A \text{ 及 } B\cup A\subset A\cup B.$$

也就是证明命题"如果 $x\in A\cup B$，则 $x\in B\cup A$"以及命题"如果 $x\in B\cup A$，则 $x\in A\cup B$"同时成立.

**1.2.2** 两个集合 $A$ 和 $B$ 的交集合，记为 $A\cap B$，这个集合由 $A$ 和 $B$ 的共同元素组成，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 同时 } x\in B\}.$$

例如 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则

$$A\cap B=\{3,4\}.$$

两个集合的交不是空集合，这两个集合就称为相交的. 如果两个集合的交是空集合，即这两个集合没有共同元素，则称为不相交的. 例如集合$\{1,2,3,4\}$与$\{5,6,7\}$不相交.

显然有 $A\cap A=A$，$A\cap\phi=\phi$.

**1.2.3** 同算术运算类似，可以定义差集. 对于任意两个集合 $A$ 与 $B$，差集 $A-B$ 由 $A$ 的那些不属于 $B$ 的一切元素组成，即

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ 但 } x\notin B\}.$$

例如 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则

$$A-B=\{1,2\}.$$

又如 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5,6\}$，则

$$A-B=\{1,2,3\}.$$

可见 $A-B$ 是从 $A$ 中除去 $B$ 的元素后所余下来的元素所组成的集，因此 $A-B$ 又称为 $B$ 对于 $A$ 的余集，记为 $C_A B$，在省略 $A$ 而不致于引起混乱时简记为 $B^c$。

**1.2.4** 集的运算和普通算术运算虽有不同之处，例如 $A\cup A=A$ 与 $A\cap A=A$ 在算术中是不成立的．但相似之处更引人注目．例如空集合的作用很像算术的 0．尤其是，我们可以证明下述常用的运算律成立．

**定理** 对于任意集合 $A$,$B$ 及 $C$，下述运算律成立：

(1) 可换律 $A\cup B=B\cup A$,

$A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(3) 分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(4) De Morgan 律 $C-(A\cup B)=(C-A)\cap(C-B)$,

$C-(A\cap B)=(C-A)\cup(C-B)$.

证明 例如，我们来证明分配律的第二个集合恒等式

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

令

$$S=A\cap(B\cup C),\quad T=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

设 $x\in S$，则 $x\in A$ 并且 $x\in B\cup C$；如果 $x\in B$，则 $x\in A\cap B$；如果 $x\in C$，则 $x\in A\cap C$，总之 $x\in T$．这就证明了

$$S\subset T.$$



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

反之，设 $x\in T$，则 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$. 如果 $x\in A\cap B$，则 $x\in A$ 且 $x\in B$. 由 $x\in B$ 可知 $x\in B\cup C$. 又因 $x\in A$，所以 $x\in S$. 于是

$$T\subset S.$$

对于 $x\in A\cap C$，有相同的结果。由 $S\subset T$ 及 $T\subset S$，就得 $S=T$.

又如，我们来证 De Morgan 律的第一式

$$C-(A\cup B)=(C-A)\cap(C-B).$$

设 $x\in C-(A\cup B)$，则 $x\in C$，同时 $x\notin A$ 且 $x\notin B$. 故 $x\in C-A$ 且 $x\in C-B$，可见 $x\in(C-A)\cap(C-B)$. 反之，设 $x\in(C-A)\cap(C-B)$，则 $x\in C-A$ 且 $x\in C-B$，即 $x\in C$，同时 $x\notin A$ 且 $x\notin B$. 所以，$x\in C$ 同时 $x\notin A\cup B$，即 $x\in C-(A\cup B)$. 这就证明了左右两边的集合相等.

用同样的方法可证明定理的其余等式. ]

**1.2.5** 为了定义任意多个集的并与交，先说明下标集的概念. 设 $\Lambda$ 是任一个集合，如果对于 $\Lambda$ 的每一个元素 $\lambda$，均有一个集合与之对应，与 $\lambda$ 对应的集合记为 $A_\lambda$，则当 $\lambda$ 跑遍集合 $\Lambda$ 时，便同时得到一族集合，记为 $\mathscr{A}$，

$$\mathscr{A}=\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}.$$

集合 $\Lambda$ 称为集族 $\mathscr{A}$ 的下标集.

如果 $\Gamma\subset\Lambda$，则集族

$$\mathscr{B}=\{A_\lambda:\lambda\in\Gamma\subset\Lambda\}$$

称为集族 $\mathscr{A}$ 的子族.

现在将集族 $\mathscr{A}$ 的并集 $\bigcup\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 与交集 $\bigcap\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 定义如下：

$$\bigcup\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}=\{a:\text{存在 }\lambda\in\Lambda\text{ 使 }a\in A_\lambda\},$$

$$\bigcap\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}=\{a:\text{对每个 }\lambda\in\Lambda, a\in A_\lambda\}.$$

注意并集与交集的另一种常用写法

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\bigcup\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\},$$

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\bigcap\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}.$$

特别地，当 $\Lambda=\{1,2,3,\cdots,n\}$时，

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\bigcup_{i=1}^{n} A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n,$$

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\bigcap_{i=1}^{n} A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n.$$

当 $\Lambda=\{1,2,3\cdots,n,\cdots\}$时，

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots,$$

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i=A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots.$$

例如，设 $\Lambda=\{1,2,3,\cdots\}$,

$$A_k=\{x:k-1<x\leqslant k\}=(k-1,k],$$

则并集

$$S=\bigcup_{k\in\Lambda} A_k=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}(k-1,k]$$

是所有正实数的集合．如设

$$B_k=\left\{x:-\frac{1}{k}<x<\frac{1}{k}\right\}=\left(-\frac{1}{k},\ \frac{1}{k}\right),$$

则

$$P=\bigcap_{k\in\Lambda} B_k=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{k},\ \frac{1}{k}\right)=\{0\}$$

是一个单元素集，只有一个元素 0。

设 $\Lambda$ 是一个下标集．如果 $\Gamma\subset\Lambda$,则易证

(1) $\bigcup\{A_\gamma:\gamma\in\Gamma\}\subset\bigcup\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$,

(2) $\bigcap\{A_\gamma:\gamma\in\Gamma\}\supset\bigcap\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$.

**1.2.6** 不难将 De Morgan 律推广到任意多个集合的情形.

设 $\mathscr{A}=\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$, $X$ 是任一个集合,则

(1) $X-\bigcup\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}=\bigcap\{X-A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$.

(2) $X-\bigcap\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}=\bigcup\{X-A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$.

运用 1.1.2 所述关于证明两集合相等的基本方法，容易证明(1)式与(2)式成立.

(1) 式与(2)式揭示了并集、交集与余集三者之间的深刻的联系. (1) 式左边是并的余，右边是余的交；(2) 式左边是交的余，右边是余的并. 运用(1)式与 (2) 式时只要记住"并余交"三个字,依顺序读即得并的余等于余的交，依相反顺序读即得交的余等于余的并. 所以，称 De Morgan 律为并余交公式更方便.

**1.2.7** 设 $A$, $B$ 是两个集合. 称 $A\times B$ 为 $A$ 与 $B$ 的积集合,定义为

$$A\times B=\{(a,b):a\in A,b\in B\}.$$

注意 $A\times B$ 未必等于 $B\times A$. 例如设

$$A=\{1,2,3\},\quad B=\{4,5\}$$

则

$$A\times B=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\},$$

而

$$B\times A=\{(4,1),(4,2),(4,3),(5,1)(5,2),(5,3)\}.$$

显然 $A\times B\neq B\times A$. 如果用平面内的点来表示，$A\times B$ 的六个点与 $B\times A$ 的六个点完全不同.

积集合的概念进一步推广如下.

例如设 $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4\}$, $C=\{5,6\}$, 则

$$A\times B\times C=\{(a,b,c):a\in A, b\in B, c\in C\}$$
$$=\{(1,3,5),(1,3,6),(1,4,5),(1,4,6),(2,3,5),(2,3,6),(2,4,5),(2,4,6)\}.$$

又以 $E^1$表示实数的集合，则

$$E^3=E^1\times E^1\times E^1=\{(x,y,z):x\in E^1, y\in E^1, z\in E^1\}$$

为平常欧氏三维空间的一切点的集合.

$n$ 个集合 $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n$ 的积集合定义为

$$\prod_{i=1}^{n} A_i=A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=$$

$$=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n):a_1\in A_1,\cdots,a_n\in A_n\}.$$

任意多个集合所成的集族

$$\mathscr{A}=\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$$

的积集合记为

$$\prod\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}\text{或}\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda,$$

它由一切形如

$$a=\{a_\lambda:\lambda\in\Lambda, a_\lambda\in A_\lambda\}$$

的元素组成.

## §3 关系与映射

**1.3.1** 本书所用的关系,都是二元关系.

**定义** 序对的集合称为关系.

设 $A$, $B$ 是两个集合. $A\times B$ 的任一个子集合 $\sigma$ 就是 $A$ 与 $B$ 之间的一种关系. 当且仅当$(x,y)\in\sigma$ 时,我们称 $x$ 与 $y$ 有关系 $\sigma$,记为

$$x\sigma y.$$

关系 $\sigma$ 的定义域记为 $D_\sigma$，定义为

$$D_\sigma=\{x: \text{存在 } y, \text{使}(x, y)\in\sigma\}.$$

关系 $\sigma$ 的值域记为 $E_\sigma$，定义为

$$E_\sigma=\{y: \text{存在 } x, \text{使}(x, y)\in\sigma\}.$$

关系 $\sigma$ 的逆关系记为 $\sigma^{-1}$，定义为

$$\sigma^{-1}=\{(x, y):(y, x)\in\sigma\}.$$

所以，$x\sigma y$ 当且仅当 $y\sigma^{-1}x$. $\sigma$ 的值域是 $\sigma^{-1}$ 的定义域，$\sigma$ 的定义域是 $\sigma^{-1}$ 的值域.

两关系 $\rho$ 与 $\sigma$ 的合成记为 $\rho\circ\sigma$，定义为

$$\rho\circ\sigma=\{(x, y): \text{存在 } z, \text{使 } (x, z)\in\sigma, (z, y)\in\rho\}.$$

集 $X$ 上的恒等关系记为 $\Delta$ 或 $\Delta(X)$，定义为

$$\Delta(X)=\{(x, x): x\in X\}.$$

**定理** 设 $\rho\subset X\times Y$，$\sigma\subset Y\times Z$，则 $(\sigma\circ\rho)^{-1}=\rho^{-1}\circ\sigma^{-1}$.

证明 $(z, x)\in(\sigma\circ\rho)^{-1}$ 等价于 $(x, z)\in\sigma\circ\rho$，根据合成的定义，等于说存在 $y\in Y$ 使 $(x, y)\in\rho$，$(y, z)\in\sigma$. 这又等于说 $(z, y)\in\sigma^{-1}$，$(y, x)\in\rho^{-1}$，所以等价于 $(z, x)\in\rho^{-1}\circ\sigma^{-1}$.]

**1.3.2** 当 $Y=X$ 时，$X$ 与 $Y$ 的关系 $\sigma$ 称为在 $X$ 上的关系.

在 $X$ 上的关系 $\sigma$ 称为自反的，当且仅当对于每个 $x\in X$，$x\sigma x$.

在 $X$ 上的关系 $\sigma$ 称为对称的，当且仅当 $x\sigma y$ 蕴涵 $y\sigma x$.

在 $X$ 上的关系 $\sigma$ 称为反对称的，当且仅当 $x\sigma y$ 及 $y\sigma x$ 蕴涵 $x=y$.

在 $X$ 上的关系 $\sigma$ 称为可递的(transitive)，当且仅当 $x\sigma y$ 及 $y\sigma z$ 蕴涵 $x\sigma z$.

**定理** 在集 $X$ 上的关系 $\sigma$ 是自反的当且仅当 $\Delta\subset\sigma$；是对称的当且仅当 $\sigma^{-1}=\sigma$；是可递的当且仅当 $\sigma\circ\sigma\subset\sigma$.

证明 前两句话是显然的. 只要证明第三句话. 设 $\sigma$ 是

可递的，如果$(x, y)\in\sigma\circ\sigma$，则存在$z\in X$，使$(x, z)\in\sigma$且$(z, y)\in\sigma$，于是，由可递性，$(x, y)\in\sigma$。反之，如果$\sigma\circ\sigma\subset\sigma$，且$(x, z)\in\sigma$，$(z, y)\in\sigma$，则$(x, y)\in\sigma$，故$\sigma$是可递的。]

**1.3.3** 设$\sigma$是在集$X$上的关系，如果$\sigma$同时是自反的，对称的，可递的，则$\sigma$称为在$X$上的等价关系。

设$\sigma$是在集$X$上的等价关系，则对于每个$x\in X$，存在不空集合$[x]$，

$$[x]=\{y: x\sigma y\}$$

称为$x$的等价类。

**定理** 如果$\sigma$是在集$X$上的等价关系，则对于任意$x, y\in X$，或者$[x]\cap[y]=\phi$，或者$[x]=[y]$。

证明 假设$[x]\cap[y]\neq\phi$，于是存在$z\in[x]\cap[y]$，由于$z\in[x]$，$z\in[y]$，故$x\sigma z$，$y\sigma z$。由对称性，$z\sigma y$。又由可递性，$x\sigma y$。故$y\in[x]$。再由可递性，$[y]\subset[x]$。同理，$[x]\subset[y]$，所以$[x]=[y]$。]

集$X$关于等价关系$\sigma$的等价类的全体记为$X/\sigma$，称为$X$模$\sigma$的商。

**1.3.4 定义** 如果序对的集合$f$满足条件：$(x, y)\in f$与$(x, z)\in f$蕴涵$y=z$，则关系$f$称为映射(单值映射)。

设$f$是映射，$(x, y)\in f$，记$y$为$f(x)$，$f(x)$称为$x$的象或$f$在$x$的值。如果$f$的定义域为$X$，$f$的值域包含于$Y$，则称$f$为从$X$到$Y$的映射，记为

$$f: X\to Y.$$

如果$E\subset X$，则集

$$f(E)=\{y: 存在\ x\in E\ 使\ y=f(x)\}$$

称为$E$在$f$下的象。如果$f(X)=Y$，则$f$称为满值的映射。

如果$A\subset Y$，则集合



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com