

# 应用板壳理论

成祥生 著

山东科学技术出版社

《应用板壳理论》的出版，定将引起相关专业的广大学生、研究生和科技工作者的兴趣。若能为填补板壳理论及应用领域中的一些空白，起到些作用，实为我的心愿！

书中的内容如有不当之处，请广大读者批评指正。

成祥生

1989年于同济大学

## 内 容 简 介

本书是一部系统阐述板壳理论及其应用的专著。除介绍经典理论外，还阐述了许多新理论，如改进的能量法（变分法）、板的侧向屈曲、塑性屈曲、劈锥面扁壳的计算、运动载荷引起板壳结构的动力反应、板壳结构的优化设计、板壳结构在冲击载荷下的动力计算等。书中列举了大量例题，章末附有习题及答案。可供力学专业的学生、研究生以及有关专业的科技工作者在学习、研究和设计工作中参考。

### 应用板壳理论

成祥生 著

\*

山东科学技术出版社出版  
(济南市玉函路)

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂潍坊厂印刷

\*

850 × 1168 毫米 32 开本 22.25 印张 489 千字  
1989 年 8 月第 1 版 1989 年 8 月第 1 次印刷  
印数：1—2,500

ISBN7—5331—0502—8/TB·7

定价 9.20 元

“泰山科技专著出版基金”顾问、评审  
委员会、编辑委员会

顾 问 宋木文 伍 杰 苗枫林

评审委员会 (以姓氏笔画为序)

卢良恕 吴阶平 杨 乐 何祚庥 罗沛霖 高景德  
唐敖庆 蔡景峰 戴念慈

编辑委员会

主任委员 杜秀明 石洪印

副主任委员 梁 衡 邓慧方 王为珍

委 员 (以姓氏笔画为序)

邓慧方 王为珍 卢良恕 石洪印 刘韶明 吴阶平  
杨 乐 何祚庥 杜秀明 罗沛霖 林凤瑞 唐敖庆  
高景德 梁 衡 梁柏龄 蔡景峰 戴念慈

## 我们的希望(代序)

进行现代化建设必须依靠科学技术。作为科学技术载体的专著，正肩负着这一伟大的历史使命。科技专著面向社会，广泛传播科学技术知识，培养专业人才，推动科学技术进步，对促进我国现代化建设具有重大意义。它所产生的巨大社会效益和潜在的经济效益是难以估量的。

基于这种使命感，自1988年起，山东科学技术出版社设“泰山科技专著出版基金”，成立科技专著评审委员会，在国内广泛征求科技专著，每年补贴出版一批经评选的科技著作。这一创举已在社会上引起了很大反响。

但是，设基金补助科技专著出版毕竟是一件新生事物，也是出版事业的一项改革。它不仅需要在实践中不断总结经验，逐步予以完善；同时，也更需要社会上有关方面的大力扶植，以及学术界和广大读者的热情支持。

我们希望，通过这一工作，高水平的科技专著能够及早问世，充分显示它们的价值，发挥科学技术作为生产力的作用，不断推动社会主义现代化建设的发展，愿“基金”支持出版的著作如泰山一样，耸立于当代学术之林。

泰山科技专著评审委员会

1989年3月

# 前 言

近些年来，学术界常常为学术著作出版难而感叹不已。我是从事工程力学研究的，眼见着自己多年的心血不能成书，心里真不好受呀！山东科学技术出版社设立“泰山科技专著出版基金”的消息传来，就象春风，吹暖了我的心。在《应用板壳理论》出版之际，谨向贵社表达我的敬佩和感谢之情！

薄板与薄壳是工程上常见的薄壁结构，广泛地应用在建筑、航空、造船、机械、化工等领域。在《应用板壳理论》这部专著中，除系统阐述经典理论外，还收入了多年来我在板壳基础理论及其应用方面的许多科研成果，如改进的能量法、薄板的侧向屈曲、劈锥面扁壳的计算、由运动载荷引起的板壳结构的动力反应、板壳结构的优化设计、板壳结构在冲击载荷下的动力计算等。撰写这些章节的目的，一是为了充实和提高现有的板壳理论；二是为了更新现有的板壳理论教材；三是为了使板壳理论及其应用技术尽快地转化为生产力，从而为社会带来巨大的经济效益。本书的出版，若能达到上述几方面目的，起到抛砖引玉的作用，我将感到欣慰。

收入本书的新内容，大部分已发表在国内外期刊上，有些还尚未发表，我将它们集中在一起，增补一些说理和推演过程。在撰写过程中，尽可能减少烦琐的数学推导，特意加强对概念性的阐述，着重理论联系实际，致力于应用，并且列举了大量例题，每章末还附有习题及答案。

# 目 录

|                           |    |
|---------------------------|----|
| 绪论.....                   | 1  |
| 第一章 弹性薄板的小挠度弯曲问题.....     | 9  |
| 第一节 概述 .....              | 9  |
| 第二节 薄板弹性曲面的微分方程.....      | 12 |
| 第三节 求次要应力.....            | 19 |
| 第四节 薄板的边界条件.....          | 22 |
| 第五节 周边简支矩形板的纳维解法.....     | 32 |
| 第六节 矩形薄板的李维解法.....        | 35 |
| 第七节 简支板在边界受分布弯矩的弯曲问题..... | 40 |
| 第八节 用结构力学的方法解矩形板弯曲问题..... | 43 |
| 第九节 圆形薄板的弯曲.....          | 47 |
| 第十节 圆形薄板的轴对称弯曲.....       | 51 |
| 第十一节 弹性地基板.....           | 60 |
| 第二章 薄板弯曲问题的近似解法 .....     | 67 |
| 第一节 薄板弯曲中的能与功.....        | 67 |
| 第二节 李兹法.....              | 70 |
| 第三节 李兹法应用举例.....          | 72 |
| 第四节 改进的李兹法.....           | 75 |
| 第五节 伽辽金法.....             | 83 |
| 第六节 伽辽金法应用举例.....         | 85 |
| 第三章 薄板弯曲问题的有限单元法 .....    | 95 |
| 第一节 概述.....               | 95 |
| 第二节 矩形薄板单元的位移函数.....      | 97 |

|            |                               |            |
|------------|-------------------------------|------------|
| 第三节        | 矩形薄板单元的形变矩阵和内力矩阵 .....        | 100        |
| 第四节        | 矩形薄板单元的刚度矩阵 .....             | 106        |
| 第五节        | 矩形薄板单元的载荷列阵 .....             | 112        |
| 第六节        | 薄板的整体刚度矩阵 .....               | 114        |
| 第七节        | 边界条件及计算举例 .....               | 118        |
| 第八节        | 矩形薄板单元的收敛性 .....              | 123        |
| <b>第四章</b> | <b>薄板的稳定</b> .....            | <b>125</b> |
| 第一节        | 小挠度薄板受横向力及中面力共同作用下的弯曲 .....   | 125        |
| 第二节        | 在均布横向力和均布中面力共同作用下的简支矩形板 ..... | 131        |
| 第三节        | 薄板的屈曲及临界力 .....               | 132        |
| 第四节        | 单向受压简支板的屈曲 .....              | 134        |
| 第五节        | 双向受压简支板的屈曲 .....              | 139        |
| 第六节        | 用能量法求临界力 .....                | 142        |
| 第七节        | 用能量法求临界力的算例 .....             | 147        |
| 第八节        | 用改进的李兹法求临界力 .....             | 157        |
| 第九节        | 有角点支承矩形板的纵横弯曲 .....           | 164        |
| 第十节        | 弹性地基上自由边矩形板的稳定性 .....         | 174        |
| 第十一节       | 矩形板的侧向屈曲 .....                | 180        |
| 第十二节       | 加肋板的稳定性 .....                 | 189        |
| 第十三节       | 板的塑性屈曲 .....                  | 191        |
| <b>第五章</b> | <b>薄板的振动</b> .....            | <b>212</b> |
| 第一节        | 薄板的自由振动 .....                 | 212        |
| 第二节        | 矩形薄板的自由振动 .....               | 214        |
| 第三节        | 用能量法求薄板固有频率 .....             | 217        |
| 第四节        | 用能量法求薄板固有频率举例 .....           | 221        |
| 第五节        | 用改进的能量法求薄板固有频率 .....          | 225        |
| 第六节        | 中面力对薄板固有频率的影响 .....           | 235        |
| <b>第六章</b> | <b>各向异性板</b> .....            | <b>243</b> |



|            |                         |            |
|------------|-------------------------|------------|
| 第一节        | 各向异性弹性体的物理方程 .....      | 243        |
| 第二节        | 正交各向异性板小挠度弯曲问题 .....    | 245        |
| 第三节        | 构造上正交各向异性板的主刚度 .....    | 248        |
| 第四节        | 正交各向异性板的解析解法 .....      | 254        |
| 第五节        | 椭圆形及圆形正交各向异性板的弯曲 .....  | 257        |
| 第六节        | 正交各向异性板弯曲问题的近似解法 .....  | 260        |
| 第七节        | 正交各向异性板的稳定问题 .....      | 264        |
| 第八节        | 正交各向异性板的振动问题 .....      | 268        |
| <b>第七章</b> | <b>大挠度薄板的弯曲问题 .....</b> | <b>274</b> |
| 第一节        | 大挠度薄板的基本方程 .....        | 274        |
| 第二节        | 大挠度薄板的边界条件 .....        | 279        |
| 第三节        | 大挠度圆板轴对称弯曲 .....        | 281        |
| 第四节        | 大挠度薄板弯曲时的能量 .....       | 285        |
| 第五节        | 大挠度薄板的近似解法 .....        | 288        |
| 第六节        | 伽辽金法和李兹法的解例 .....       | 290        |
| <b>第八章</b> | <b>壳体的一般理论 .....</b>    | <b>299</b> |
| 第一节        | 直角坐标及曲线坐标 .....         | 299        |
| 第二节        | 弹性体变形的一般情形 .....        | 304        |
| 第三节        | 壳体工程实用理论的特点 .....       | 308        |
| 第四节        | 壳体的正交曲线坐标 .....         | 310        |
| 第五节        | 壳体的几何方程 .....           | 313        |
| 第六节        | 壳体的物理方程 .....           | 321        |
| 第七节        | 壳体的平衡微分方程 .....         | 326        |
| 第八节        | 壳体的边界条件 .....           | 333        |
| 第九节        | 薄壳的无矩理论 .....           | 338        |
| <b>第九章</b> | <b>柱壳 .....</b>         | <b>344</b> |
| 第一节        | 柱壳无矩理论的基本方程 .....       | 344        |
| 第二节        | 闭合圆柱壳的无矩计算 .....        | 346        |

|             |                       |            |
|-------------|-----------------------|------------|
| 第三节         | 开口柱壳的无矩计算 .....       | 354        |
| 第四节         | 圆柱壳弯曲问题的基本方程 .....    | 360        |
| 第五节         | 闭合圆柱壳的位移解法 .....      | 364        |
| 第六节         | 开口圆柱壳的位移解法 .....      | 368        |
| 第七节         | 圆柱壳八阶微分方程及其应用 .....   | 372        |
| 第八节         | 带有边梁的圆柱壳屋盖的计算 .....   | 382        |
| 第九节         | 圆柱壳轴对称弯曲问题 .....      | 393        |
| 第十节         | 圆柱壳轴对称弯曲的计算举例 .....   | 399        |
| 第十一节        | 短圆柱壳轴对称弯曲问题 .....     | 406        |
| <b>第十章</b>  | <b>旋转壳 .....</b>      | <b>420</b> |
| 第一节         | 旋转壳的几何特征 .....        | 420        |
| 第二节         | 旋转壳无矩理论的基本方程 .....    | 422        |
| 第三节         | 旋转壳轴对称问题的无矩计算 .....   | 424        |
| 第四节         | 旋转壳轴对称问题的无矩计算举例 ..... | 428        |
| 第五节         | 旋转壳非轴对称问题的无矩计算 .....  | 435        |
| 第六节         | 旋转壳轴对称有矩理论的基本方程 ..... | 447        |
| 第七节         | 球壳的轴对称弯曲及近似解 .....    | 452        |
| 第八节         | 带有加强环的球形壳屋盖的计算 .....  | 463        |
| <b>第十一章</b> | <b>扁壳 .....</b>       | <b>470</b> |
| 第一节         | 扁壳工程的实用理论 .....       | 470        |
| 第二节         | 扁壳的基本方程 .....         | 473        |
| 第三节         | 用混合法解扁壳的弯曲问题 .....    | 475        |
| 第四节         | 扁壳基本方程的几种特殊情形 .....   | 477        |
| 第五节         | 扁壳的边界条件 .....         | 479        |
| 第六节         | 扁壳的无矩计算 .....         | 482        |
| 第七节         | 扁壳弯曲问题混合法解例 .....     | 488        |
| 第八节         | 扁壳的八阶微分方程及其应用 .....   | 491        |
| 第九节         | 球形扁壳的计算 .....         | 498        |

|             |                           |            |
|-------------|---------------------------|------------|
| 第十节         | 双曲扁壳边缘弯矩的简化计算 .....       | 501        |
| 第十一节        | 劈锥面扁壳的计算 .....            | 505        |
| <b>第十二章</b> | <b>薄壳弯曲问题的有限单元法 .....</b> | <b>518</b> |
| 第一节         | 轴对称情况下的单元及结点位移 .....      | 518        |
| 第二节         | 位移函数 .....                | 520        |
| 第三节         | 应变矩阵 .....                | 522        |
| 第四节         | 内力矩阵 .....                | 524        |
| 第五节         | 单元的刚度矩阵 .....             | 524        |
| 第六节         | 等效的结点载荷 .....             | 525        |
| 第七节         | 坐标变换和整体刚度矩阵 .....         | 526        |
| <b>第十三章</b> | <b>薄壳的稳定 .....</b>        | <b>531</b> |
| 第一节         | 概述 .....                  | 531        |
| 第二节         | 薄壳稳定理论的基本方程 .....         | 531        |
| 第三节         | 求薄壳临界载荷的方法 .....          | 538        |
| 第四节         | 轴向受压闭合圆柱壳的稳定性 .....       | 541        |
| 第五节         | 受均匀横向外压力作用的圆柱壳的稳定 .....   | 550        |
| 第六节         | 轴向与横向压力共同作用下的圆柱壳的稳定 ..... | 552        |
| 第七节         | 圆柱壳在扭转时的稳定 .....          | 555        |
| 第八节         | 在均匀外压力作用下的球壳稳定 .....      | 557        |
| <b>第十四章</b> | <b>薄壳的振动 .....</b>        | <b>562</b> |
| 第一节         | 概述 .....                  | 562        |
| 第二节         | 薄壳振动问题的基本方程 .....         | 562        |
| 第三节         | 求薄壳固有频率的方法 .....          | 567        |
| 第四节         | 闭合圆柱形薄壳的振动 .....          | 571        |
| 第五节         | 闭合圆柱壳的轴对称法向振动 .....       | 573        |
| 第六节         | 闭合圆柱壳的非轴对称振动 .....        | 576        |
| 第七节         | 扁壳的振动 .....               | 577        |
| 第八节         | 抛物面锯齿形扁壳的振动 .....         | 580        |

|                   |  |     |
|-------------------|--|-----|
| <b>第十五章</b>       | <b>运动载荷对板壳结构引起的动力反应</b> .....          | 586 |
| 第一节               | 概述 .....                               | 586 |
| 第二节               | 薄板由运动载荷引起的强迫振动 I (不计运<br>动载荷的质量).....  | 587 |
| 第三节               | 薄板由运动载荷引起的强迫振动 II (计及运<br>动载荷的质量)..... | 596 |
| 第四节               | 扁壳由运动载荷引起的强迫振动 I (不计运<br>动载荷的质量).....  | 607 |
| 第五节               | 扁壳由运动载荷引起的强迫振动 II (计及运<br>动载荷的质量)..... | 614 |
| <b>第十六章</b>       | <b>板壳的优化设计</b> .....                   | 624 |
| 第一节               | 概述 .....                               | 624 |
| 第二节               | 优化问题的提出 .....                          | 625 |
| 第三节               | 优化的定解问题和优化条件 .....                     | 629 |
| 第四节               | 夹层板的优化条件及优化的定解问题 .....                 | 630 |
| 第五节               | 单层板的优化条件及优化的定解问题 .....                 | 633 |
| 第六节               | 无限长矩形夹层板的优化设计 .....                    | 635 |
| 第七节               | 无限长矩形单层板的优化设计 .....                    | 638 |
| 第八节               | 圆形板的优化设计 .....                         | 640 |
| 第九节               | 椭圆板的优化设计 .....                         | 643 |
| 第十节               | 壳体的优化设计 .....                          | 645 |
| <b>第十七章</b>       | <b>板壳结构在冲击载荷下的动力计算</b> .....           | 653 |
| 第一节               | 概述 .....                               | 653 |
| 第二节               | 薄板与薄壳受横向冲击的简单情形 .....                  | 654 |
| 第三节               | 薄板与薄壳受冲击的算例 .....                      | 658 |
| 第四节               | 冲击中考虑板与壳质量时的情形 .....                   | 665 |
| 第五节               | 求折算系数 .....                            | 669 |
| 第六节               | 考虑板壳本身质量时板壳受冲击的算例 .....                | 673 |
| <b>参考文献</b> ..... |  | 685 |

# 绪 论

## ——板壳理论发展简史

关于板壳方面的理论，是从1766年欧拉<sup>[1]</sup>研究薄膜的振动开始的。他认为薄膜是由互相垂直并张紧的弦线组成的，从而得到薄膜横向振动微分方程式最古老的形式

$$\frac{ddz}{dt^2} = ee \frac{ddz}{dx^2} + ff \frac{ddz}{dy^2} \quad (0-1)$$

式中： $z$ 为挠度； $ee$ 、 $ff$ 为常数； $t$ 为时间。

1789年伯努利<sup>[2]</sup>设想将两组互相正交的梁近似地作为研究板弯曲的模型，他得到方程

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \frac{q}{c^4} \quad (0-2)$$

式中： $c$ 为与板的弯曲刚度和振动周期有关的常数； $q$ 为横向载荷的集度。

显然，式(0-2)没有考虑到板的扭曲。他曾取两组不正交的梁为模型进行研究，所得的理论与实验结果有相似之处，但不完全一致。

曾从事声学的启拉地<sup>[3]</sup>在1809年对板的振动进行了研究。他在板面上铺以细砂做振动试验，由于细砂集中在节线上，因而他发现了板的振型，同时也确定了相应的频率。

在1811年，法国的索菲·日尔门利用对板弯曲的应变能进

行变分

$$A \iint \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)^2 ds \quad (0-3)$$

式中： $\rho_1$ 、 $\rho_2$ 为板弯曲面的主曲率半径。

由于她未考虑到板扭曲的应变能，故计算结果有误。后经拉格朗日改正，得到了正确的板自由振动的微分方程

$$K \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (0-4)$$

式(0-4)是1813年在拉格朗日的文件中<sup>[4]</sup>发现的。式中： $K$ 为常数。

柯西<sup>[5]</sup>和泊松<sup>[6]</sup>曾提出，将板的所有位移和应力展成坐标 $z$ （从板中面到任意一点的距离）的幂级数，在该级数中保留尽可能少的项，就得到索菲·日尔门方程。若保留较多的项，就能得到较精确的平板理论。若保留无穷多的项，就能得到精确解。当时，圣维南曾持异议<sup>[7]</sup>，他认为该级数是发散的。

后来，克希荷夫<sup>[8]</sup>对板弯曲理论作了两个重要的假设，即直法线假设和垂直于中面的假设，对薄板理论的发展起了推动作用。这些假设的优越性在于有显明的直观性和明确的物理概念。实际上，这种概念是继承了为实验所验证了的梁弯曲理论中剪力和弯矩的概念之后，使薄板和梁的理论更加接近。但是，克希荷夫的方法终究是近似的方法。

柯西和泊松的方法也有优点。如果弄清其级数的收敛条件，那么在原则上它可能使解答无限地趋于精确。这种想法后来曾被波涅托夫斯基<sup>[9]</sup>使用过。

泊松在1829年认为薄板的自由边应有三个条件<sup>[6]</sup>（弯矩、扭矩和剪力）。到1850年，克希荷夫论证了自由边的条件只能

是两个〔10〕。

纳维埃〔11〕在 1820 年发表的论文中，研究了周边简支的矩形板的解，提出了正确的边界条件，他以二重三角级数的形式作为简支板的解答，为板壳问题的解析法奠定了基础。

雷莱〔12〕在 1877 年研究了薄板的振动，他提出的能量法是解决板壳的静力和动力问题的一种有效方法。

李维〔13〕利用单三角级数解两对边为简支的矩形板，这对薄板的解析解法做了很大的发展。如果说纳维埃解法是解析法的基础，那么李维解法可以认为是纳维埃解法的进一步推广，因为他的解答收敛性好，对众多的边界情形适应性广，更具有工程实际价值。

1883 年克莱勃希的著作〔7〕中包括了在中面受双向均布拉力  $T$  作用下板的弯曲方程

$$D\nabla^4 w - T\nabla^2 w = f(x, y) \quad (0-5)$$

在该著作的注解中，圣维南概括了过去对薄板理论的研究，并给出了考虑中面力时完整的板弯曲的微分方程

$$D\nabla^4 w = f(x, y) + T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (0-6)$$

圣维南认为  $T_x$ 、 $T_y$ 、 $T_{xy}$  与挠度  $w$  无关。这类方程在 1890 ~ 1895 年曾被布莱昂〔14〕研究单向和双向受压板的稳定时使用过。铁木辛柯在 1907 年先后曾用积分法和能量法解过此类问题〔15〕。

由于古萨在 1898 年曾用复变函数来表示双调和方程〔16〕，于是人们便利用复变函数的方法去解决板的问题。这种方法后来逐步为柯洛索夫〔17〕、穆斯海里施维里〔18〕和萨文〔19〕所完善。

并用来解决板中有孔洞的应力集中问题。1938年列赫尼茨基<sup>[20]</sup>还将复变函数巧妙地应用于各向异性板的弯曲问题中。他写的各向异性板一书几乎为各国所译。

自1908年李兹<sup>[21]</sup>提出用变分的直接方法来解决薄板的弯曲问题以后，人们就可用求某一函数的极小值问题来代替变分法，于是很多矩形板和圆板的弯曲、稳定和振动的问题，只要能将板的应变能用式子表示出来，就都能用李兹法求得精度较好的近似解。

伽辽金在李兹法的基础上应用虚功原理提出了：如果只知道问题的微分方程，也可以不使用总势能泛函而求得问题的近似解，只不过在选择某个形函数时对其要求稍高些罢了，这时，形函数不仅要满足问题的几何边界条件，而且还要满足全部力的边界条件<sup>[22]</sup>。

康托洛维奇对李兹法和伽辽金法进行了改进，他将被求的含有两个变量的函数所满足的偏微分方程化为只含有一个变量的常微分方程。此法亦称为混合法<sup>[23]</sup>，对于解决有自由边的板弯曲问题比较方便，其特点是在一个方向用李兹法或伽辽金法求近似解，而在另一个方向仍用微分方程求精确解。

文献[98、99、124、140]等对李兹法和伽辽金法稍加改进。其方法是：对所选的形函数本身一开始连几何边界条件也可能不完全满足，但在变分前可迫使其满足板边的全部几何边界条件，然后再使其满足一部分或全部内力边界条件，从而得到形函数中各系数之间的某些约束条件，这样独立系数的数量就减少了，既可简化计算过程，又可提高精度。当满足一部分内力边界条件时，使用李兹法；当能满足全部内力边界条件时，则使用伽辽金法。改进后的方法，在薄板的弯曲、稳定和振动问



题中，都能应用，并可推广和应用到数学物理等更为广泛的领域。

由于数学物理中的微分方程可用有限差分来表示，因而人们也利用它来寻求薄板的弯曲、稳定和振动问题的数值解<sup>[24]</sup>，并且还利用所谓外推法<sup>[25]</sup>，以提高解的精度。

布勃诺夫和巴普考维奇将薄板的计算理论用于船舰的建造方面。布勃诺夫是最早研究柔韧板的学者<sup>[26]</sup>，而巴普考维奇则是开创受压板超临界变形研究的学者<sup>[27]</sup>。

铁木辛柯对板壳理论的贡献颇多，他除了研究受压薄板的稳定性之外，还讨论了薄板的大挠度问题。早在1915年，铁木辛柯发表了关于沿边界受力偶作用的圆板的变形<sup>[28]</sup>，他将位移 $u$ 和 $v$ 用幂级数来表示，并应用李兹法，将总势能按三个参数进行变分，求得了薄板最大挠度的准确值。

对于大挠度薄板要顾及到中面的拉伸，克莱勃希<sup>[7]</sup>和克希荷夫<sup>[8]</sup>首先获得了这些非线性的方程。而费泼尔<sup>[29]</sup>首先对中面力使用了应力函数，将大挠度板方程进行简化，但他未考虑板的弯曲刚度。卡门<sup>[30]</sup>于1910年将板很薄的要求取消，补充了被费泼尔舍弃的弯曲项，获得了薄板大挠度理论的基本方程组<sup>[30]</sup>，并研究了在剪切和压缩共同作用下板的超临界变形<sup>[31]</sup>。伽辽金使用了他的著名数学方法——伽辽金法，解决了大量的薄板数值计算问题，对薄板结构工程做出了较大的贡献<sup>[22]</sup>。符拉索夫<sup>[32]</sup>和卡尔曼诺克<sup>[33]</sup>曾用结构力学的方法来解弹性薄板的问题。不过，符拉索夫的主要功绩在于对壳体的工程理论曾进行了广泛和深入的研究<sup>[34]</sup>。胡勃于1923年研究了正交异性板<sup>[35]</sup>，对于加肋板已有了专著总结，并讨论了其弯曲、稳定和振动的问题<sup>[36]</sup>。伏耳米尔在大挠度板壳方面做了大量的