

地下水

非稳定渗流解析法

李佩成 著

科学出版社

地下水非稳定渗流解析法

李佩成 著

科学出版社

1990

前 言

地下水渗流可分为稳定渗流和非稳定渗流,本书着重于现象普遍而研究尚觉欠缺的非稳定渗流。地下水渗流的研究方法主要包括解析法、数值法、模拟法和模型试验法,本书着力于解析法。

井是提取、排除和勘测利用地下水的主要建筑物,本书侧重于井的渗流课题。

解析法是渗流研究的传统方法,尽管其存在着缺点,但在解题过程中严格遵循渗流机理的数理推演特征,对初学者训练思维深窥究竟十分有益,解析法所得公式对同类课题有良好通用性,从而可以补偿研究者花费的较多辛劳;而电子计算机的普及,显著提高了繁杂计算公式的实用性。

求解非稳定渗流的解析法通常包括分离变量法、傅里叶变换法(包括傅里叶积分法)、拉普拉斯变换法及贝塞尔函数法等。

对于这些方法及其在渗流研究中的应用,本书并不面面俱到,而着重于介绍有力的贝塞尔函数法以及诸法的联合运用。本书涉及的渗流课题虽不算多,但力求其具有典型性;求解过程也力求详尽。对关键步骤、难点和启发思考处都注明了可供参考的文献,对推导的大部分公式都有演示例题。

本书分十五章。第六章以前的内容属于解析法的数理基础,分别简介了地下水渗流的基本定律和基本方程、求解渗流基本方程的分离变量法、傅里叶变换法、拉普拉斯变换法,并列举了算例。第七章至十四章,利用前述方法研究典型的渗流课题,按部就班地推导了相应的计算公式,编绘出计算图表,列举了算例,提出若干建议和见解。这八章是本书的本论所在。书中有的公式、图表、算例是作者完成的,有的虽然在其它文献中可以见到,但本书完善了推导过程,补正了某些漏误。

本书承蒙王迺信、王运昌、孙明勤及李克希诸同志进行校对；魏晓妹同志不仅清抄了全部书稿，而且提出了不少很好的建议；初阳瑞同志协助进行大量演算；书中的图是赵延风同志清绘的；在此谨致谢忱。

目 录

前言

第一章 地下水渗流定律·····	1
一、线性渗透定律·····	1
二、实际渗透速度与平均渗透速度·····	3
三、水力坡度的几何意义和物理概念·····	4
四、非线性渗透定律·····	7
第二章 地下水渗流的基本方程及其求解条件·····	9
一、潜水非稳定渗流基本方程·····	9
二、潜水井的非稳定渗流方程·····	12
三、考虑弹性释水及越流补给时承压含水层中井孔的渗流方程 ·····	15
四、地下水稳定渗流的微分方程·····	19
五、求解渗流基本方程的方法概述·····	20
六、地下水基本渗流方程的求解条件·····	21
第三章 求解渗流基本方程的分离变量法及其应用举例·····	30
一、分离变量法及其在求解方程中的应用·····	30
二、算例·····	34
第四章 傅里叶级数及傅里叶变换法用于求解渗流课题·····	38
一、傅里叶级数简介·····	38
二、正弦变换和余弦变换·····	40
三、无限延伸含水层中的非稳定渗流课题·····	44
四、半无限边界中地下水的一维非稳定渗流·····	47
五、边界水位突然涨落引起的半无限边界中的非稳定渗流·····	53
六、傅里叶变换·····	58
七、应用傅里叶变换求解渗流课题举例·····	61
第五章 拉普拉斯变换法及其在求解渗流课题中的应用举例 ·····	64

一、拉普拉斯变换的定义及常用函数的拉氏变换式	64
二、拉普拉斯变换的特性	66
三、拉普拉斯逆变换	71
四、拉普拉斯变换在求解渗流课题中的应用举例	73
第六章 贝塞尔函数论要	78
一、第一类零阶贝塞尔函数	78
二、第二类零阶贝塞尔函数	81
三、一阶和 n 阶贝塞尔函数	87
四、贝塞尔函数的递推公式	90
五、方程 $xy'' + y' + a^2xy = 0$ 的积分	92
六、包含贝塞尔函数的一些重要公式	93
七、贝塞尔函数的渐近公式	98
八、两个重要定理	99
九、贝塞尔函数的正交性	100
十、按贝塞尔函数将任意函数展开为级数	105
十一、变形(或虚宗量)第一类贝塞尔函数	106
十二、虚宗量第二类贝塞尔函数	109
十三、第三类贝塞尔函数(汉克尔函数)	111
十四、关于贝塞尔函数表	114
第七章 无上下补给时均质含水层中“割离井”的定降深非稳 定渗流计算	116
一、“割离井”及渗流计算“割离井法”的概念	116
二、水位降落曲线计算通式的推导	118
三、起始水位呈水平时的水位计算公式	125
四、井的出水量计算公式	126
五、公式的简化, 计算图表的绘制与应用	127
六、算例	136
第八章 有上部入渗时均质含水层中割离井的非稳定渗流计 算	145
一、水位变化计算公式的推导	145
二、关于出水量的计算公式	151
三、入渗强度为常数时水位降落曲线及出水量的计算公式	151

四、算例	154
第九章 停止抽水后水位恢复过程预报公式的推导	164
一、预报通式的推导	164
二、抽水终止时水位为常数情况下的预报公式	169
三、公式(9.20)在预报停止抽水后水位恢复过程时的应用	170
四、公式的简化, 计算图表的绘制与应用	175
五、算例	180
六、关于推导公式(9.19)和(9.20)的几点说明	189
第十章 井水位及边界水位均为定值时割离井的渗流计算	191
一、水位计算公式的推导	191
二、起始水位为常数时的水位计算公式	200
三、水位计算公式的另一种形式	201
四、出水量公式推导	204
五、公式的改型	208
第十一章 内外边界分别为水位或流量时井孔的非稳定渗流 计算	211
一、通式的推导	211
二、内边界给出水位, 外边界给出流量的课题	216
三、井水位稳定为常数, 起始水位水平的割离井渗流计算	217
四、井水位随时间呈直线均匀下降时割离井的渗流计算	219
五、内边界为流量, 外边界给出水位的课题	230
六、几种特殊定解条件下第五节课题的计算公式	232
第十二章 出水量为常数时割离井的渗流计算	237
一、水位曲线计算公式的推导	237
二、对公式(12.50)、(12.51)及(12.53)的说明	249
三、算例	250
第十三章 存在越流补给时地下水向割离井的非稳定渗流	253
一、基本渗流方程及其拉氏变换	253
二、存在越流时割离井非稳定渗流计算公式的推导	257
三、算例	270

四、关于稳定渗流公式	282
第十四章 存在越流时地下水向位于广阔含水层中井孔的非 稳定渗流	284
一、存在上下越流,含水层无限广阔,而井的影响半径有限时地下 水向井孔的渗流	284
二、含水层无限广阔,影响半径很大且存在越流时井孔的非稳定 渗流	304
第十五章 “割离井”公式在生产实践中的应用问题	317
一、“割离井”公式用于测算水文地质参数	317
二、在资源评价中利用“割离井”公式计算均布井群的开采能力	324
三、“割离井”法用于井群布局设计	329
参考文献	331

第一章 地下水渗流定律

为了对地下水渗流进行定量研究，也象对其它重要的自然现象——电流、热传导、刚体运动等一样，必须首先把握住各主要运动要素之间的最基本的数量关系。

渗流定律也叫渗透定律，它是反映渗透速度 V 与水力坡降 J 之间的关系的。这种关系呈线性时叫线性渗透定律；呈非线性关系时叫非线性渗透定律，下面分别予以介绍。

一、线性渗透定律

线性渗透定律又叫达西定律，是由法国水力学家、工程师达西 (Darcy, H.) 于 1856 年通过实验发现建立的。

达西所用的实验装置如图 1-1 所示，通过供水管从上面注水，同时在实验过程中保持恒定水头，水渗经试样（砂子）以后由出水管流进量筒中，水渗经试样损失的水头用测压管测定。

根据试验得出如下规律：渗经多孔介质（试样砂）的流量 Q ，其大小与垂直水流的介质面积 F 及进出口的水头差 ΔH 之乘积成正比，而与介质的长度 L 成反比。用公式表示即为

$$Q = K \frac{F \Delta H}{L}. \quad (1.1)$$

该公式也称为达西渗透流量公式。

式中 K ——与岩土及渗透液体性质有关的常数，一般称为渗透系数。

在 (1.1) 式的两端分别除以面积 F ，并考虑到

$$\frac{Q}{F} = V. \quad (1.2)$$

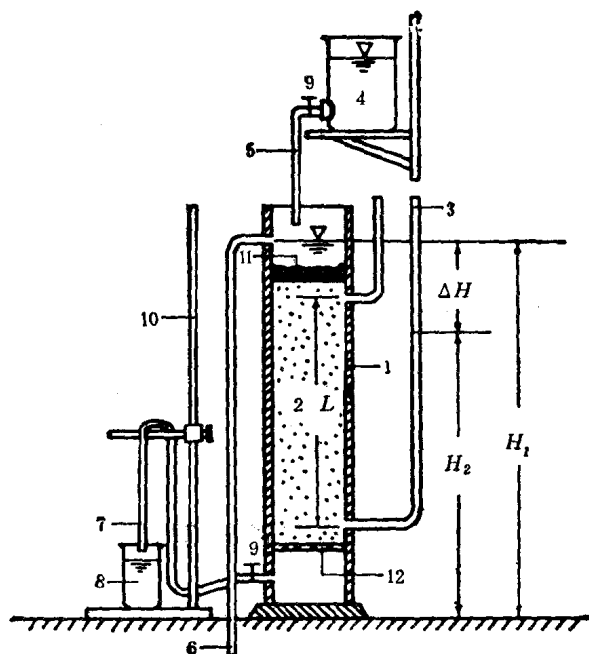


图 1-1 达西仪示意图

1. 试筒 2. 试样 3. 测压管 4. 供水筒 5. 供水管 6. 溢流管 7. 出水管
8. 量筒 9. 闸阀 10. 滑动支架 11. 砾石层 12. 金属孔板

式中 V ——平均渗透速度。

再令
$$\frac{\Delta H}{L} = J, \quad (1.3)$$

式中 J ——水力坡降, 即是单位渗径长度上的水头损失。

由此得

$$V = KJ. \quad (1.4)$$

公式(1.4)表明, 地下水的渗透速度 V 与水力坡降 J 的一次方成正比。这便是达西定律, 公式(1.4)称为达西渗透流速公式, 简称达西公式。由于公式(1.4)反映的是线性关系, 所以将达西定律也叫线性渗透定律。

在公式(1.4)中, 水力坡度是无因次量, 所以渗透系数与渗透

速度具有相同的因次(量纲),也可以用相同的单位,通常以“厘米/秒”、“米/日”等表示。

达西公式——公式(1.4)类似电学中的欧姆公式和力学中的牛顿公式,在形式上是十分简单的,但是,时至今日它仍然是地下水研究中最重要基本公式。

二、实际渗透速度与平均渗透速度

在将渗透流量公式(1.1)转变为流速公式(1.4)的过程中,曾使用了公式(1.2),亦即

$$\frac{Q}{F} = V.$$

如图 1-2 所示,渗透水流只能从孔隙中流过。因此,上式中的 Q 是经由孔隙的渗透流量,而式中的 F 却是试样(或者说多孔介质)垂直水流方向的总面积。在该面积中既包含实际通过水流的孔隙面积,也包含岩土颗粒占据的不透水的面积。

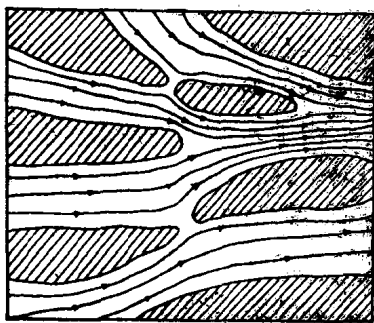


图 1-2 地下水渗透示意图

由此可知,公式(1.2)或(1.4)中的流速 V ,或者说达西公式中的流速 V ,是一个化引而来的平均渗透流速,并不是水在多孔介质的孔隙中流动的实际流速。

实际流速是指实际在孔隙中流动的水流速度,可用下式表示:

$$U = \frac{Q}{Fn_i}. \quad (1.5)$$

式中 n_i ——岩土的渗透孔隙率,也称渗透断面系数,该系数为真实通过水流的孔隙面积 F_i 与包含此面积的岩土总面积 F 之比。

在(1.5)式中考虑到 $\frac{Q}{F} = V$,则可得出表示实际渗透速度的

公式

$$U = V/n_i, \quad (1.6)$$

于是

$$V = n_i U. \quad (1.7)$$

在不少文献中还出现术语“平均真实流速 $\bar{U}$ ”。 $\bar{U}$ 值等于单位时间内通过的水量 Q 除以孔隙总面积（包括不通水的孔隙），孔隙总面积值是用孔隙率 n 乘渗透岩体的横断面面积 F 而得，故知

$$\bar{U} = \frac{Q}{Fn} = \frac{V}{n}, \quad (1.8)$$

于是

$$V = n\bar{U}. \quad (1.9)$$

公式 (1.8)、(1.9) 说明，平均渗透速度，在数值上等于真实渗透速度 U 与渗透断面系数的乘积，或者等于平均真实渗透速度与孔隙率的乘积。

由于 n_i 和 n 均是始终小于 1 的数，故由公式 (1.6)，(1.8) 可以看出，地下水运动的平均渗透速度（简称平均渗速），也就是通常习惯上所说的渗透速度 V ，始终小于实际渗透速度（简称实际渗速），也始终小于平均实际渗速。

弄清平均渗速 V ，实际渗速 U 及平均实际渗速 $\bar{U}$ 之间的关系是必要的，这不仅为了防止某些概念的混乱，而且在实际工作中也是有用的。例如在测定地下水流速的方法中，有些方法测出的便是实际渗速或平均实际渗速，而在渗流计算中却又常常需要把它们转变成平均渗速。

三、水力坡度的几何意义和物理概念

图 1-3 表示从渗流场中取出的割离体，对此，象在水力学中那样，可以列出渗透水流在相距为 ΔL 的两过水断面上的伯努里方程：

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \Delta H. \quad (1.10)$$

式中 Z_1, Z_2 ——测量点处从基准面算起的几何高度，也称几何水

头或几何水头高度；

P_1, P_2 ——测点处的压力强度,简称压强；

$\frac{P_1}{\gamma}, \frac{P_2}{\gamma}$ ——压力水头高度；

γ ——水的比重；

$\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g}, \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}$ ——流速水头高度。

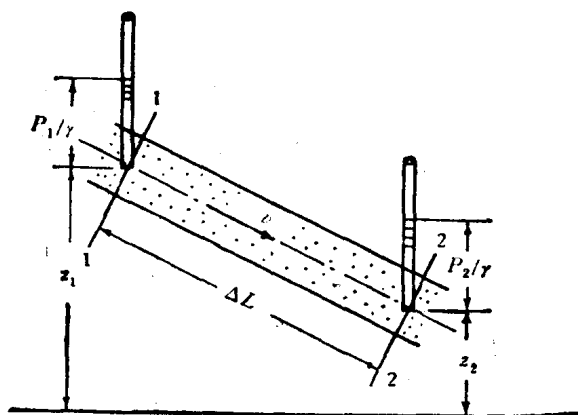


图 1-3 渗流场示意图

由于地下水运动速度缓慢,故当流速水头忽略时,从而得

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma}. \quad (1.11)$$

公式 (1.8) 之左为断面 1—1 的总水头高度 H_1 , 即

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} = H_1. \quad (1.12)$$

(1.8) 式之右为断面 2—2 的总水头 H_2 , 即

$$Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} = H_2. \quad (1.13)$$

从而可以推得

$$\left(Z_1 + \frac{P_1}{\gamma}\right) - \left(Z_2 + \frac{P_2}{\gamma}\right) = H_1 - H_2 = \Delta H, \quad (1.14)$$

$$\text{或 } \Delta H = H_1 - H_2 = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} + Z_1 - Z_2 = \frac{\Delta P}{\gamma} + \Delta Z. \quad (1.15)$$

式中 $\Delta P = P_1 - P_2$ ——压力损失;

$\Delta Z = Z_1 - Z_2$ ——两点间的高差。

利用 (1.15) 式的关系,可写出坡降公式

$$J = \frac{\Delta H}{\Delta L} = \frac{\frac{\Delta P}{\gamma} + \Delta Z}{\Delta L} = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta P + \gamma \Delta Z}{\Delta L}. \quad (1.16)$$

该式的物理意义:水力坡降是两个考查断面上的总水头差与断面间距离之比,或者说是二断面间的单位水头损失。

按照 (1.4) 式及 (1.16) 式,可将平均渗速表示为

$$\begin{aligned} V &= \frac{K}{\gamma} \frac{\Delta P + \gamma \Delta Z}{\Delta L} = \frac{K}{\gamma} \frac{\Delta(P + \gamma Z)}{\Delta L} \\ &= \frac{K}{\gamma} \frac{\Delta P_*}{\Delta L}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

式中的 ΔP_* 为化引压力,即

$$\Delta P_* = \Delta(P + \gamma Z). \quad (1.18)$$

若底板是水平的,则 $\Delta Z = 0$, 于是

$$V = \frac{K}{\gamma} \frac{\Delta P}{\Delta L} = K \frac{\Delta P}{\gamma \Delta L} = K \frac{\Delta H}{\Delta L}. \quad (1.19)$$

水力坡度 J 按照研究对象的不同和计算工作的需要,可以表示为不同的形式,或者说可将水头与运动距离表示为差分,微分或偏微分,从而可以有

$$J = \frac{\Delta H}{\Delta L}, \quad (1.20a)$$

$$J = - \frac{dH}{dL}, \quad (1.20b)$$

$$J = - \frac{\partial H}{\partial L}. \quad (1.20c)$$

式中的负号表示水头随流动距离增大而降低。这些不同的形式,将有助于建立不同的方程式——差分方程、微分方程和偏微分

方程

四、非线性渗透定律

在巨砾以及大的岩溶洞穴和裂缝之中地下水的运动, 其实与沿着渠道和管道流动的水流性质相似, 可能会出现很大的流速. 在人工坑道或井孔附近, 地下水的运动速度也可能变得很大, 以致水流的雷诺数超过临界数值, 水流进入紊流状态. 在层流状态起主导作用的粘滞摩阻力已退让于惯性-脉动力, 流速发生旋转和位移, 水头损失增大, 在这种情况下地下水的运动不再服从线性定律, 而服从非线性定律

$$V = K_f J^{\frac{1}{n}}. \quad (1.21)$$

即就是说在紊流情况下, 地下水的渗透速度 V 与水力坡降 J 的平方根成正比. K_f 为紊流时的渗透系数.

该定律也被称为谢才定律 (1921 年), 公式 (1.21) 被称为谢才公式或谢才-克拉斯诺波里斯基公式.

在有些情况下, 地下水的运动介于上述两种状态之间, 故被称为混流运动, 对此可用所谓斯姆列盖尔定律的公式表示, 即

$$V = K_f J^{\frac{1}{m}}. \quad (1.22)$$

式中的 m 变化在 1—2 之间, 当 m 为 1 时即为达西公式; m 为 2 时为谢才公式. 在其余情况下由于 m 值不易确定, 因而公式 (1.22) 在实际中很少应用, 而被另一种形式的公式所代替, 即

$$J = AV + BV^2. \quad (1.23)$$

式中的 A, B 为经验系数, 其值取决于岩石颗粒的粗细和渗液粘滞性的大小.

(1.23) 式是表达渗透规律的通式, 不难发现当渗透流速很小时, 可以忽略式右的第二项而导出达西定律 (线性定律)

$$V = \frac{1}{A} J = KJ. \quad (1.24)$$

当 V 非常大时, 相比之下, 可以忽略等式之右的第一项而得

$$J = BV^2,$$

或
$$V = \left(\frac{1}{B}\right)^{\frac{1}{2}} J^{\frac{1}{2}} = K_1 J^{\frac{1}{2}}. \quad (1.25)$$

公式 (1.23) 是根据自然作用力的独立性原则, 并通过试验建立的, 首创者是裘布依, 后来又有不少学者作了进一步的研究.

若在公式 (1.23) 中令

$$A = \frac{1}{K}, \quad \alpha = KB. \quad (1.26)$$

则 (1.23) 可转变为

$$J = \frac{V}{K} (1 + \alpha V). \quad (1.27)$$

式中 K 即是线性定律中的渗透系数 K , 而 α 被称为非线性参数.

依据本书的主旨, 对于渗透定律只作如上的扼要介绍, 以满足其它篇章的引用为限度, 至于更深入的论述可参阅文献[1—5].

第二章 地下水渗流的基本 方程及其求解条件

一、潜水非稳定渗流基本方程

地下潜水对于水利工程建设, 环境工程建设以及排灌事业等具有重要意义, 在本章中先以最常遇的潜水二维流为例, 建立地下水非稳定运动的基本方程。

如图 2-1 所示, 从二维流的渗流场中割离出一个微分单元体, 该单元体的宽度为 dx , 长度为 dy , 其高度为 H 。

地下水沿 x 轴方向从左面流入单元体; 沿 y 轴方向从前面流入。经时段 dt 后分别经 dx , dy 从对面流出。

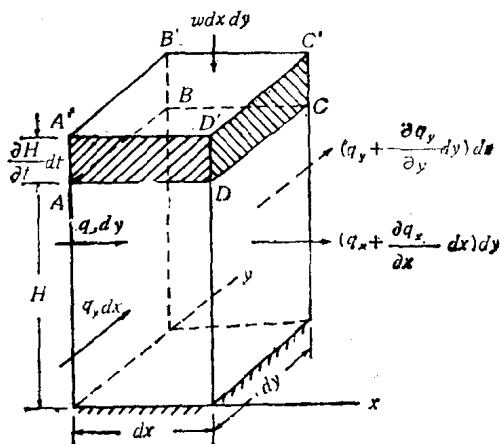


图 2-1 潜水二维非稳定流割离体图

现在来考查流量的变化。

(1) 流入的水量计有:

顺 x 方向流入的: $(q_x dy) dt$;

顺 y 方向流入的: $(q_y dx) dt$;

上部入渗量: $(w dx dy)$, 此处 w 为入渗强度, 亦即在单位时间内渗入的水层厚度, 通常以米/日计。

(2) 流出量计有: