第一版序言

本题解是根据国立莫斯科大学物理系和函授部的数学物理方程实际作业汇编的。这些作业中提出的习题，曾在A. H. Тихонов和A. A. Самарский的《数学物理方程》教程〔7〕中和Б. M. Будак的玻板印刷《数学物理习题集》〔14〕中利用过；但是，在汇编本题解时，把所考虑问题的范围大大扩充了，而且习题的数量也增加了几倍。特别着重了方程和边界条件推导方面的习题。大量的习题都提供了详细的提示和解答。性质相近的习题只给了答案。本书各章又根据解法分节。所有这一切都是为了使学生通过独立工作有可能掌握解(数学物理方程主要分支)题的基本技能。

同时题解并不奢望包括数学物理中所用的全部方法。例如其中就没有考虑运算方法、变分与差分法、积分方程的应用。

但是，我们希望本书不仅对大学生，而且也对工程师和科研机关的研究人员有所助益。

为了便于使用，书的末尾开列了一系列参考资料。其中引用最多的是A. H. Тихонов和A. A. Самарский的《数学物理方程》一书〔7〕，因为本题解所用的符号和材料编排顺序同该书大体一致。

最后，作者认为有必要指出，虽然Б. M. Будак和A. H. Тихонов负责一些章节的编写，而A. A. Самарский和A. H. Тихонов负责另一些章节的编写，但是题解总的结构安排和所写的全部章节都经过共同讨论，所以每位作者对本集子的全部内容都负有同等责任。

Б. M. Будак, A. A. Самарский, A. H. Тихонов

1955年2月莫斯科

数 学 物 理 题 解

中国科学技术情报研究所重庆分所　　编　辑
科学技术文献出版社重庆分社　　出　版
重庆市市中区胜利路91号
四川省新华书店重庆发行所　　发　行
重　庆　新　华　印　刷　厂　　印　刷

开本：787×1092毫米1/32　印张：24.25　字数：77万
1982年9月第一版　　1982年9月第一次印刷
科技新书目：27—203　　印数：34,000册

书号：17176·291　　定价：2.50元

第三版序言

本版系修订本。谨向发现前二版中错误的所有同志表示谢意。

作者　1979年莫斯科

J241/27/06

---

*) 答案和解的页码用黑体字表示

习　题

第一章

二阶偏微分方程的分类和典则形式的化法

在本章我们对两个或更多个自变量的函数提出定义方程的类型和典则形的化法问题。

在两个自变量的情形，我们研究常系数和变系数方程；在三个和更多个自变量的情形，我们仅研究常系数方程，因为对三个和更多个自变量的变系数方程，一般说来不能借助于对整个区域（在其中方程属于所给定的类型）为公用的变换化为典则形式。在§1中我们对两个自变量的函数的方程提出问题，而在§2中我们对三个或更多个自变量的函数的方程提出问题。

1. 两个自变量的函数的方程

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f(x,\ y)$$

1.1. 变系数方程

1. 求方程

$$(l+x)u_{xx}+2xyu_{xy}-y^2u_{yy}=0$$

的双曲型、椭圆型和抛物型区域，并研究它们与l的相关性，其中l是数值参数。

在习题2-20中，于保持方程类型的各自的区域内把方程化为典则形式。

2. $u_{xx}+xu_{yy}=0$.

3. $u_{xx}+yu_{yy}=0$.

4. $u_{xx}+yu_{yy}+\frac{1}{2}u_y=0$。

5. $yu_{xx}+xu_{yy}=0$。

6. $xu_{xx}+yu_{yy}=0$。

7. $u_{xx}+xyu_{yy}=0$。

8. $u_{xx}\operatorname{sign}y+2u_{xy}+u_{yy}=0$。

9. $u_{xx}+2u_{xy}+(1-\operatorname{sign}y)u_{yy}=0$。

10. $u_{xx}\operatorname{sign}y+2u_{xy}+u_{yy}\operatorname{sign}x=0$。

11. $y^2u_{xx}-x^2u_{yy}=0$。

12. $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=0$。

13. $x^2u_{xx}+y^2u_{yy}=0$。

14. $y^2u_{xx}+x^2u_{yy}=0$。

15. $y^2u_{xx}+2xyu_{xy}+x^2u_{yy}=0$。

16. $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0$。

17. $4y^2u_{xx}-e^{2x}u_{yy}-4y^2u_x=0$。

18. $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}-3y^2u_{yy}-2xu_x+4yu_y+16x^4u=0$。

19. $(1+x^2)u_{xx}+(1+y^2)u_{yy}+xu_x+yu_y=0$。

20. $u_{xx}\sin^2x-2yu_{xy}\sin x+y^2u_{yy}=0$。

1.2. 常系数方程

借助于未知函数的代换 $u(x,\ y)=e^{\alpha x+\beta y}v(x,\ y)$，并化为典则形式，简化下列的常系数方程。

21. $au_{xx}+4au_{xy}+au_{yy}+bu_x+cu_y+u=0$。

22. $2au_{xx}+2au_{xy}+au_{yy}+2bu_x+2cu_y+u=0$。

23. $au_{xx}+2au_{xy}+au_{yy}+bu_x+cu_y+u=0$。

2. n 个自变量函数的常系数方程

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_{x_ix_k}+\sum_{i=1}^{n} b_iu_{x_i}+cu=f(x_1,\ \cdots,x_n)。$$

把方程24—28化为典则形式。

24. $u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}+4u_{yz}+5u_{zz}+u_x+u_y=0$.

25. $u_{xx}-4u_{xy}+2u_{xz}+4u_{yy}+u_{zz}=0$.

26. $u_{xx}+u_{tt}+u_{yy}+u_{zz}-2u_{tz}+u_{xz}+u_{ty}-2u_{yz}=0$.

27. $u_{xy}+u_{xz}-u_{tx}-u_{yz}+u_{ty}+u_{tz}=0$.

28. a) $\sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}+\sum\limits_{i<k}^{n} u_{x_i x_k}=0$.

b) $\sum\limits_{i<k}^{n} u_{x_i x_k}=0$.

29. 在方程

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i x_i}+\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i}+cu=f(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)$$
$$a_i\neq 0,\quad i=1,\ 2,\cdots,n.$$

中消去具较低阶导数的项。

第二章

双曲型方程

关于连续介质(弦、杆*)、膜，气体等等)的振动问题和关于电磁振荡的问题都可以化成为双曲型方程。

本章我们研究下述情形的双曲型方程的边界问题(见脚注)的提法和解法，所研究的物理过程可以表为两个自变量的函数：一为空间坐标，一为时间坐标。

第六章研究多个自变量的函数的双曲型方程。

1. 可化为双曲型方程的物理问题；边界问题的提法

本节第一组问题假定介质是连续的和均匀的，以及力分布也是连续的。

第二组问题假定介质是非均匀的，而且无论介质的特性还是力的分布密度都是间断的。

第三组问题用以建立各种振动过程间的相似性。

提出与物理问题相对应的边界问题，这就意味着：首先选出描述物理过程**)的函数，然后

1) 推出这一函数的微分方程，

---

*) 弹性杆的横向振动可以化为四阶抛物型方程，而纵向振动就可化为二阶双曲型方程。可是杆的横向振动的边界问题非常类似于杆的纵向振动的边界问题，因而也在本章讨论。

我们同样可以指出一系列可以化为与时间无关的函数的双曲型方程的重要物理问题。例如，在物体由超声速气流环绕的稳定绕流的情况下，得到速度势的双曲型方程。

**) 通常这一函数我们已在问题的条件中指明。

2）推出它的边界条件，

3）表述初始条件*）。

1.1. 无阻力介质中的自由振动；常系数方程

在均匀介质**）中研究微小振动时，我们推出常系数微分方程。

1. 杆的纵向振动。弹性直线杆在时刻 $t=0$，它的横截面被传给了小的纵向位移和速度，使之失去静止状态。假定杆的横截面总是保持平面，试提出当$t>0$时确定杆的横截面位移的边界问题，并研究杆的端点的以下情形：

a）刚性固定的；

a′）按给定规律在纵方向移动；

b）自由的；

c）弹性固定的，即每一端从支承物的一边受到与位移成比例，方向与位移相反的纵向力的作用。

2. 弦的微小振动***）。设弦以力F_0被拉紧，而且位于直线的平衡位置，其两端固定不动，在$t=0$时，把初始偏移和速度传给弦的点。

试提出当$t>0$时确定弦的点的微小偏移的边界问题。

3. 弹性圆柱体的扭转振动。设弹性的均匀圆柱体在时刻$t=0$，其横截面在它自身的平面内得到一关于圆柱体的轴的微小转动而使之失去静止状态。

试提出当$t>0$时确定圆柱体的横截面的旋转角的边界问题。并研究端点自由、刚性地固结着及弹性固结着的情形。

4. 管中气体的纵向振动。设包含在圆柱形管中的理想气体发生微小的纵向振动。设由气体分子所组成的横截平面不发生形变，而气体的一切分子平行于圆柱体的轴而运动。

试在管的两端为下列情况之一时，提出确定1）密度ρ，2）压力

---

*）初始条件的存在对基本的双曲型和抛物型的边界问题来说是有代表性的。有关与双曲型方程的边界问题的提法有关的概念和定义，见〔7〕，第38—47页以及第120—121页。

**）例如，在均匀的有不变横截面的杆和弦中。

***）弦的微小的横向振动和微小的纵向振动方程的推导在〔7〕，第23—28页被详细地作出。在所提出的问题中，要求对它的点在任意方向的位移推出弦的振动方程。

p，3）气体分子的速度势 φ，4）速度 v，5）气体分子的位移u等的边界问题：

a）用不透气的刚性隔板封闭起来；

b）开着的；

c）用一质量小得可以忽略不计的小活塞安在一小弹簧上封闭起来，该弹簧具刚性系数ν而且在管内无摩擦地滑动着。

5. 液压冲击的Жуковский问题。长l的直圆柱管的入口截面与一具无限液体容量的大水池相联结。液体沿管在全长上以常速 v_0 流动。在初始时刻$t=0$，管的出口截面$x=l$立即被截断。

试提出确定管中液体粒子的速度和液体的压力的边界问题。

6. 在前一习题的管端$x=l$处有一柔软的气压罩（图1）及一调整由罩内流出的液体流量$Q(t)$的装置A，所以$Q(t)$是时间的已知函数。

设Ω_0和 P_0 是罩中空气的平均体积和压力，设想液体是不可压缩的，罩壁是不会形变的，再设罩内空气的压缩和减压过程是等温的，而且罩内空气体积的改变与平均体积 Ω_0 相比是很小的。试推出端点$x=l$的边界条件。

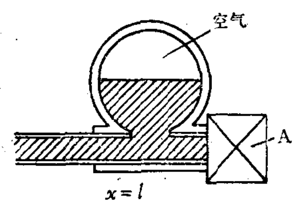

图 1.

7. 管道中的重液体波。在一不深的水平管道中装有水（该管道长为l且具矩形横截面），水的深度由自由的静止表面起算等于h。管道两端用刚性的平板封闭着，该平板垂直于其母线。

设轴x的方向沿着管道，对不大的扰动，管道中水的自由表面可以引起水的波动，在这一波动下，由液粒组成的横截面整个将得到一沿轴x的位移$\xi(x, t)$，而其高度就得出离水的自由静止表面高度h的偏移$\eta(x, t)$。

设给出在时刻$t=0$的初始值$\xi(x, t)$，$\eta(x, t)$。

试提出确定$\xi(x, t)$，和$\eta(x, t)$当$t>0$时的边界问题。

8. 杆的横向振动。具绞链式固定着两端的弹性均匀长方体形的杆（图2），在初始时刻$t=0$其端点被传给以平行于杆的纵向铅直对称平面的微小横向偏移和速度。

假设杆发生微小的横向振动，试提出当$t>0$时确定杆的点横向偏

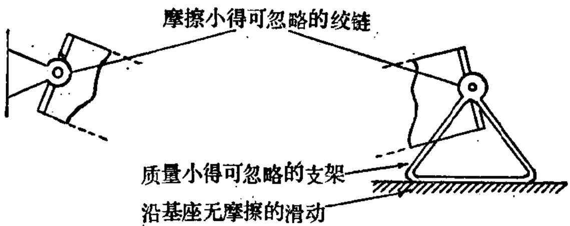

图 2

移的边界问题。

9．当其杆之一端刚性固定着，而另一端自由的情形（图3），试研究习题8。

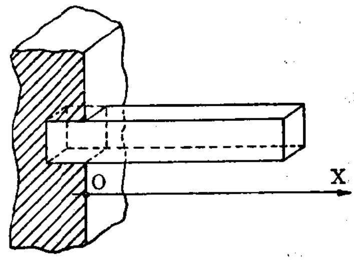

图 3

10．试研究习题8，此时假定杆放在一弹性基座上，基座的质量在研究杆的横向振动时可以忽略不计。基座（杆被固结在上面）的弹性系数等于k，即对杆从弹性基座一边作用的横向弹性力在单位长的杆上在它所给的点x处等于$-ku(x, t)$。

1.2．强迫振动及在有阻力的介质中的振动；常系数方程

11．设弦的两端固结不动，从时刻$t=0$开始对弦施以连续分布的线密度等于$F(x, t)$的横向力。

试提出确定弦点当$t>0$时的横向偏移$u(x, t)$的边界问题。

12．沿两端固定不动和电阻小得可以忽略不计的导线$0 \leqslant x \leqslant l$当$t>0$时有一交流的电流强度$I=I(t)$在其上流动，而且导线在与其垂直的强度为$H$的恒稳磁场中。试提出由施于导线的有质动力所引起的导线横向振动的边界问题[*]。

13．从时刻$t=0$起，直线的弹性均匀杆之一端，按照给定的规律作纵向振动，而对另一端施以一方向沿着杆的轴的力$\phi=\phi(t)$。在时刻

[*] 见[17]，第204页。

$t=0$，杆的横截面是不动的，而且位于非偏移位置。试提出关于确定杆点当 $t>0$ 时的微小纵向偏移 $u(x, t)$ 的边界问题。

14. 弹性均匀立放着的重杆，上端点刚性地系在一自由下落的电梯的天花板上，设此电梯达到速度 v_0 时突然停止。试提出关于这一杆的纵向振动的边界问题。

15. 设弦的两端固定不动，试提出在阻力与速度成比例的介质中弦的微小横向振动的边界问题。

16. 在存在连续分布的强迫横向力的条件下，长方体的均匀弹性杆的两端刚性地固结着，试提出此杆在阻力与速度成比例的介质中微小横向振动的边界问题。

17. 长方体的均匀弹性杆的一端刚性地固结着，另一端施以按给定的规律逐渐变化的横向("横断")力，试提出杆的微小横向振动的边界问题。

18. 在无阻力的介质中均匀弹性杆的一端刚性地固结着，而另一端受到与速度成比例的阻力的作用，试提出杆的微小纵向振动的边界问题。

19. 导线中的电振荡。设交流电沿着按长度说具有连续分布的欧姆电阻 R，电容 C，自感 L 及电漏 G 的细导线流动*)。并设导线之一端接地，对另一端施以电动势 $E(t)$，再设给定初始电流 $i(x,0)=f(x)$，初始电压 $v(x,0)=F(x)$，试提出关于确定交流电的电流强度和电压的边界问题。

1.3. 关于可化为连续变系数方程的振动问题

如果振动的介质是不均匀的，同时描述其性质(质量密度，弹性模数等等)的函数是点的连续函数，那么，如所周知，表示振动的函数的微分方程就会有连续变系数。不过也可能表示可化为连续变系数的微分方程的其它情形。

20. 横截面 $S(x)$ 变动的弹性杆 $0\leqslant x\leqslant l$ 的两端固定不动，质量密度等于 $\rho(x)$，弹性模数等于 $E(x)$，而且振动是由初始的纵向位移和

*) 量 R, C, L, G 按单位长计算；导线的均匀性的意思是，R, C, L 和 G 与所研究的导线上点的位置无关。