高等学校计算机系列丛书

线性代数

张文忠　杨盛祥　王　莉　编

重庆大学出版社

线性代数

张文忠　杨盛祥　王　莉　编

重庆大学出版社

内 容 简 介

本书是为高等工程专科编写的线性代数课程教材。它是根据国家教委颁发的高等工程专科线性代数课程的基本要求而编写的。内容包括行列式、矩阵、n维向量、线性方程组、相似矩阵和二次型。全书内容可在30学时内授完。

本书简明易懂，除可供工程专科作为教材外，也可供职工大学、职业大学等各类非数学专业的专科作教材或参考书。

线性代数

张文忠　杨盛祥　王　莉　编

责任编辑　曾令维

*

重庆大学出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

重庆建筑大学印刷厂印刷

*

开本:850×1168　1/32　印张:5.125　字数:136千

1997年6月第1版　1997年6月第1次印刷

印数:1—6000

ISBN 7-5624-1350-9/O·143　定价:6.00元

序

面对知识爆炸，社会学家们几乎都开出了一个相同的药方：计算机。计算机也深孚众望，以其强大的功能，对人类作出了巨大的贡献，取得了叹观止矣的成就。自它 1946 年 2 月 14 日在美国费城诞生以来，至今已过“知天命”的年龄了。现在，计算机已是一个庞大的家族。如果说，它的成员占据了世界的每一个角落和每一个部门也并不过分，甚至找不到这样一个文明人，他的生活不直接或间接与计算机有关。目前，全世界计算机的总量已达数亿台，而且，现在正以每年几千万台的速度增长。

作为计算机在信息传递方面的应用，计算机加上网络，被认为是和能源、交通同等重要的基础设施。这种设施对信息的传递起着异常重要的作用。西方发达国家和我们国家对此都非常重视。例如，美国的信息高速公路计划，全球通讯的“铱”计划，我国也开始实行一系列“金”字头的国民经济管理信息化计划。这些计划中唱主角的设备便是

计算机。计算机在各个方面的应用不胜枚举，我们每个人都自觉不自觉地处于计算机包围中。

计算机对社会生产来说是一个产业大户，对每个现代人来说是一种工具，对学生们来说，它是一个庞大的知识系统。面对计算机知识的膨胀，面对计算机及其应用产业的膨胀，计算机各个层次的从业人员的需要也在不断膨胀，计算机知识的教育也遍及从小学生到研究生的各个层次。

为了适应计算机教学的需要，重庆大学出版社近几年出版了大量的计算机教学用书，这一套教材就是一套适应专科层次的系列教材。我们将会看到，这一套教材以系列、配套、适用对路，便于教师和学生选用。如果再仔细研究一下，将会发现它的一系列编写特色：

1. 这些书的作者们是一些长期从事计算机教学和科研的教师，不少作者在以前都有大量计算机方面的著作出版。例如本系列书中的《Visual Fox Pro 中文版教程》的作者，十年前回国后最早将狐狸软件介绍到祖国大陆，这一本书已是他的第八本著作了。坚实的作者基础，是这套书成功的最根本的保证。

2. 计算机科学是发展速度惊人的科学，内容的先进性、新颖性、科学性是衡量计算机图书质量的重要标准，这一套书的作者们在这方面花了极大的功夫，力求让读者既掌握计算机的基础知识，又让读者了解最新的计算机信息。

3. 在内容的深度和知识结构上，从专科学生的培养目标出发，在理论上，从实际出发，满足本课程及后续课程的需要，而不刻意追求理论的深度。在知识结构上，考虑到全书结构的整体优化，而不过分强调单本书的系统性。这样，在学过这一套系列教材后，学生们就可在浩瀚的计算机知识中，建立起清晰的轮廓，就会知道这些知识的前因后果，就会了解这些知识的前接后续。使学生们能在今后的工作实践中得心应手。

4. 计算机是实践性很强的课程，仅靠坐而论道是学习不了这些知识的。所以从课程整体设置来讲，包括有最基本的操作技能的教材。对单本书来说，在技术基础课和专业课中，都安排有一定的上机实习或实验，这样可使学生既具备一定的理论知识以利今后发展和深造，又掌握实际的工作技能胜任今后的实际工作。

编写一套系列教材，这是一个巨大的工程。这一套书的作者们，重庆大学出版社的领导和编辑们，都为此付出了辛勤的劳动。作为计算机工作者，以此序赞赏他们的耕耘，弘扬他们的成绩。

周明德

1997年6月15日

前　言

本书是重庆大学出版社在国家教委的指导下组织编写的高等工程专科系列教材之一——高等工程专科《线性代数》教材。

本教材是根据国家教委颁发的《高等工程专科线性代数课程教学基本要求》编写的。编写时注意遵循工程专科教材的编审原则："以必需和够用为度"，适当减少个别结论的推证，力求在适合工程专科需要的基础上贯彻少而精的原则，使之易教易学。全书(加"*"号的选学部分除外)内容可在30学时内授完。

本教材由张文忠教授任主编(撰写第一、三章)，杨盛祥副教授任副主编(撰写第二、四章)，王莉副教授撰写第五、六章。全书由张文忠教授统稿，由重庆大学谢树艺教授任主审。

限于我们的水平，书中不妥之处在所难免，敬请读者不吝指正。

编　者

1996年10月

目 录

第一章 行列式

在初等数学中，为便于求解二元和三元线性方程组，引进了二阶行列式和三阶行列式。为了研究一般的 n 元线性方程组，需要把二、三阶行列式加以推广，即讨论 n 阶行列式的概念、性质和它的应用。

§1 n 阶行列式的定义

一、二阶和三阶行列式

在求解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

时，曾将 x_1 和 x_2 的 2^2 个系数组成的算式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 简记成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

这符号称为**二阶行列式**，其中的数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为**该行列式的元素**，每个横排称为**行列式的行**，每个竖排称为**行列式的列**。此时，a_{ij} 的第一个下标 i 表示它位于自上而下的第 i 行，第二个下标 j 表示它位于从左到右的第 j 列，即 a_{ij} 是位于行列式第 i 行与第 j 列相交处的一个元素。

对于方程组(1)，若分别记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则当 $D\neq 0$ 时，易验证它的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{12}-a_{12}a_{21}},\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

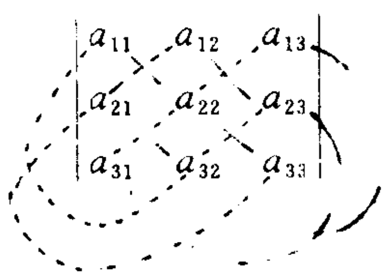
若将 $|a|=a$ 称为一阶行列式（注意不要与绝对值符号相混淆！），则上述二阶行列式 D 可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}|a_{22}|-a_{12}|a_{21}| \tag{2}$$

类似地，记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

则左端由 3^2 个数组成的符号称为**三阶行列式**。其右端可按如下的便于记忆的对角线法计算：



图中三条实线上的三个元素的乘积都带正的符号，位于三条虚线上的三个元素的乘积都带负号。

三阶行列式也可以转化成含有三个二阶行列式的展开式进行计算：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{3}$$

因为，上式右端等于

$$a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}$$

$$-a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

例1 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

解一 按对角线法计算，得

$$D = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-3) + 3 \cdot (-2) \cdot (-1) - 3 \cdot 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-2) \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 = 15$$

解二 按展开式法计算，得

$$D = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 15$$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{4}$$

若分别记三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则容易（用加减消元法求出方程组(4)的解）验证，当 $D \neq 0$ 时，其解可简明地表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}$$

二、n 阶行列式

若将(2)式看成用一阶行列式来定义二阶行列式，将(3)式看成用二阶行列式来定义三阶行列式，则类此可用三阶行列式来定义四阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

上面定义式右端的规律是：各项的第一个因数依次为第一行的元素 $a_{1j}(j=1,2,3,4)$，其符号是$(-1)^{1+j}$，a_{1j}后的三阶行列式为左端四阶行列式中划去第一行和第 j 列元素后余下的元素（不改变行列顺序）所组成的三阶行列式。

一般地，可用递推的方式依此得 n **阶行列式**的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$- a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ (-1)^{1+j}a_{1j}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} \tag{5}$$

n 阶行列式的元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 共有 n^2 个。通常将 n 阶行列式简记为 $\Delta(a_{ij})$ 或用一个大写字母(如 D)表示。

n 阶行列式从左上角到右下角的元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为**主对角线上元素**,从右上角到左下角的元素 $a_{1n},a_{2,n-1},\cdots,a_{n1}$ 称为**次对角线上元素**。

在 n 阶行列式中,把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,余下的元素按原次序组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**,记作 M_{ij}。又记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**。

例如,四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中元素 a_{23} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}$$

这时,n 阶行列式的定义式(5)可简述为:n 阶行列式等于它的第一行各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

亦即
$$D=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

通常，上式简称为将行列式 D 按第一行展开。

三、几种特殊的 n 阶行列式

下面按定义来计算几种特殊的 n 阶行列式，其中未写出的元素都是 0。

仅在对角线上有非零元素的行列式称为**对角行列式**。

例 2 证明对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

其中第一个行列式主对角线上的元素是 λ_i，第二个行列式次对角线上的元素是 λ_i，未写出的元素都是 0。

证 按 n 阶行式的定义依次降低其阶数，第一个行列式得

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \lambda_2 & & & \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$=\lambda_1\lambda_2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \lambda_3 & & & \\ & \lambda_4 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\cdots=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

对第二个行列式，注意到降低阶数时，元素 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 依次在第 $n,n-1,\cdots,2,1$ 列，故有

$$
\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \lambda_1(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} & & & \lambda_2 \\ & & \lambda_3 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}
$$

$$
= \lambda_1(-1)^{1+n}\lambda_2(-1)^{1+(n-1)} \begin{vmatrix} & & & \lambda_3 \\ & & \lambda_4 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}
$$

$$
= \cdots = (-1)^{1+n} \cdot (-1)^{1+(n-1)} \cdots (-1)^{1+2} \cdot (-1)^{1+1} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n
$$

$$
= (-1)^{n+\frac{n(n+1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n
$$

特别地，主对角线上的元素都为 1 的对角行列式，称为**单位行列式**，简记为 I，于是有

$$
I = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 1
$$

对角线以上（下）的元素都为 0 的行列式称为**下（上）三角行列式**。

例 3 试证下三角行列式

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}
$$

证 按 n 阶行列式的定义，依次降低其阶数，每次都仅有一项不为 0，故有

$$
D = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots
$$