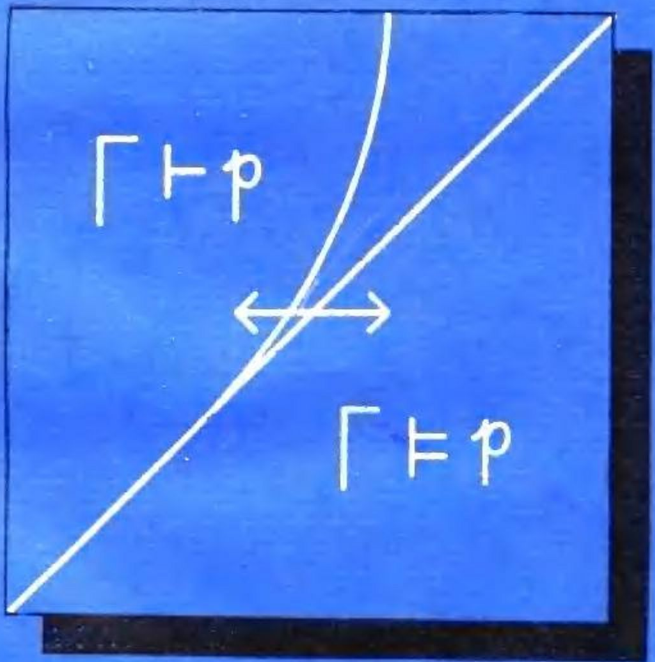
离散数学原理之三

数理逻辑

汪芳庭 编著



中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书前二章介绍了命题演算和谓词演算，第三章介绍形式算术和递归函数，第四章中心是不完备性定理。本书内容丰富，结构严谨，表述清晰，对一些定理和性质的证明，特别是对Gödel不定备性定理的证明较新颖。

本书可作为计算机系本科生和研究生的教材，也可供逻辑、数学、计算机等专业教学及研究人员参考。

数 理 逻 辑

汪芳庭 编著

*

中国科学技术大学出版社出版

（安徽省合肥市金寨路96号，邮政编码：230026）

中国科学技术大学印刷厂印刷

安徽省新华书店发行

*

开本：850×1168/32　印张：8.875　字数：228千

1990年9月第1版　　1990年9月第1次印刷

印数：1—4000册

ISBN 7-312-00200-5/O·76　定价：2.20元

前　言

从1982年起，中国科学技术大学计算机系为加强离散数学的教学，单独开设了数理逻辑课，并由我编写了这门课的教材。该教材几经修改和增补，成了此书。

为了建立数学模型的方便，并考虑到集论知识已越来越普及，本书在元语言中大量使用了集论，以减少非形式的叙述。所用的集论概念和结论列在预备知识中。除了集论，还用了一些初等数论及代数知识。不要求读者事先一定要熟悉这些知识，而是对用到的有关命题给出自足的证明。

命题演算和谓词演算是数理逻辑的基础内容。本书前两章里作为代数系统分别建立了这两种演算，先介绍语法，再介绍语义，然后证明它们各自的可靠性、完全性定理。整个第三章讨论形式算术，证明了“递归”与“可表示”的等同性，从而为证明不完备性定理作了准备。在第四章里，对Gödel 第一不完备性定理、Gödel-Rosser定理、Tarski 定理和形式算术的不可判定性定理都给了完整的证明。结合对Church论题和Turing 论题的介绍，对这些定理的意义进行了一些讨论。

由于 Gödel 第二不完备性定理的证明十分复杂，在具有教材性质的逻辑书中介绍这个定理是件值得探索的事情。作为尝试，本书提出了无矛盾性不可证性定理的一种易证形式。

练习题大都给以提示。这些练习有助于理解正文内容，一般与后文无直接联系。

带有 * 号的内容可略去不读。

高恒珊、张尚水、康宏逵同志对作者曾给予热情的鼓励，并对本书初稿提出过不少意见和建议。中国科学技术大学计算机系

陈友君、许胤龙同志在教材编写和教材修改过程中给予作者很大的帮助和支持。在此向以上各位谨致谢意。

还要感谢科大计算机系的历届同学，他们对本书内容的改进起过重要作用。

书中不妥之处敬请读者指正。

汪芳庭

1990年1月于科大数学系

引　　言

历史上，首先明确地提出来要用数学方法去研究推理的人是莱布尼茨（1646—1716）。他在1714年写的一封信中曾说："要是我少受干扰，或者我更年青，或者有青年人来帮助我，我有望作出一种一般代数，用它可将推理的正确性全都化为计算。"

莱布尼茨的用计算解决争论的美好愿望能否实现？在什么程度上能够实现？数理逻辑的发展已对此作出了一定的回答。

数理逻辑奠基人之一——弗雷格（1848—1925）认为："数学的本质就在于，一切能证明的都要证明。"

什么叫数学证明？数理逻辑的一项重要任务就是试图回答这个问题，设法把"证明"这个概念（与此相关的还有可计算性的概念）精确化。我们将讨论精确化所用的方法，考察在这个精确化过程中出现的问题和得出的结论。

为了达到精确化，数理逻辑在研究推理时要建立数学模型。我们把这种数学模型叫做形式系统。对形式系统进行研究，必须要用普通的自然语言。我们把这种自然语言叫做"元语言"，以区别于形式系统的那种形式语言。

研究推理时使用数学，不可避免又要用到逻辑。我们把用到的逻辑叫做"元逻辑"。于是我们有两种系统："元系统"和形式系统。比如，形式系统中的"定理"、"证明"等有特定的含义，是我们研究的对象；而研究得到的结论则表现为元数学的定理，这是用元语言给出来的。这样，我们会得到一些关于"定理"的定理，关于"证明"的证明，等等。这种情况不可避免，正象研究语言要用到语言一样。

在元语言中，我们有时用符号"⇒"表示"蕴涵"；用"⇔"表示"当且仅当"。

目　　录

0　预备知识

0.1　集论基本概念

这里列出在我们的元语言中要用到的一些集论基本概念以及它们的符号表示。

集 A 是集 B 的子集，记作 $A\subseteq B$，意思是：凡是 A 的元素，都一定是 B 的元素。即：

若 $x\in A$，则 $x\in B$。

$A=B$，是指 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，即 A 与 B 有完全相同的元素。

集 A 的幂集用 $\mathscr{P}(A)$ 表示，它是由 A 的全体子集所形成的集。例如，若 $A=\{1,2,3\}$，则

$$\mathscr{P}(A)=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\phi\},$$

其中 ϕ 是空集，即没有任何元素的集。ϕ 是任何集的子集。

集 A 与集 B 的并，指

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}.$$

集 A 与集 B 的交，指

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{且}x\in B\}.$$

作为集的运算，并和交都满足交换律、结合律和分配律。以后，我们把有限次的并 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 记作 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$；把有限次的交 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 记作 $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$。

设有一列集 $A_0,A_1,A_2\cdots,A_n,\cdots$。我们记

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \{x \mid \text{存在 } i \text{ 使 } x \in A_i\};$$

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \{x \mid \text{对任意 } i \text{ 都有 } x \in A_i\}.$$

集 B 在集 A 中的余集，指

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{且} x \notin B\}.$$

集 A 与集 B 的积集，指

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

它由以 A 的元素为第一元素，以 B 的元素为第二元素形成的有序对（a,b）所构成。有序对（a,b）的基本性质是：

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 \text{ 且 } b_1 = b_2.$$

n 个集 $A_1 \cdots, A_n$ 的积集，指

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n$$

$$= \{(a_1, \cdots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \cdots, a_n \in A_n\}.$$

n 元有序对（$a_1, \cdots, a_n$）具有性质：

$$(a_1, \cdots, a_n) = (b_1, \cdots, b_n) \quad \Rightarrow \quad a_1 = b_1, \cdots, a_n = b_n.$$

用 A^n 表示 n 个 A 的积集 $A \times A \times \cdots \times A$（$n>0$）。

若 $R \subseteq A \times B$，则说 R 是 A 到 B 的关系。若 $R \subseteq A^n$，则说 R 是 A 上的 n 元关系。A 上的一元关系就是 A 的子集。

A 上的二元关系 $R(\subseteq A \times A)$ 若具有以下三条性质，就叫做 A 上的等价关系。

1° 自反性：对任意 $x \in A$，$(x,x) \in R$。

2° 对称性：对任意 $x, y \in A$，

$$(x,y) \in R \quad \Rightarrow \quad (y,x) \in R.$$

3° 可递性：对任意 $x, y, z \in A$，

$$(x,y) \in R \text{且} (y,z) \in R \quad \Rightarrow \quad (x,z) \in R.$$

若 R 是 A 上的等价关系，且 $(a,b) \in R$，则说 a 和 b 等价，记

作$a\sim b$。A中和$a(\in A)$等价的所有元素形成的集叫做由a形成的R等价类，记作

$$[a]=\{x|x\in A,x\sim a\}.$$

不同的等价类之间没有公共元素，所以A上的任何等价关系R都确定了A的一个分类。

设R是A上的等价关系，我们把所有R等价类的集叫做商集，记作A/R。

设f是集X到集Y的一个关系（即$f\subseteq X\times Y$）。如果f还满足条件：对任意$x\in X$，有且仅有一个$y\in Y$使$(x,y)\in f$，那么我们说f是从X到Y的函数或映射，记作$f:X\to Y$；这时若$(x_0,y_0)\in f$，则说y_0是x_0的象，x_0是y_0的原象，并写$x_0\mapsto y_0$，或写$y_0=f(x_0)$。X叫做f的定义域。X中元素在Y中的象的全体是Y的一个子集，叫做f的值域。若f的值域就是Y，则把f叫做从X到Y的满射。

如果映射$f:X\to Y$满足对任意x_1，$x_2\in X$都有

$$x_1\neq x_2 \quad\Rightarrow\quad f(x_1)\neq f(x_2),$$

则把f叫做从X到Y的单射。

如果$f:X\to Y$既是单射又是满射，则叫做从X到Y的双射。此时我们说X与Y之间存在着一一对应，或者说X与Y等势，也说X与Y有相同的基数。这时，f的逆映射f^{-1}：$Y\to X$也是双射。（f^{-1}是f的逆映射，意思是f^{-1}满足：$f^{-1}(y)=x\Leftrightarrow f(x)=y$。）

若存在双射$f:X\to Y$和双射$g:Y\to Z$，则它们的复合映射$g\circ f$：$X\to Z$也是双射（复合映射$g\circ f$由下式定义：$g\circ f(x)=g(f(x))$）。

0.2 Peano自然数公理

按照“一切能证明的都要证明”这一想法，证明关于自然数

的命题，通常采用下面的 Peano 自然数公理（公理 1 —公理 5 ）作为出发点.

我们把自然数集 N 看成是满足以下五条公理的集.

公理 1 $0\in N$。

公理 2 **若** $x\in N$，**则** x **有一个后继** $x'\in N$。

公理 3 **对任意** $x\in N, x'\neq 0$。

公理 4 **对任意** $x_1, x_2\in N$，**若** $x_1\neq x_2$，**则** $x'_1\neq x'_2$。

公理 5 **设** $M\subseteq N$。**若** $0\in M$，**且当** $x\in M$ **时也有** $x'\in M$，**则** $M=N$。

五条公理中含有两个没有给出定义的概念：0 和后继. 公理 3 的意思是：0 是自然数集的开头元素，而不是任何自然数的后继. 公理 4 是说，不同的自然数有不同的后继. 公理 5 就是归纳法原理. 根据公理 5，要证明 N 的子集 M 与 N 相等，先证 $0\in M$，然后作归纳假设 $x\in M$，由此来证明 $x'\in M$ 便可. $0'$ 记作1，$0''$ 记作 2，….

由以上五条公理出发，定义自然数的加法、乘法等运算以及序的概念，便能证明关于自然数性质的一系列结论，例如，"非空的自然数集一定含有该集的最小数"等等. 在自然数理论的基础上，可进一步建立起有理数、实数和复数的理论.

下面来证明一个常用的结论.

定理（强归纳法） 假设与自然数 n **有关的命题** $P(n)$ **满足以下两个条件：**

$1°$ $P(0)$ **成立，**

$2°$ **若** $k<m$ **时** $P(k)$ **都成立，则** $P(m)$ **也成立，**

那么 $P(n)$ **对所有自然数** n **都成立.**

证 只要证明下面的集合 S 是空集就可以了：

$$S=\{n\mid P(n)\text{不成立}\}.$$

假设 $S\neq\phi$，那么 S 必含有它的最小数. 设 S 的最小数是 m. 因 $m\in S$，故由 S 的定义知 $P(m)$ 不成立. 又已知 $P(0)$ 成立（条件

1°)，所以必有$m>0$。注意m在S中是最小的，故当$k<m$时，必有$k\notin S$，从而$P(k)$一定成立。再由已知条件2°知$P(m)$成立。但前面知$P(m)$不成立，矛盾。**证毕。**

作为一例，下面用强归纳法来证明不等式：

$$\mathrm{p}_n\leqslant 2^{2^n},\quad n\in\mathrm{N}$$

其中p_n表示第n个素数：$\mathrm{p}_0=2, \mathrm{p}_1=3, \cdots$.

$n=0$时，$\mathrm{p}_0=2\leqslant 2^{2^0}$.

$n>0$时，

$$\begin{aligned}\mathrm{p}_n&\leqslant \mathrm{p}_0\mathrm{p}_1\cdots\mathrm{p}_{n-1}+1 && \text{（理由下面说明）}\\ &\leqslant 2^{2^0}\times 2^{2^1}\times\cdots\times 2^{2^{n-1}}+1 && \text{（用了归纳假设）}\\ &=2^{(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})}+1=2^{(2^n-1)}+1\\ &=\frac{2^{2^n}+2}{2}\leqslant 2^{2^n}.\end{aligned}$$

上面第一步不等式$\mathrm{p}_n\leqslant \mathrm{p}_0\mathrm{p}_1\cdots\mathrm{p}_{n-1}+1$成立的理由是：$\mathrm{p}_0\mathrm{p}_1\cdots\mathrm{p}_{n-1}+1$的素因子不能是$\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1, \cdots, \mathrm{p}_{n-1}$中的任何一个，而只能$\geqslant \mathrm{p}_n$（注意用$\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1, \cdots, \mathrm{p}_{n-1}$分别去除$\mathrm{p}_0\mathrm{p}_1\cdots\mathrm{p}_{n-1}+1$，所得的余数都是1）。强归纳法所要求的条件1°与2°都得到满足，故原不等式对任何自然数n都成立。

0.3 可数集

熟悉集论的读者可略去此节。

有限集，是指空集或与$\{0,1,\cdots,n\}$等势的集。

可数集，是指与自然数集N等势的集。换句话说，一个集合是可数集，当且仅当它的全部元素可形成不重复的无限序列。可数集彼此互相等势；与可数集等势的集也是可数集。自然数集N当然也是可数集。

命题 1　可数集的无限子集也是可数集。

证 设无限集$B\subseteq A$，且设A是可数集．A的全部元素形成不重复的无限序列：$a_0,a_1,a_2,\cdots$．在这个序列中，B的全部元素形成了不重复的无限子序列：$a_{n_0},a_{n_1},a_{n_2},\cdots$，所以$B$也是可数集．**证毕．**

命题 2 若存在无限集B到可数集A的单射，则B为可数集．

证 记B到A的单射为f，设f的值域为$C(\subseteq A)$．$f:B\to A$为单射，而$f:B\to C$则为双射．B是无限集，C也是无限集．由命题1，C作为A的无限子集是可数集．B与C等势，所以B也是可数集．**证毕．**

命题 3 1° **若A可数且B非空有限或可数，则$A\times B$和$B\times A$都可数．**

2° **若$A_1,\cdots,A_n$中至少有一个可数而其它为非空有限或可数，则$A_1\times\cdots\times A_n$可数．**

证 1° 设$A=\{a_0,a_1,a_2,\cdots\}$，$B=\{b_0,b_1,\cdots,b_n\}$或$B=\{b_0,b_1,b_2,\cdots\}$．作映射$f:A\times B\to\mathrm{N}$，使$f(a_i,b_j)=2^i3^j$．于是f是单射（当$i\neq k$或$j\neq l$时总有$2^i3^j\neq2^k3^l$）．由命题2知$A\times B$可数．类似可知$B\times A$也可数．

2° 对n归纳，利用1°的结论便可．**证毕．**

命题 4 若A可数，且若B有限或可数，则$A\cup B$也可数．

证 设$A=\{a_0,a_1,a_2,\cdots\}$．

情形1 B为有限集．此时设$B=\{b_0,b_1,\cdots,b_n\}$（$B=\phi$时$A\cup B=A$）．若$A\cap B=\phi$，则$A\cup B$的全部元素形成不重复的无限序列，

$$a_0,b_0,a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n,a_{n+1},a_{n+2},\cdots,$$

所以是可数集．若$A\cap B\neq\phi$，则令$B_1=B-A$．这时$B_1\cap A=\phi$，故$A\cup B_1$为可数集，而$A\cup B=A\cup B_1$．

情形2 B为可数集．设$B=\{b_0,b_1,b_2,\cdots\}$．若$A\cap B=\phi$，则$A\cup B$的全部元素形成不重复的序列$a_0,b_0,a_1,b_1,\cdots$．若$A\cap B\neq\phi$，记$C=B-A$，则$C\subseteq B$，$A\cap C=\phi$且$A\cup B=A\cup C$．这时当

C 为有限集时，$A\cup C$可数（属情形 1），因而$A\cup B$可数；当C为无限集时，由命题 1 知C可数，且因$A\cap C=\phi$，故 $A\cup C$（从而$A\cup B$）可数。**证毕。**

命题 5　若 $A_1,\cdots,A_n$ 中至少有一个可数，而其它为有限或可数，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 也可数。

证　对 n 归纳，用命题 4 便可。**证毕。**

命题 6　若每个A_i 有限或可数，且 $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A_i$ 是无限集，则 $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A_i$ 可数。

证　当A_i 为有限集时，设 $A_i=\{a_{i0},\cdots,a_{in}\}$；当$A_i$为可数集时，设$A_i=\{a_{i0},a_{i1},a_{i2},\cdots\}$。分以下两种情形来证明。

1°　如果不同的A_i之间没有共同元素，即当$i\neq j$时 $A_i\cap A_j=\phi$，就令$f(a_{ij})=2^i3^j$，这样得到的f：$\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A_i\to \mathrm{N}$ 是单射，利用命题 2 便可。

2°　如果某些不同的A_i之间有共同元素，则作出一列新的集$A'_0,A'_1,A'_2,\cdots$，作的过程是：

$$A'_0=A_0,A'_1=A_1-A_0,\cdots,\ A'_n=A_n-\bigcup_{i=0}^{n-1}A'_i,\cdots.$$

这样当$i\neq j$时，$A'_i\cap A'_j=\phi$，由1°知$\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A'_i$是可数集，而$\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A_i=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A'_i$。**证毕。**

命题 7　若A为可数集，则 $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A^i$ 也为可数集。（这里规定$A^0=\{\phi\}$。）

证 由命题3知每个 $A^i\ (i>0)$ 为可数集，再用命题6便可。**证毕。**

命题 8 若 A 可数，则所有由 A 的元素构成的有限序列形成的集 B 也可数。

证 对任一由 A 的元素构成的有限序列 $a_{i_1},\cdots,a_{i_n}$，令

$$f(a_{i_1},\cdots,a_{i_n})=(a_{i_1},\cdots,a_{i_n})\in A^n.$$

这样的 $f:B\to\bigcup_{i=0}^{\infty}A^i$ 是单射。B 是无限集，由命题2知 B 可数。**证毕。**

有没有不可数的无限集呢？

根据下面的Cantor定理，自然数集N的幂集 $\mathscr{P}(\mathrm{N})$ 就是不可数的无限集的一个例子。

定理（Cantor） 集 A 和 A 的幂集 $\mathscr{P}(A)$ 不等势。

证。假设 A 与 $\mathscr{P}(A)$ 等势，即存在双射 $f:A\to\mathscr{P}(A)$。作一集

$$B=\{a\in A\,|\,a\notin f(a)\}.$$

注意 $f(a)$ 是 $\mathscr{P}(A)$ 的元素，A 的子集。因 B 也是 A 的子集，故 $B\in\mathscr{P}(A)$。f 是满射，必然存在 B 在 A 中的原象 b，使 $f(b)=B$。这时有两种可能：$b\in B$ 或 $b\notin B$。但按 B 的定义都会导致矛盾：

$$b\in B\ \Rightarrow\ b\notin f(b)=B;$$

$$b\notin B\ \Rightarrow\ b\in f(b)=B.$$ **证毕。**

集 $R\subseteq A^n$ 叫做 A 上的 n 元关系。R 的特征函数 $C_R: A^n\to\{0,1\}$ 是由下式定义的：

$$C_R(a_1,\cdots,a_n)=\begin{cases}1, & (a_1,\cdots,a_n)\in R,\\ 0, & (a_1,\cdots,a_n)\notin R.\end{cases}$$

函数 $f:\mathrm{N}^k\to\mathrm{N}$ 叫做 k 元数论函数。

以下是不可数无限集的例子。

（1）N上所有二元关系的集 $\mathscr{P}(\mathrm{N}^2)$ 不可数。

（2）N上所有 n 元关系的集 $\mathscr{P}(\mathrm{N}^n)$ 不可数。

（3）N的子集的特征函数的全体构成的集F_c是不可数集。这是因为，N的不同子集有不同的特征函数，故存在双射f：$\mathscr{P}$(N)→F_c，而$\mathscr{P}$(N)是不可数集。

（4）所有一元数论函数的集不可数（因为不可数集F_c是它的无限子集），进而知所有数论函数的集不可数。