

实验误差与数据处理

滕敏康 主 编
潘元胜 万春华 童梅琳 编

南 京 大 学 出 版 社

1989 · 南京

内 容 提 要

实验误差与数据处理在实验物理教学和科学研究中都占有十分重要的地位,并得到广泛的应用。本书将普通物理实验、近代物理实验、专业实验和科研中所需的有关知识结合在一起,深入浅出地、系统地、分阶段地作了介绍。1~3章介绍了低年级学生普通物理实验教学中必不可少的实验误差与数据处理知识,4~9章则作了较深入系统的介绍。为配合数据处理应用的需要,在本书附录中备有若干常用的数据处理用子程序,可供查用。本书适于大专院校师生及有关人员参考。

实验误差与数据处理

滕敏康 主 编

潘元胜 万春华 童梅琳 编

*

南京大学出版社出版

(南京大学校内)

江苏省新华书店经销 江苏丹阳第二彩印厂印刷

1989年9月第1版 1989年9月第1次印刷

开本 787×1092 1/32 印张 10.875 字数 242千

印数 1—4000

ISBN 7-305-00394-8

O·23

定价: 2.25元

前 言

实验误差与数据处理在实验物理教学和科学研究中都占有十分重要的地位，并得到广泛的应用。特别是随着科学技术的发展和计算机应用的普及，实验误差与数据处理工作的必要性和可能性更加突出了。因此，在高等院校的物理实验教学中越来越多地增加这方面能力的训练和培养。在普通物理实验、近代物理实验、各专业实验和毕业论文教学中，都广泛地应用了实验误差与数据处理的知识。为此，很需要有一本能全面配合高等院校物理教学各个环节使用的有关实验误差与数据处理的书籍。本书较紧密地与实验物理教学相配合。它是在原有讲义基础上，参考其他有关资料编写而成的。

本书的编写作了如下考虑：第一至第三章介绍了低年级学生普通物理实验教学中必不可少的实验误差与数据处理知识，由于他们尚未学完高等数学和线性代数，因此，只能是深入浅出地描述性介绍，较少数学推导。而在第四至第九章中，则较深入地、系统地介绍实验误差与数据处理知识。第四至第九章可以安排在二年级下或三年级上用讲课形式授课，这样可以让学生在近代物理实验教学中广泛地应用已经学到的知识，并为毕业论文和日后的科学研究工作打好基础。为配合数据处理应用的需要，在本书附录中有若干常用的数据处理用子程序可查用。

全书由滕敏康主编并负责定稿。第一章由万春华编写，

第二、三章由潘元胜编写，第四、五、六、九及附录由滕敏康编写，第七、八章由滕敏康、童梅琳合编。

由于编写者水平有限，错误和不妥之处恳请读者指正。

编 者

1988 年 10 月于南京

目 录

第一章 物理实验基础知识	1
第一节 物理实验的基本方法	1
一、比较法	1
二、放大法	2
三、补偿法	5
四、转换法	10
五、模拟法	16
六、量纲分析法	18
第二节 物理量的测量和测量误差	20
一、真值、测量值和误差的定义	20
二、测量和测量结果的评价	21
三、误差的分类及产生原因	22
四、误差的估算	24
第三节 有效数字的基本知识	28
一、关于有效数字的几个概念	29
二、有效数字和测量结果的关系	30
三、有效数字的运算规则	31
第四节 物理实验中常用的数据处理方法	34
一、列表法	34
二、作图法	34
三、累加法	38
四、分组逐差法	38
五、经验公式拟合方法	40

六、插值法计算数值	44
七、列表计算微积分数值	50
第二章 物理测量的随机性与随机变量的分布	54
第一节 物理测量的随机性	54
第二节 随机变量与概率密度函数	56
第三节 随机变量的数字特征	59
一、数学期望 (均值、期待值)	60
二、总体方差	61
第四节 常见的分布函数及数字特征	64
一、二项式分布	65
二、泊松分布	65
三、正态分布 (高斯分布)	66
第三章 等精度测量下随机误差的估算	79
第一节 物理量真值的估值——算术平均值	80
一、算术平均值的分布	80
二、算术平均值是真值的最佳估值	81
第二节 方差的估值	83
第三节 置信度和置信区间	84
一、正态分布在方差 σ^2 已知情况下的置信度和 置信区间的确定	85
二、在测量次数较少情况下置信区间的计算	86
第四节 随机误差和测量结果的表示方法	89
一、待测量真值的估值 $\hat{a}$	90
二、各种误差表示的介绍	90
三、均方根差的估值	92
四、对测量结果容易产生的错误理解	94

第四章 不等精度测量下误差的处理.....96

第一节 估值的评选标准.....97

一、无偏性97

二、一致性99

三、有效性 100

四、充分性 102

第二节 最大似然估计法..... 103

一、似然函数 103

二、最大似然估计值 104

三、求最大似然估计值的方法 104

第三节 权的概念和加权算术平均值..... 106

第四节 方差的估算..... 110

一、加权平均值的方差 110

二、单位权及其方差估算 112

第五节 单因素试验的数据处理..... 117

一、分组数据的处理 118

二、三类情况下的计算公式 122

三、例题 124

第五章 系统误差..... 127

第一节 系统误差的性质及其特征..... 127

一、固定误差 128

二、线性误差 128

三、多项式误差 129

四、周期性误差 129

五、复杂规律误差 129

第二节 发现系统误差的方法..... 131

一、一些简单的检验系统误差的方法 131

二、分布检验方法 139

三、两组测量值间是否有系统误差的检验	146
四、多组测量值间是否有系统误差的检验	155
第三节 减小和消除系统误差	159
一、从产生系统误差的根源上消除	159
二、引入修正项消除系统误差	160
三、采用能消除系统误差的方法进行测量	160
四、系统误差消除的准则	165
 第六章 误差的合成与分配	167
第一节 间接测量的误差处理	168
一、间接测量中系统误差计算	169
二、间接测量中随机误差计算	171
三、协方差与相关系数	173
第二节 随机误差的合成	179
第三节 系统误差的合成	179
一、确定的系统误差的合成	181
二、不确定的系统误差的合成	181
第四节 系统误差与随机误差的合成	182
第五节 误差分配和分析	185
一、误差分配	185
二、误差分析	190
三、误差分析的一个实例	192
 第七章 用最小二乘法作参数估计	198
第一节 最小二乘原理	199
一、最小二乘准则	199
二、最小二乘法与最大似然法	201
第二节 线性参数的最小二乘估计	202
一、直线方程	202

二、一般线性参数	207
三、最小二乘估计的统计性质	210
四、两个变量都具有误差时的直线拟合	219
第三节 非线性参数的最小二乘估计	222
一、可化为线性拟合方程的非线性参数估计	222
二、非线性参数估计的一般处理方法	229
第八章 用多项式拟合曲线	234
第一节 多项式拟合曲线	235
第二节 测量数据的光滑处理	239
一、五点二次光滑公式的推导	239
二、其他一些光滑公式	244
三、光滑公式应用实例	246
第三节 多项式拟合阶数的选取	249
一、拟合方程的方差分析及显著性检验	250
二、多项式拟合阶数的选取	253
第四节 正交多项式族的应用	257
一、曲线拟合中正交多项式族的使用	257
二、正交多项式族的构成	260
三、自变量等间距变化的直线方程计算	263
四、自变量等间距变化时多项式拟合计算	266
第九章 可疑测量值的舍弃	271
第一节 拉依达准则	273
第二节 t 检验准则	276
第三节 肖维勒准则	279
第四节 格拉布斯准则	282
第五节 狄克逊准则	284

附录一 部分公式和性质的证明	293
一、均方根差 σ 值的几何意义	293
二、标准偏差 s 的均方根差	294
三、发现系统误差的秩和检验法公式的证明	295
四、用矩阵求导法推导正规方程的矩阵表示式	296
五、最小二乘残差平方和 R 的统计性质	297
六、方差分析中交叉项为零的推导	301
七、偏拟合平方和 P_k 计算公式的推导	302
附录二 系统误差和随机误差的异同点	304
附录三 几种常用分布的基本性质	305
一、 χ^2 分布	305
二、 t 分布	307
三、 F 分布	312
附录四 几种常用数据处理的计算机子程序	315
一、拉格朗日插值子程序	315
二、定步长辛卜森 1/3 法则求积分子程序	316
三、最小二乘直线方程拟合子程序	318
四、最小二乘曲线拟合子程序	321
五、五点三次光滑子程序	323
附表 1 标准正态分布概率密度函数表	326
附表 2 正态分布函数表	327
附表 3 χ^2 分布概率积分表	329
附表 4 t 分布概率积分表	330
附表 5 F 分布概率积分表	331
附表 6 正交多项式表 ($k \leq 5, n \leq 9$)	333
参考资料	335

第一章 物理实验基础知识

第一节 物理实验的基本方法

物理实验包括在实验室人为再现自然界的物理现象、寻找物理规律和对物理量进行测量三个部分。因此，物理实验与物理量测量虽然不是一回事，却有着紧密的联系。在任何物理实验中，几乎都要对物理量进行测量，故人们有时也把物理量测量称为物理实验，而且把具有共性的测量方法综合起来，叫做物理实验方法。下面介绍几种常见的物理实验方法。

一、比较法

比较法是物理量测量中最普遍、最基本的测量方法，它是将被测量与标准量具进行比较而得到测量值的。比较法可分为直接比较和间接比较两类。

直接比较是将被测量与同类物理量的标准量具直接进行比较。这就要求事先制成很多供比较用的标准量具，如砝码、直尺、角规等，它们被赋与标准量值，供比较使用。

有些物理量难于制成标准量具，因而先制成与标准量相关的仪器，再用这些仪器与待测量进行比较，这种仪器可称为量具，比如温度计、电表等均是量具。

有时，光有标准量具还不够，还要配置比较系统，使被测量和标准量能够实现比较。比如只有标准电池还不能测电压，

还需要由比较电阻等附属装置组成电位差计来测电压，这些装置便称为比较系统。

还可以将被测量转换为能进行比较的另一种物理量再进行比较，比如用李萨如图形测电信号频率就是先将信号输入示波器转换为图形后，再由标准信号求出被测信号之频率。

在测量中常用的代替法、置换法，其实也是比较法的一种，它的特点是异时比较。

实际上，所有测量都是将待测量与标准量进行比较的过程，只不过比较的形式不都那么明显而已。

二、放大法

在测量中，有时由于被测量过分小，以至无法被实验者或仪表直接感觉和反映，那么可以先通过某种途径将被测量放大，然后再进行测量。放大被测量所用的原理和方法便称为放大法。

一般的物理量测量，最后往往都归结为长度或角度的测量，所以长度和角度的放大是放大法的主要内容。

(一) 光杠杆法测微小长度变化

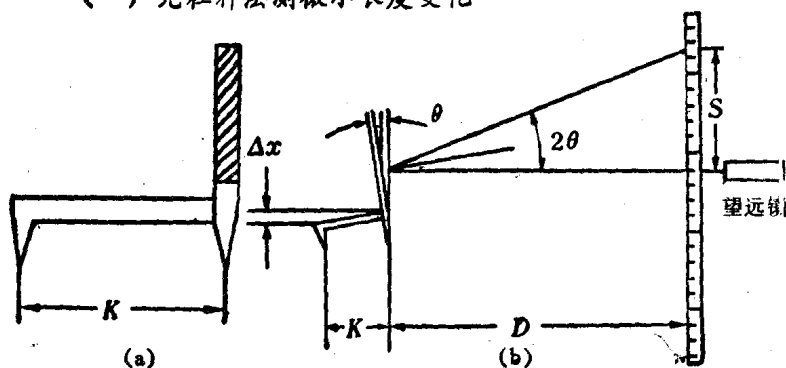


图 1-1

图 1-1(a) 是光杠杆, 一个小平面镜装在三足架上, 小平面镜与两前足共面, 后足与待测物联结在一起, 当后足随被测物一起上升或下降微小距离 Δx 时, 镜面将转过一个 θ 角, 如图 1-1(b)。若用望远镜从平面镜中观察米尺的像, 则发现叉丝读数变化了 2θ 角所对应的距离 S 。设光杠杆后足到前足连线距离为 K , 则有

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta x}{K}$$

又从图 1-1(b) 得

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{S}{D}$$

当 Δx 变化很小时, θ 很小, 于是有近似关系

$$\theta \approx \frac{\Delta x}{K} \quad 2\theta \approx \frac{S}{D}$$

可得

$$\Delta x = K \cdot \frac{S}{2D}$$

于是难于测量的微小量 Δx , 被放大为 S 的测量。

定义 $E = \frac{S}{\Delta x} = \frac{2D}{K}$

为光杠杆系统的放大倍数。增加 D 和减小 K 均可提高装置的灵敏度, 但减小 K 势必会导致 θ 变大, 从而破坏了近似条件, 这种方法并不可取。

(二) 用镜尺法测微小角度

图 1-2 是用平面镜和直尺组成的镜尺系统, 可以将微小角度放大, 然后还可以转化为长度测量。光点式悬线电表就是用此方法来测量角度的。将平面镜 M 与待测系统联结在一起, 当它们一起转动了 θ 角时, 来自某处的入射光线被镜面反射后, 偏离了 2θ 角, 于是物体转动角度被放大了两倍。而且, 还可将角度的测量转换成长度的测量。由图 1-2

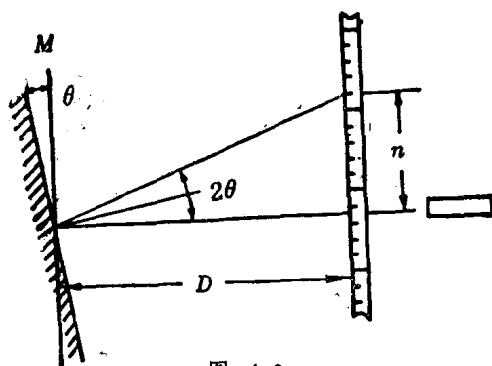


图 1-2

得
$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{n}{D}$$

角度 θ 的测量变成 n 的测量。 D 越长, n 的有效读数越大, 测量的精度越高。

为了在有限的空间获得较大的镜尺距离 D , 可以采取多次反射法: 在尺的位置上再用镜面反射, 将反射光射回平面镜 M , 再反射到镜尺上。常用的复射式光点检流计就采用这一原理。

(三) 视角放大法

正常人的眼睛能够分辨的角度视角是 0.00157° , 它在明视距离 (约 25cm) 所对应的长度约为 0.07mm, 小于这个距离的图样细节人眼不能分辨, 不管多么复杂的图样都将被看成是一个点。为了提高人眼分辨细节的能力, 可将图形对人眼的张角加以放大。比如放大镜、显微镜和望远镜等均为放大视角的仪器。由于这些仪器只是在观察中放大视角, 并不是实际尺寸的变化, 所以并不增加误差, 因而许多精密仪器都在最后的读数装置上加一个视角放大设备以提高测量精度。

(四) 螺旋放大

螺旋测微计和读数显微镜都是用螺旋放大法进行精密测量的。将与被测物关联的测量尺面与螺杆连在一起,螺杆尾端加上一个圆盘,称为轮盘,如图 1-3 所示。设其边缘等分刻成

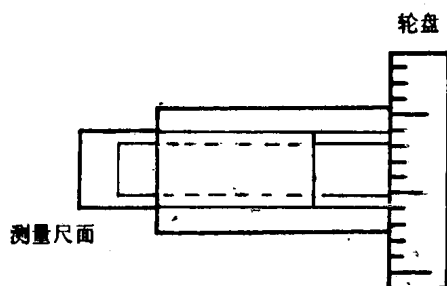


图 1-3

50 格,轮盘每转一圈,恰使测量尺面移动 $h = 0.5 \text{ mm}$,那么轮盘转动一小格,尺面移动了 0.01 mm 。若轮盘尺寸制得大些,比如轮盘外径 $D = 16 \text{ mm}$,则周长 $L = \pi D \approx 50 \text{ mm}$,每一格的弧长相当于 1 mm 的长度,也就是说当测量尺面移动 0.01 mm 时,在轮盘上变化了 1 mm ,于是微小位移被放大了。

放大倍数

$$E = \frac{\pi D}{h} = \frac{50 \text{ mm}}{0.5 \text{ mm}} = 100$$

这种装置精度提高了 100 倍。

电学实验中,电流、电压放大之后再测量的例子很多,在此从略。

三、补偿法

补偿法在实验中常被使用,它的定义如下:某系统受某种作用产生 A 效应,受另一种同类作用产生 B 效应,如果由于

B 效应的存在而使 A 效应显示不出来,就叫做 B 对 A 进行了补偿。补偿方法大多用在补偿测量和补偿法校正系统误差两个方面。

(一) 补偿测量

设某系统中 A 效应的量值为被测对象,但由于物理量 A 不能直接测量或难于测准,就用人为方法制造出一个 B 效应与 A 补偿,制造 B 效应的原则是 B 效应的量值应易于测量或已知。于是用测量 B 效应量值的方法求出 A 效应的量值。

我们常见的测力方法,比如天平、弹簧秤等都是采用了最简单的补偿法,因为测量时总是人为施力于系统使之与待测力达到平衡,也就是与待测力补偿从而求得待测力的。

完整的补偿测量系统由待测装置、补偿装置、测量装置和指零装置组成。待测装置产生待测效应,要求待测量尽量稳定,便于补偿。补偿装置产生补偿效应,要求补偿量值准确达到设计的精度。测量装置可将待测量与补偿量联系起来进行比较。指零装置是一个比较系统,它将显示出待测量与补偿量比较的结果。比较方法可分为零示法和差示法两种。零示法称完全补偿,差示法称不完全补偿。人们一般都采取零示法,这是因为人的眼睛对刻线重合比刻线不重合而估读的判断能力要高出许多,从而可以提高补偿精度。

补偿测量应用广泛,下面举几个常见的范例。

1. 电位差计

电位差计是测量微小电压和电动势的装置,其特点是精度很高,UJ-24型电位差计精度为 10^{-6} V。

如果用电压表测量电压,因电压表自身的分流作用总会改变原来电路的参量,因而会产生误差;用电位差计测量电压时,对原电路没有影响,所以用来测量电动势更为优越。

图 1-4 是电位差计原理电路, E_x 为被测电动势, E_s 为标准电池, 作为补偿装置。 R_x 、 R_s 是标准电阻, 做比较电阻, 它连同电源 E 、可变电阻 R_p 构成测量装置, 检流计 G 以及 R_g 、 K_g 组成指零装置。

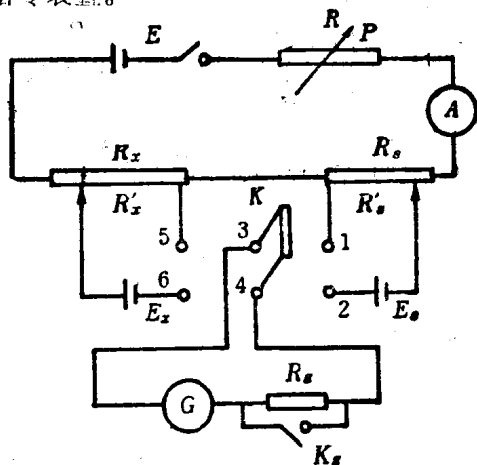


图 1-4

当由 R_p 调节的电流 I 流过 R_x 、 R_s 时, 在其上便产生电压, 引出一部分与 E_s 和 E_x 补偿, 首先将双向双掷开关掷向 E_s 一侧, R_s 、 E_s 、指零装置组成一回路, 调节 R'_s 使检流计中无电流显示, 于是 R'_s 上的电压 V_s 与 E_s 补偿, 即 $V_s = E_s$ 而 $V_s = IR'_s$, 即 $E_s = IR'_s$ 。再将 K 掷向 E_x 一边, 在保证 I 不变的情况下, 调节 R'_x , 再使检流计中无电流显示, 于是 R'_x 上的电压 V_x 与 E_x 补偿, $V_x = IR'_x$ 。

比值
$$\frac{E_x}{E_s} = \frac{V_x}{V_s} = \frac{IR'_x}{IR'_s}$$

得
$$E_x = \frac{R'_x}{R'_s} \cdot E_s$$

由于标准电池 E_s 和标准电阻 R'_x 、 R'_s 的精度都很高, 再