數學方法論叢書

SERIES ON MATHEMATICAL METHODOLOGY

Mathematical Proofs

數學證明

蕭文强 著

数学方法论丛书

数　学　证　明

萧文强　著

江苏教育出版社

1989·南京

数学方法论丛书
数学证明
萧文强 著

出版发行：江苏教育出版社
（南京中央路165号，邮政编码：210009）
经　销：江苏省新华书店
印　刷：镇江前进印刷厂
（镇江迎江路43号，邮政编码：212002）

开本850×1168毫米　1/28　印张 6.625　字数 142,000
1990年7月第1版　1992年3月第2次印刷
印数 2,501—7,530册

ISBN 7—5343—1097—0

G·968　定价：2.40元

出 版 说 明

如大家所知，数学方法论作为研究数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问，已有很长的历史，而且内容极为丰富。16世纪以来，如笛卡尔(Descartes)、莱布尼兹(Leibniz)、庞加莱(Poincaré)、克莱因(Klein)、希尔伯特(Hilbert)和阿达玛(Hadamard)等著名学者，都有过这方面的论著和发表过这方面的精辟见解。就近现代而言，以著名的美籍匈牙利数学家波利亚(Polya)为例，他曾以数十年的时间从事数学方法论的研究，出版了一系列论著，并被译为多种文字，受到全世界的普遍重视，被誉为第二次世界大战后出现的经典著作之一。在我国，也有许多学者在各种不同的场合屡次指出：要在数学教材与教学过程中，注意对形成数学概念的认识过程的分析，努力教给学生以寻找真理和发现真理的手段，特别是我国数学家徐利治教授，他先后到过苏联、联邦德国、美国、加拿大和保加利亚等国进行学术交流，结合国内实际情况研究了世界数学的历史和现状，深感在教学与科研领域中，有大力提倡数学方法论的必要。在他的倡议下，我国一些理工科大学和师范院校相继开设了数学方法论选修课，出版界也出版了一些这方面的专著和通俗读物，这无疑是一个令人鼓舞而又富于开创性的发展趋势。然而总的说来，在现今的数学教育与数学教学过程中，主要的倾向还是偏重逻辑思维能力的训练，对于如何教给学生以寻找真理和发现

真理的本领不够重视，在一定程度上低估了发散思维的训练在智力开发中的作用，以致不能较好地培养学生的创造能力。

上述情况表明，我们仍需大力提倡数学方法论的研究，并应把数学方法论应用到中学与大学的数学教育实践中去。特别是，我国现今正处在四个现代化建设和数学教学改革的新时期，这就急需培养出一支高水平的、庞大的科技队伍，而尤其急需造就一支高水平的、庞大的数学教师队伍，因为这是我国能否建成科技大国的关键。正是为了适应这一形势的需要，我社自 1986 年初就开始酝酿和筹备出版《数学方法论丛书》（以下简称《丛书》），并拟请徐利治教授主持此项工作。此举得到了当时正在美国访问讲学的徐利治教授的赞同。全国各地的有关专家、教授也很支持此项工作，纷纷承担《丛书》编写任务。1987年 4 月，我社与徐利治教授等充分磋商，组建了《丛书》编辑委员会与特聘顾问。我们深信，在《丛书》的全体编委的共同努力下，一定能在高水平和高质量的基础上出版好这一套《丛书》，我们也由此而希望，这套《丛书》的出版，能在我国数学教学改革和培养人材的事业中有所贡献。

《丛书》共分三个档次，除了少数几本属于高档次的专著之外，其他两个档次主要面向中学教师、大专院校学生、研究生和一般数学爱好者。无疑，《丛书》中的大部分题材，对于使用数学工具的科技工作者来说也是有启发性的。

限于水平，在《丛书》的编辑和出版过程中，难免会有缺点和差错。热切希望数学教育界人士和广大读者多多批评指正。

江苏教育出版社

1988年1月

序　言

有一则关于18世纪瑞士数学家欧拉（Euler）的“小道新闻”，经由贝尔（Bell）的通俗读物《数学家的故事》而广为流传。那是叙述欧拉与法国哲学家狄德罗（Diderot)辩论的经过。据云俄罗斯女皇对狄德罗在她的宫廷内散播无神论极为不满，但又不便面斥，便请欧拉想个办法把他赶走。有一天，狄德罗应邀进宫听一位数学家证明神的存在，他欣然前往。那时欧拉走到他的跟前，一本正经地以严肃而郑重的口吻对狄德罗说：“尊贵的先生，$\frac{a+b^n}{n}=x$，故神存在。请回应吧！”狄德罗哑口无言，四周响起嘲弄的笑声，令他十分难堪，于是，他请求女皇准许他回法国去。这则“小道新闻”的可信程度极低，很难想像欧拉会说出这种无稽之谈的话来，但它却是一个生动的例子，说明什么叫做“恐吓证明法”(Proof by intimidation)！这种证明可谓一文不值，它既无核实作用，更无说明作用，只有迷信权威的人才会被这种证明吓唬住。

除了上述那种所谓证明可以不予理会以外，数学证明是一个十分有意思的话题，因此，我选了这个话题与读者一起探讨。本书所指的数学证明，意义是颇广泛的，读下去你便知道为什么我这么说了。以下十章的内容，请读者随自己口味选读，大部分章节内容是互相独立的，但总的脉络，可由目录窥见。每节对读者的数学背景知识的要求不尽相同，对一部分读者来说，某些节的内容或嫌过深，不易明白，甚至会出现不熟悉的术语。不过，若只求大致了解，那不会构成太大的障

碍。总的来说，只要具备中学程度数学的知识，应能看明白大部分数学内容；若具备大学程度的数学知识，应能看明白全部数学内容。

在序言里，让我说极少作者也会在序言里说的话，即是告诉读者这本书并不讨论什么！但不讨论的，绝对不表示不重要，只表示作者本人的无知。首先，这本书没有教读者怎样去证明数学定理，或者是证明数学定理有什么诀窍。我假定读者已经作过不少数学证明，对证明这项数学活动有一定程度的认识。其次，这本书也没有从逻辑的角度讨论何谓数学证明。要认真讨论这个技术味道很浓的问题，非我力能胜任，亦不符合这套《丛书》的编写宗旨。再其次，这本书也没有正面接触数学证明的哲学意义，虽然任何关于数学的哲学必须对数学证明有所交代。好了，作过上述的消极声明后，我应该补充说，要讨论数学证明，不可能完全避开上述的三个范围，因此读者在以下章节的字里行间还是会见到它们的影子。

读者会问：那么这本书究竟谈些什么？当我最初下笔的时候，我曾想过采用一个奇特的书名《证明乃证明乎？》。后来觉得那是标新立异，哗众取宠，也就打消了这个念头。写完后却想到另一个较贴切的书名，但由于冗长，也没采用，那是《从历史上的数学文献观看数学证明》。实际上，这个冗长的书名才比较如实地反映了本书的内容。这个构思其实潜伏了很久，正好借着写作本书予以整理。说来话长，15年前我在美国一所大学里教书，有一天系主任匆匆跑来告诉我有位同事跌伤了腿，得休养一段日子，要我代他的课。原来没有人愿担那门课。当时我是系里年资最浅的一员，“苦差”自然落在我的肩上！不过，焉知非福，这份“苦差”对我来说竟成了最好的学习机会更是影响了我对数学的整体看法，甚至使我对数学产生了更强烈的信念和热爱。为什么没有人愿担那门课呢？原来那门课

美其名为《数学欣赏》,实则是厌恶数学的人被逼修的数学课。它只是为了让学生取得足够的学分毕业(美国的大学教育主张通识教育,不论主修何科,规定学生必须选修若干文史科目与数理科目等等)。上课的第一天,150位学生劈头便嚷:"我又不需要使用数学,学它干什么?"顿时令我哑口无言!这促使我开始从一个不需要使用数学作为工具的人眼光去想这个问题。通过大量阅读与反覆思量,我认识到哲学的反思与历史的反思的重要,尤其从数学史获得不少启发,这就是我对数学史产生浓厚兴趣的原因。在1976年,我把自己当时一些犹未成熟的想法写成两篇文章,题为《厌恶数学的人的数学课》(Mathematics for math-haters,发表于International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 8,1977年,17—21页)和《数学发展史给我们的启发》(发表于《抖擞》双月刊,第17期,1976年,46—53页)。之后基于这些想法陆续写了一些文章,并撰写了一本小册子《为什么要学习数学——数学发展史给我们的启发》(学生时代出版社,1978年)。到了1984年重新整理自己的思想,写成了《历史、数学、教师》({History of [(Mathematics)} Teachers],原文没发表,法译文刊登于Bulletin de L'association des Professeurs Mathématigues,No354,1985年,304—319页),又在1986年写成《谁需要数学史》(发表于《数学通报》第四期,1987年,42—44页)。这两篇文章可说是我十年来学习与反思的汇报。就在这个时候,徐利治教授来函提及编写《数学方法论丛书》的计划,并问我愿不愿也写一本。这是一项非常有意义的计划,我虽自知能力有限,但觉得应该尽力支持,况且写书正是督促自己好好学习的机会。近代英国作家查斯特顿(Chesterton)说过:"值得干的事即使干不好也值得干(Whatever is werth doing is worth doing badly)。”本着这句话的精神，我答应了徐教授为《丛书》写一本。在这里我要向他道谢，给我这个学习的机会和一直给我的鼓励。不过，我错估了自己的工作效率与可供写作的时间，以致把交稿期限一拖再拖，谨在此向江苏教育出版社的何震邦先生和王建军先生衷心致歉，幸得两位编辑的体谅及帮助，我才能安心完成书稿。话虽如此，真正下笔那段日子，回想起来也是挺紧张的。在日常的教学及研究中挤出时间，一有空便埋首写作，大部分时间都磨在系里工作间。在这方面，我也得感激妻子凤洁及恒儿对我的体谅和支持。还有多位这些年来在数学及哲学问题上给我指点和提供资料的中外师友（包括那些只在书信往来上交流意见的朋友，甚至只曾读其书无缘当面讨教的作者），亦一并在此向他们表示谢意。

最后，我想提及几个本拟纳入写作计划结果却没有谈论的题材。第一个是机械化证明。最先引起我兴趣的是吴文俊教授著的《几何定理机器证明的基本原理》（科学出版社，1984年），后来蒙吴教授在1988年春寄赠文集（《吴文俊文集》，山东教育出版社，1986年），更被其主题吸引了。他说：“作为数学两种主流的公理化思想与机械化思想，对数学的发展都曾起过巨大的作用，理应兼收并蓄，不可有所偏废。”尤其他指出，中国古代数学，乃是机械化体系的代表，与古希腊数学之演绎推理典范，其实各具特色，各为数学发展作出了巨大的贡献。这点更增进了我的兴趣。与此有密切关系者是第二个题材，就是60年代后期由已故美国数学家比索（Bishop）倡导的构造性数学。比索继承了由克罗内克（Kronecker）至布劳维尔（Brouwer）诸人发展起来的数学哲学直观主义流派，但打破了前人仅限于批判经典数学的框架，指出经典数学并非无用而只是未臻完善，有待且可以进行数学上的修补。这也带引我们至第三个题材，即是数学的两种面目——理论

方面与算法方面，两者之间的关连与相互作用。这是很值得探讨的问题，在电子计算机介入数学领域后，这个问题显得更有意思也更趋迫切了。去年8月在匈牙利举行的第六届国际数学教育会议上，著名的匈牙利数学家罗维兹（Lovász）作了一个题为《算法化数学：旧事新谈》的大会报告，指出了算法思想将为数学教育带来新观点并产生影响。另一篇值得参考的文献是一个正反双方辩论的论坛，题为《算法方式顶呱呱！》（刊登于College Mathematics Journal，Vol. 16，1985年，2—18页）。第四个题材与前述三个还是有关的，就是算法的复杂性理论。讨论某种算法是否有效，对某种问题是否存在有效的算法。第五个题材是较近期的发展，叫做"零知识证明"(Zero-Knowledge Proof)，我还是在1986年夏天在美国柏克莱举行的国际数学家会议上初次听到的。说来像很玄妙，这种证明不把证明公布却仍能说服对方的确证明了命题！在电脑专家的圈子里，这是个热门话题。以上种种，都是我在构思期间、写作期间和学习过程中碰到的材料，但只能浅尝，未能深入理解。我总想找些时间多学一点，但至今办不到，只好把它们定作学习目标，继续探索吧。

数学上有种方法叫逐步逼近法，就是逐步接近解答。就某种意义来说，本书是运用这种方法进行了第一步逼近，写下了一些个人这些年来的学习笔记。还有更多有待学习和思考的问题，只好期诸来日。本书希望表达的一个主题，是学习与理解是连绵不断没有终结的过程，在写作期间我深切体会到这一点！未做的希望做下去，已做的现在摆出来，就是以下十章的内容。错漏自是难免，还望读者不吝赐教，指出这些错漏，批评斧正。

萧文强

1989年2月·香港

目录

序言
一 证明的由来……………………………………1
1.1 证明的作用是什么 …………………………2
1.2 数学证明的由来 ……………………………4
1.3 古代希腊的数学证明 ………………………5
1.4 证明方法不限于数学 ………………………7
1.5 东方古代社会的数学证明 …………………9
二 证明的功用……………………………………14
2.1 直观可靠吗 …………………………………15
2.2 证明可靠吗 …………………………………24
2.3 证明是完全客观的吗 ………………………28
2.4 证明与信念 …………………………………34
2.5 证明与理解 …………………………………40
三 证明与理解(一)………………………………46
3.1 一个数学认知能力的实验 …………………46
3.2 二次方程的解的公式 ………………………51
3.3 希腊《原本》里的勾股定理 …………………53
3.4 刘徽的一题多证 ……………………………55
3.5 高斯的一题多证 ……………………………60
四 证明与理解(二)………………………………66
4.1 欧拉的七桥问题 ……………………………66
4.2 欧拉的多面体公式 …………………………74
4.3 几个重要的不等式 …………………………82
五 证明与理解(三)………………………………90
5.1 一条关于正多边形的几何定理 ……………91
5.2 薄饼与三明治 ………………………………93
5.3 微积分基本定理 ……………………………96
5.4 舞伴的问题 …………………………………100
5.5 几个著名的反例 ……………………………101

目

录

六 证明与理解(四)…………………………111
6.1 四色问题 …………………………111
6.2 费尔玛最后定理 …………………………116
6.3 一致收敛的函数序列 …………………………119
七 反证法…………………………123
7.1 两个古老的反证法证明 …………………………123
7.2 间接证明与反证法 …………………………125
7.3 逆否命题 …………………………126
7.4 史坦纳—李密士定理 …………………………128
7.5 反证法在数学以外的运用 …………………………130
八 存在性证明…………………………132
8.1 两个头发根数相同的人 …………………………132
8.2 一条古老的存在性定理 …………………………135
8.3 数学乎？神学乎 …………………………136
8.4 高斯类数猜想的征服 …………………………138
8.5 存在性证明的功用 …………………………141
8.6 极值问题的解的存在性 …………………………144
8.7 有理数与无理数 …………………………147
8.8 代数数与超越数 …………………………148
九 不可能性证明…………………………153
9.1 十五方块的玩意 …………………………153
9.2 一个很古老的不可能性证明 …………………………156
9.3 古代三大难题 …………………………158
9.4 不可能证明的证明 …………………………162
9.5 希尔伯特的问题 …………………………167
十 一次亲身经历：最长周长的内接多边形…………………………173
10.1 一个熟悉的问题…………………………173
10.2 初步的试验结果…………………………175
10.3 旁敲侧击 …………………………176

10.4 艰苦战斗 …… …………………………178
10.5 拨开云雾见青天……………………………182
10.6 各归其位 …… …………………………184
10.7 余音未了 …… …………………………188

后记…………………………………………………191
外国人名索引………………………………………192

目

录

一 证明的由来

什么叫做证明，《辞海》是这样解释的："根据已知真实的判断来确定某一判断的真实性的思维形式。"

实际上，在日常生活里，我们常常不自觉地运用了"证明"。让我们来看两则出自《韩非子》里的故事。

狗猛酒酸

宋国有个卖酒的人，买卖公道，待客恭敬，酿酒醇美，酒帘醒目，但酒卖不出去，都变酸了。后来有位长者对店主说："是你的狗太凶猛啦！"原来，人家都怕店主的狗。有的人家让小孩子拿钱提壶来打酒，那只狗迎上去就咬人，谁还敢来呢？

这是混合采用了穷举法和演绎法。酒卖不出的原因本来可能有好几个，但经逐一排除，只剩下一个。再经推理，即导致合理的解释。

棘刺母猴

燕王供养了一位自称能在棘刺尖上雕母猴的卫国人，并想看他表演。谁料这客人只顾吃喝玩乐，还说若国王要看棘刺母猴，必须半年不进后宫，不喝酒，不吃肉，而且要待至雨停日出，似明似暗的一刹那才能看到。燕王拿他没法，只好一直供养他。后来有位铁匠对燕王说："我是打刀的，我知道刻东西需用小刀，而且刻的东西一定要比刀刃大方行。如果棘刺尖儿容纳不下刀刃，就不能在上面雕刻了。请国王瞧瞧客人的刻刀，不就知道他有没有说谎吗？"于是国王问客人取刻刀

看，客人藉辞回家取刀趁机溜走了！

这是采用了反证法。要在棘刺尖上刻母猴，必须有刀刃比棘刺尖儿还小的刻刀。如果没有这样的刀，便没法在棘刺尖上雕母猴了。

1.1 证明的作用是什么

上面的两则故事，看似平淡无奇，但与数学证明凭据的道理一般无异。不过，我们可以把数学上的证明描述得更为精确，就是以一些基本概念和基本公设为基础，使用合乎逻辑的推理去决定判断是否正确。

数学的判断，叫做命题。通常的命题是假言判断，即是肯定或否定对象在一定条件下具有某种属性的判断。它的一般形式是："若某对象具有性质A，则它亦具有性质B。"更简单一些，可写成"若A，则B。"这里的"若A"叫做命题的条件或前提，"则B"叫做命题的结论或终结。很多时，条件和结论并不是那么分明的。但若需要时，我们总可以把它写成那种标准形式。

例如，欧几里得（Euclid）的《原本》（Elements）卷一第十五条定理："两直线相交，它们所成的对顶角相等。"前一句是条件，后一句是结论。我们也可把它改写成："若两角成对顶角，则此两角相等。"就更像上面的形式了。有时，一个命题其实由几个命题组成，就像《原本》卷一第二十九条定理："两条平行线被第三条直线所截，则内错角相等、同位角相等，同旁内角互补。"这里包含三个命题，其条件都是"若两条平行线被第三条直线所截"，结论分别是"内错角相等"、"同位角相等"、"同旁内角互补"。有时，命题的措词并非像上面的形式，但稍微更改字眼，便可变成那种形式。例如，《九章算术》

卷一第三十二题注说："半周半径相乘得积步。"可改写成："若R和l是圆的半径和周长，则圆的面积等于$\frac{1}{2}Rl$。"有时，命题的条件包含了不少背景知识，但当作已知条件，索性略而不提。例如《原本》卷九第二十条定理："有无穷多个素数。"它的条件中包含了素数的定义和整数的基本性质，结论是存在无穷多个素数。这类识别技巧，并非本书想讨论的主要题材，读者对此亦一定已熟习的，所以我们不妨只讨论"若A，则B"这种形式的命题。证实了命题是正确的，它便成为定理，或称命题成立。在证实的过程中，我们只依靠基本概念、基本公设及以前证实了的命题，推导手法必须合乎逻辑，这个过程便是证明。

我们在中小学读书时，一定碰过无数大大小小的证明，也一定做过无数大大小小的证明，对于什么是数学证明，理应不会陌生吧？对于一位数学工作者来说，证明更是这门学科特有的一项标记。1881年，美国数学家皮尔斯(Peirce)甚至给数学下了这样一个定义："数学是产生必要的结论的科学"。这个定义几乎把数学与证明等同了起来！但你有没有想过，数学证明究竟起了什么作用？它是否真的确立了无可置疑的结论？它是事后的妆扮功夫抑或它能导致新的发现？数学功夫是否就等于证明众多的定理？数学证明这项独特的思想方法是怎样发展起来的？

我提出这些问题，并非说我就能解答这些问题。而且若要认真解答其中有些问题，将无可避免涉足哲学的范围，那更是我力所不及的。至少在目前的学习阶段，我还未能作一个较使人满意的整理。不过，正如古希腊哲学家苏格拉底(Socrates)所说："不经省察的生活是没价值的生活。"既然这些问题是值得省察的，就让我们一起在以后几章里作些初步的