陈自強　著

数学解题思维方法导引

中南工业大学出版社

数学解题思维方法导引

陈自强　著

中南工业大学出版社

【湘】新登字 010 号

数学解题思维方法导引

陈自强　著

责任编辑：肖梓高

*

中南工业大学出版社出版发行
中南工业大学出版社印刷厂印装
湖 南 省 新 华 书 店 经 销

*

开本：787×1092　1/32　印张：8　字数：196 千字
1995 年 6 月第 1 版　1996 年 5 月第 2 次印刷
印数：6001—8000

*

ISBN 7-81020-769-5/O・077
定价：9.00 元

序　言

做数学题目可以比拟为做智力体操，它对人的思维能力特别是对青少年的逻辑思维能力的培养、训练和开发有极大的不可替代的作用。

人们都习惯地讲：学习数学要掌握基本知识、基本概念和基本技巧，通称“三基”，学会做数学题目是巩固熟练“三基”的主要方法。

但数学题目浩如烟海、种类繁多、千变万化、丰富多彩，解题的方法不可能整齐划一，一成不变，人们必须千方百计寻找合理的途径，以求解开各种不同类型的难题。

陈自强副教授所著的《数学解题思维方法导引》一书，综合了前人的种种经验和方法，融合于自己多年来教学科研实践经验之中，将定型的和不定型的诸多方法进行科学的分类整理，并以思维科学和数学方法论为指导，以初等数学内容为载体、以数学思维方法为主线、以提高读者解题思维能力和数学素质为目的，写成了此书。书中安排了大量的典型例题，用具体的解题方法和解题技巧引导读者学会用较高的观点分析问题，探索和设计解题的途径，在从容自然之中，逐步掌握解题的思维方法和规律。

本书难度适中，注意通俗性和趣味性的统一，能引人入胜，适合广大师范院校数学系学生以及数学爱好者阅读。这是一本难得的与数学教学和数学竞赛培训相配套的参考书，它将成为广大青年读者的良师益友。

郭青峰

1995年5月

前　言

许多著名数学家与数学教育家普遍认为:数学成果获得的思维过程的价值决不比成果本身的价值小,他们积极提倡揭示数学成果获得的思维活动过程。主张通过数学思维方法训练来提高人们的解题能力和数学素质。

本书是以思维科学和数学方法论为指导,以提高读者的解题思维能力和数学素质为目的的一本专门著作。全书按思维模式体系撰写,共分四章,主要讲述观察、试验、归纳、类比、特殊化、想象与直觉等猜想方法。数学猜想是发现问题结论,探求解题思路的重要方法。但它所获得的结论具有或然性,其正确性需要论证与反驳。因此,在第 2 章安排了数学解题中常见的论证与反驳方法。猜想和论证在数学解题中都有重要的地位,它们相辅相成,缺一不可。第 3 章重点介绍解数学题的一些特殊方法与技巧,主要适用于解数学竞赛题。第 4 章是从数学方法论的角度阐述高层次的解题策略,旨在进一步完善解题思维模式体系,每章内容可独立成篇,教学或自学时可根据需要进行取舍。

书中例题主要选自国内外数学竞赛题,例题大多以"分析"的形式写出,在分析中不仅说明了其解法的形成过程,而且还尽力阐明了促使采取这些解题步骤的动机和思想方法。例题的编排,一般都有较低的起点,较高的落点,较大的跨度。对于难度较大的例题可以越过去,对领会本书的大意无多大影响。本书可作为高师院校数学系解题方法课的教学用书,也可作数学竞赛的培训资料使用。

本书是作者多年来在高师院校开设"解题方法"课的基础上

编著而成的。按思维模式体系论述是一次尝试，许多认识与提法还不成熟，甚至可能有谬误之外，恳请专家与读者指正。在本书的撰写过程中，曾参阅了一些有关的书籍和期刊，从中吸取了大量的营养，在此谨向原编著者致谢。

湖南省数学学会副理事长，湖南财经学院党委书记、院长郭青峰教授在百忙中审阅了全书并写了序言，为本书增色不少。湘潭师范学院教务处、数学系，我的家乡南县教育界的同仁对本书的出版给予了支持和鼓励，在此表示衷心的感谢。

著　者

1995 年 5 月

目　录

1　探测思维模式解题法

著名数学教育家波利亚（G·polya）曾经说过："在证明一个数学定理之前，你先得猜测这个定理的内容，在你完全作出详细证明之前，你先得推测证明的思路。你先得把观察到的结果加以综合，然后加以类比，你得一次又一次地进行尝试。"在证题或解题过程中的这种猜测、推测、尝试等思维形式，就是我们所说的探测性思维方法。它是一种创造性的思维方式，是数学研究中的发现法。可以说，数学上的许多发现和发明，都离不开探测性思维方法的巧妙运用。本章介绍观察与实验、归纳、类比、特殊化、想象与直觉等探测性思维方法的一些基本思维模式，并通过一些典型例题的分析和讨论来说明这些基本思维模式在解数学题中的具体运用。

1.1　观察法与实验法

观察法与实验法是自然科学研究中十分重要的方法，也是数学方法论中最基本的方法之一。欧拉（Euier）曾经说过："数学这门学科，需要观察，也需要实验。"

观察法是人们对周围事物和现象，在其自然的条件下，按照事物或现象的本来面目，研究和确定它们的性质和关系的一种方法；实验法是人们根据课题研究目的，人为地创设条件，控制和模拟客观对象，在有利的条件下获取材料的研究方法。观察与实验都是一种有目的、有计划、有步骤、有组织的积极思

维活动。不过，实验法比观察法更具有优越性，它可以排除外界条件的各种干扰，突出其主要矛盾，使实验者获得更精确的事实和材料。但是任何实验都离不开观察，实验实际上是观察的一种形式。在数学解题中，这两种方法经常结合使用。

1. 当问题的结论需要探求时，有时可先进行实验、观察、建立猜想结论，再进行证明

【例 1】 设 $a>0$，$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=1$，比较下列四个数的大小：$\sqrt{1+a}$，$\frac{1}{1-\frac{b}{2}}$，$1+\frac{a}{2}$，$\frac{1}{\sqrt{1-b}}$。

分析 对于这四个数如果用求差的方法比较大小，要进行 $C_4^2=6$ 次比较，才能得到答案。是否可先估计一下这四个数的大小关系呢？不妨用代值的方法来试验一下。

$\because$ $a>0$，不妨设 $a=1$，由 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=1$，得 $b=\frac{1}{2}$。

于是 $\sqrt{1+a}=\sqrt{2}$，$\frac{1}{1-\frac{b}{2}}=\frac{4}{3}$，$1+\frac{a}{2}=\frac{3}{2}$，$\frac{1}{\sqrt{1-b}}=\sqrt{2}$。

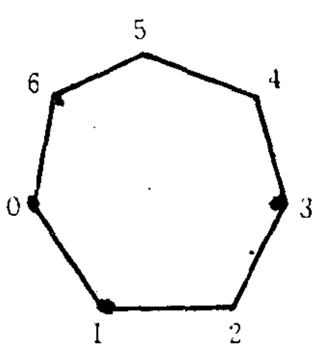

图 1-1

由此可以猜想，对于满足 $a>0$，$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=1$ 的一切 a、b 值都有：

$$\frac{1}{1-\frac{b}{2}}<\frac{1}{\sqrt{1-b}}=\sqrt{1+a}<1+\frac{a}{2}。$$

对于这一猜想结论再进行证明，只须作三次比较即可（证明略）。

【例 2】 如图 1-1，一枚棋子放在七角棋盘的第 0 个角，现依反时针方向移动这颗棋子，且每次走 1，2，…，n，…个角。求

证：不论走多少次，有三个角从不停有棋子。

分析 首先通过有限次的试验，观察到底有哪三个角从不停留棋子。下表中 L 表示棋子移动次数，r 表示棋子所停留的角的号码。

L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
r	0	1	3	6	3	1	0	0	1	3	6	3	1	0	…

观察此表不难猜想出：棋子不会停留的三个角的号码是 2，4，5。

现在我们来证明这个猜想：

设一共移动了 $L\ (L>7)$ 次棋子，则 L 可以表示为：$L=7m+n\ (m\in N,\ n=0,1,2,3,4,5,6)$。此时一共走了 $\frac{L(L+1)}{2}=\frac{7m(7m+2n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}$ 个角。

由于 $\frac{7m(7m+2n+1)}{2}$ 是 7 的倍数，因此移动 $\frac{7m(7m+2n+1)}{2}$ 个角意味着将使棋子回到 0 角，而 $\frac{n(n+1)}{2}$ 是走 n 步所走过的角数，当 $n=0,1,2,3,4,5,6$ 时，已验证过走 n 步，即走 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个角不会使棋子走到号码为 2,4,5 的角。所以不论走多少次，都有三个角从不停有棋子。

【例 3】 求序列 $\{a_n\}$ 中的最小项，其中 $a_n=n+\frac{1989}{n^2}$。

分析 先作计算试验，摸摸底。

$a_1=1990$，$a_2=499.25$，$a_3=224$，…，$a_{15}=23.84$，$a_{16}=23.769531\cdots$，$a_{17}=23.882352$，$a_{18}=24.139197\cdots$，

由观察猜测，序列 $\{a_n\}$ 中最小项是 $a_{16}=23.769531\cdots$。这只须证明对所有的 $n\geqslant16$，有 $a_{n+1}>a_n$。为此作差：

$$b_n = a_{n+1} - a_n = 1 + 1989 \times \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$= 1 - 1989 \times \frac{2n+1}{n^2\ (n+1)^2}$$

序列 $C_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{2}{n(n+1)^2} + \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ 是单调递减的，因为它是两个单调递减序列之和，所以，序列 $b_n = 1 - 1989C_n$ 是单调递增的。因为由上面计算可知 $b_{16} > 0$，对所有 $n \geqslant 16$，有 $b_n > 0$，也就是对所有 $n \geqslant 16$，有 $a_{n+1} > a_n$。

所以，$\{a_n\}$ 的最小项是 $a_{16} = 23.769531\cdots$

2. 通过实验、观察数学问题的内部结构、数值特点、图形的性质等特征，发现线索，从而找到解决问题的突破口或关键

【例 4】 设 f 是 $(0, 1)$ 区间上的实函数，如果，

(1) $f(x) > 0$，对任何 $x \in (0,1)$；

(2) $\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(1-x)}{f(1-y)} \leqslant 2$，对任何 $x, y \in (0,1)$。

求证 f 必定是常数函数。

分析 要证 f 是常数函数，只须证对任何 x，$y \in (0,1)$ 恒有 $f(x) = f(y)$。要由不等式条件(2)出发证明等量关系。启发我们寻找一对反向的不等式："若 $A \leqslant B$，$A \geqslant B$，则 $A = B$"。

观察条件(2)知 x，y 换位后仍然成立。即有 $\frac{f(y)}{f(x)} + \frac{f(1-y)}{f(1-x)} \leqslant 2$。再对比观察一下这个条件和条件(2)的结构特征，使我们不禁想起代数中的基本不等式：a，$b > 0$，$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geqslant 2$（等号仅当 $a = b$ 时成立）。由此出发，问题就容易解决了。

由 $f(x) > 0$，$f(y) > 0$，$f(1-x) > 0$，$f(1-y) > 0$，有：

$\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \geqslant 2$，$\frac{f(1-x)}{f(1-y)} + \frac{f(1-y)}{f(1-x)} \geqslant 2$，于是，

$$\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(1-x)}{f(1-y)}+\frac{f(1-y)}{f(1-x)}\geqslant 4 \qquad ①$$

又由条件$\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(1-x)}{f(1-y)}\leqslant 2$，知$\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(1-y)}{f(1-x)}\leqslant 2$

从而有$$\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(1-x)}{f(1-y)}+\frac{f(1-y)}{f(1-x)}\leqslant 4 \qquad ②$$

比较①和②两式，当且仅当 $f(x)=f(y)$，$f(1-x)=f(1-y)$ 时成立，所以 $f(x)$是常数函数。

【例 5】 设 a_n 是 $1^2+2^2+\cdots+n^2$ 的个位数字，$n=1, 2, 3, \cdots$

试证 0，$a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$是有理数。

分析 首先取一些特殊数值做试验列成下表，观察发现个位数字的规律。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24…
a_n	1	5	4	0	5	1	0	4	5	5	6	0	9	5	0	6	5	9	0	0	1	5	4	0…

从表中可以猜测 a_n 是以 20 为一周期循环出现的，事实上，记 $S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$所以有：

$$S_{n+20}-S_n=\frac{1}{6}(n+20)(n+21)(2n+41)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$=10(2n^2+42n+287)$$

故对一切 $n\in N$，$S_{n+20}-S_n$ 都能被 10 整除。因而，S_{n+20}和 S_n 有相同的个位数字，即 $a_{n+20}=a_n$。

因此，$0\times a_1a_2\cdots a_n\cdots$是循环小数，当然是有理数。

3. **用实验观察法解题** 有些数学问题可以通过试验、观察探索解题途径，直接得到问题的结论。

【例 6】 对任意的正整数 K，令 $f_1(K)$定义为 K 的各位数字的和的平方，对于 $n\geqslant 2$，令 $f_n(K)=f_1(f_{n-1}(k))$，求 $f_{1988}(11)$。

分析 最直接的方法是先求出 $f_1(11)$，$f_2(11)$，$f_3(11)$，…进行观察，由定义可得：

$f_1(11)=(1+1)^2=4$

$f_2(11)=f_1(f_1(11))=f_1(4)=4^2=16$

$f_3(11)=f_1(f_2(11))=f_1(16)=(1+6)^2=49$

$f_4(11)=f_1(f_3(11))=f_1(49)=(4+9)^2=169$

$f_5(11)=f_1(f_4(11))=f_1(169)=(1+6+9)^2=256$

$f_6(11)=f_1(f_5(11))=f_1(256)=(2+5+6)^2=169$

因为 $f_n(11)$只依赖于 $f_{n-1}(11)$，所以 256 和 169 将连续交替出现，也就是 $n\geqslant 4$ 时有：

$$f_n(11)=\begin{cases}169, & n\text{ 是偶数时}\\ 256, & n\text{ 是奇数时}\end{cases}$$

由于 1988 是偶数，所以 $f_{1988}(11)=169$。

【例 7】 把 n 只正立的酒杯翻过来，规定每次只允许任意翻动刚好 $n-1$ 只酒杯。问(1)能否办到？(2)若能办到时给出一种做法。

分析 观察实例。

当 $n=1$ 时，只许翻动 $n-1=0$ 只酒杯，即不作任何翻动，显然办不到；

当 $n=2$ 时，每次翻动一只酒杯，先翻动酒杯〔1〕，再翻动酒杯〔2〕，两次就可以全部翻过来；

当 $n=3$ 时，每次翻两只，无论如何达不到全翻过来的目的；

当 $n=4$ 时，以〔i〕↑，〔j〕↓分别表示第 i 只酒杯正置及第 j 只酒杯倒置，有：

始　态〔1〕↑〔2〕↑〔3〕↑〔4〕↑

第一次<u>〔1〕</u>↑〔2〕↓〔3〕↓〔4〕↓

第二次〔1〕↓ $\underline{〔2〕}$ ↓〔3〕↑〔4〕↑

第三次〔1〕↑〔2〕↑ $\underline{〔3〕}$ ↑〔4〕↓

第四次〔1〕↓〔2〕↓〔3〕↓ $\underline{〔4〕}$ ↓

划横线的酒杯对前次而言未经翻动，这样做了四次就达到了目的。

于是猜想：当 n 为奇数时办不到；当 n 为偶数时可设法办到。事实上，当 n 为奇数时，如果能按规定翻动 m 次后 n 只酒杯全部翻过来，由于每只酒杯必被翻动奇数次，不妨设第 i 只被翻动了 $2m_i+1$ 次，总计翻动的“杯次”：

$(2m_1+1)+(2m_2+1)+\cdots+(2m_n+1)=2(m_1+m_2+\cdots+m_n)+n$ 必为奇数

另一方面，每次翻动 $n-1$(偶数)只酒杯，m 次共翻动 $m(n-1)$杯次，而 $m(n-1)$又必为偶数，得到矛盾。这表明奇数个酒杯按规定是不能全部翻过来的。

当 n 为偶数时，类似 $n=4$ 的情形，设计一种翻杯的方法：

第一次〔1〕不动，翻其余$(n-1)$个酒杯；

第二次〔2〕不动，翻其余$(n-1)$个酒杯；

第三次〔3〕不动，翻其余$(n-1)$个酒杯；

……

第 n 次〔n〕不动，翻其余$(n-1)$个酒杯。

这样一来，每只酒杯都被翻动 $n-1$(奇数)次，故都被翻过来了。这即证明了当 n 是偶数时可以按规定把酒杯全翻过来，并且给出了一种具体的翻动方法。

习题 1-1

1、求素数 p，使 $p+10$，$p+14$ 仍是素数。

2、计算$\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2n\text{个}}-\underbrace{22\cdots2}_{n\text{个}}}$的值。

3、试证$\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}\underbrace{55\cdots5}_{n\text{个}}6$为完全平方数。

4、已知两同心圆的圆心为O，过小圆上一定点M作小圆的弦MA和大圆的弦BMC，且使$MA\perp BC$，求证：$AB^2+BC^2+CA^2$为定值。

5、任意将1，2，…，$2n$这些自然数分成两组，每组n个数，设第一组中的数依递增次序写出，为：

$a_1<a_2<\cdots<a_n$

第二组中的数依递减次序写出，为：

$b_1>b_2>\cdots>b_n$

求证：$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_n-b_n|=n^2$

1.2 归纳法

通过实验、观察等途径，获得了一大批经验材料，这是发现数学真理、解决数学问题的基础，但还远远没有达到目的。我们必须对这些也许看来是支离破碎，互不相干的经验材料进行恰当的归类、分析、综合、概括，努力挖掘那些蕴含在其中的内在规律，形成猜想，并逐步修正和完善猜想。这就是对数学经验材料的组织整理过程。对数学经验材料进行组织整理的方法主要有归纳法和类比法。

所谓归纳法就是通过特例的分析来引出普遍结论的一种方法。它由推理的前提和结论两部分构成：前提是若干已知的个别事实，是个别或特殊的判断、陈述；结论是从前提中通过推理而获得的猜想，是普遍性的陈述、判断。

归纳法的思维模式是：设$Mi(i=1，2，\cdots n)$是要研究对象M的特例或子集，若$Mi(i=1，2，\cdots n)$具有性质P，则由此猜想M也可能具有性质P，简记为：

$$\bigcup_{i=1}^{n} Mi \subseteq M \land P(Mi) \xrightarrow{\triangle} P(M)$$

如果 $\bigcup_{i=1}^{n} Mi = M$，这时的归纳法称为完全归纳法。由于它穷尽了被研究对象的一切特例，因而结论是正确可靠的。完全归纳法可以作为论证的方法，它又称为枚举归纳法(见 2.2)。

如果 $\bigcup_{i=1}^{n} Mi$ 是 M 的真子集，这时的归纳法称为不完全归纳法。在本书中所言的归纳法，均指不完全归纳法。由于不完全归纳法没有穷尽全部被研究的对象，得出的结论只能算猜想，结论的正确与否有待于进一步证明或举反例。但用不完全归纳法可以帮助从具体的事例中发现一般规律，它具有很大的创造性，是强有力的"发现"的方法，在解数学题中有着十分重要的作用。

1. 归纳法解题的一般模式是：观察实例——归纳出猜想——证明猜想 在解题过程中，当一般规律尚未发现之前，先用几个实例试试，通过对实例的细心观察和深入分析，发现、总结出一般规律，这就是归纳。由于这种归纳是"不完全"的，结论是否正确，还不得而知，因此只能说是一种猜想，经过严格证明的猜想才是真理。

【例1】 证明：具有形式 $N=\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)个}\underbrace{22\cdots2}_{n个}5$ 的数是完全平方数。

分析 观察实例：

当 $n=1$ 时，$N=25=5^2$

当 $n=2$ 时，$N=1225=35^2$

当 $n=3$ 时，$N=112225=335^2$

当 $n=4$ 时，$N=11122225=3335^2$

由此发现规律，猜想 $N=\underbrace{33\cdots3}_{(n-1)个}5^2=\left(\dfrac{10^n+5}{3}\right)^2$。事实上，有：