

大气微波遥感基础

张培昌 王振会 编著

气象出版社

Basis of Atmospheric Microwave Remote Sensing

大气微波遥感基础

张培昌 王振会 编著

气象出版社

(京)新登字 046 号

内 容 简 介

本书全面系统地介绍了主动和被动大气微波遥感的理论、方法和应用,同时介绍了有关的基础理论知识。全书共分三篇十二章,内容分别为质点对电磁波的散射,大气、云雾和降水对电磁波的衰减,电磁波在大气中的折射;雷达气象方程,气象回波的涨落与平均,用偏振方法测定降水粒子特性,多普勒雷达的探测原理、晴空大气回波探测;微波辐射测量学,大气微波辐射传输方程及大气遥感原理,大气参数垂直分布的反演理论和方法,被动式微波遥感大气的实践与应用等。本书具有较强的系统性、严谨的理论性等特点。同时,本书内容全面,资料丰富,叙述正确。

本书可作为气象院校大气物理专业、大气探测专业的研究生教材,以及有关专业本科生教学的教师参考书,也可供大气微波遥感及微波通讯工程的研究人员和科技人员参考。

大气微波遥感基础

张培昌 王振会 编著

责任编辑:陶国庆 终审:纪乃晋

封面设计:牛 涛 责任技编:席大光 责任校对:陶国庆

气象出版社 出版

(北京海淀区白石桥路 46 号 邮政编码:100081)

北京昌平环球印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行 全国各地新华书店经销

开本:787×1092 1/16 印张:26.25 字数:655 千字

1995 年 8 月第一版 1995 年 8 月第一次印刷

ISBN 7-5029-1815-9/P·0704(课)

印数:1—1500 定价:15.20 元

前 言

微波遥感已经成为近代大气遥感的主要手段之一。大气微波遥感是利用微波信号与大气的相互作用来遥感探测气象要素的。大气微波遥感有两种方式：一是主动式大气微波遥感，这就是气象雷达探测原理和方法；二是被动式大气微波遥感，如气象卫星信息的接收和分析，以及地面微波辐射计等接收和处理大气信息，它主要研究大气热辐射的微波信号特征及其传输规律，并用它来探测大气。

本书大部分内容是多年来为大气物理系研究生开设的**大气微波遥感基础**课程的主要内容。通过教学实践和吸收近几年来有关科研成果后，对原教材讲义进行了修改，形成了本教材。本教材共分三篇十二章。第一篇是基础理论，共分三章：第一章详细而系统地论证了球形粒子和椭球形粒子对电磁波散射的精确解；第二章介绍大气中气体和云雾降水粒子对电磁波的衰减特性，以及吸收和发射的辐射特性；第三章推导大气折射率与温度、大气压及水汽压的关系式，建立了射线轨道方程，并对等效地球半径和大气折射指数随高度分布的模式等进行了讨论。第二篇是主动式微波遥感探测，共分五章：第四章介绍云和降水等目标物的雷达气象方程以及气象雷达测定降水的方法；第五章讨论气象回波涨落与平均的理论，并介绍了此理论在三个方面的应用情况；第六章介绍对电磁波偏振状态的描述方法，散射过程的完整表示，以及偏振气象雷达在测定降水粒子特性方面的应用；第七章系统地讨论了气象多普勒雷达的探测原理和分析方法，并介绍了几个主要应用的方面，如测定风场、湍流、降水粒子谱等；第八章介绍湍流大气和分层大气对电磁波散射的理论，同时讨论了在分层大气中反演大气折射率垂直廓线的方法，以及晴空探测雷达的主要应用方面。第三篇是被动式微波遥感探测，共分四章：第九章介绍热辐射基本定律、微波辐射计的基本概念和工作原理、无散射大气和考虑散射大气中微波辐射的传输，从大气微波遥感的需要出发，还论述了地表的发射和散射辐射特征；第十章介绍大气温度、湿度、水汽和液水总含量、降水以及臭氧等大气要素和成分的遥感原理；第十一章对大气参数垂直分布的反演理论和各种统计反演、物理反演、联合反演等方法作了介绍，并讨论了通道选择问题；第十二章介绍被动式微波遥感大气温度、湿度、降水和臭氧含量等的实践和应用，主要是该领域的一些研究成果和国内外现状。

本书把主动和被动大气微波遥感理论与方法汇集于一起，既具有较强的系统性，又具有严谨的理论性，同时还介绍了一些新技术、新方法，包括编著者近年来的研究成果。对于一些重要的基本理论，书中作了较详细的阐述。

本书第一、三、四、五、六、七和八章由张培昌编写，第二、九、十、十一和十二章由王振会编写。全书由张培昌统一审定。

本书可作为气象院校大气物理专业、大气探测专业的研究生教材，也可作为从事相关专业本科生有关课程教学的教师参考书，同时可供从事大气微波遥感及微波通讯工程的研究人员、科技人员参考。

书中收集了戴铁丕等同志与编著者合作的科研工作成果，在此表示感谢。

编著者

目 录

前言

第一篇 基础知识

第一章 质点对电磁波的散射	(1)
§ 1.1 球形质点对电磁波的散射	(1)
§ 1.2 小旋转椭球体对电磁波的散射	(10)
§ 1.3 二层分层均匀旋转椭球对电磁波的散射	(19)
§ 1.4 混合球的介电常数	(33)
参考文献	
第二章 大气、云雾和降水对电磁波的衰减	(37)
§ 2.1 衰减及其表示方法	(37)
§ 2.2 吸收谱线型式	(39)
§ 2.3 水汽吸收	(41)
§ 2.4 氧气吸收	(44)
§ 2.5 大气吸收的 Liebe 模式	(46)
§ 2.6 云雾、降水对电磁波的衰减	(52)
参考文献	
第三章 电磁波在大气中的折射	(61)
§ 3.1 大气的折射率	(61)
§ 3.2 射线轨道方程	(66)
§ 3.3 射线曲率、等效地球半径、订正折射指数	(70)
§ 3.4 折射指数随高度变化的几种形式及模式	(73)
参考文献	

第二篇 主动式微波遥感探测

第四章 雷达气象方程	(79)
§ 4.1 单个目标的雷达方程	(79)
§ 4.2 云及降水的雷达气象方程	(81)
§ 4.3 考虑充塞程度和衰减因子的雷达气象方程	(85)
§ 4.4 用 $Z-I$ 关系法测量降水	(88)
参考文献	
第五章 气象回波的涨落与平均	(101)
§ 5.1 回波信号强度及其平均值的分布律	(101)
§ 5.2 视频积分器工作原理	(109)
§ 5.3 非独立取样的均值估计原理	(113)
§ 5.4 平均措施对接收机灵敏度的改善	(124)
§ 5.5 自动抑制地物杂波的 MTI 方法	(126)

参考文献

第六章 用偏振方法测定降水粒子特性	(130)
§ 6.1 电磁波特性的完整描述	(130)
§ 6.2 散射公式的表示法	(133)
§ 6.3 正交偏振法测定降水粒子的谱参数	(139)
§ 6.4 圆偏振法探测降水体	(144)
§ 6.5 椭球状降水粒子群的雷达反射率、衰减系数.....	(152)

参考文献

第七章 多普勒雷达的探测原理	(157)
§ 7.1 载波脉冲的频谱结构	(157)
§ 7.2 雷达回波的多普勒频谱分析方法	(174)
§ 7.3 影响多普勒回波谱宽度的目标运动因素	(193)
§ 7.4 多普勒雷达测量风场结构	(196)
§ 7.5 三维风场在水平面内线性变化时的算法	(210)

参考文献

第八章 晴空大气回波探测	(216)
§ 8.1 湍流大气对电磁波的散射	(216)
§ 8.2 晴空大气中的镜面反射	(223)
§ 8.3 一维分层大气折射率廓线的重建	(229)
§ 8.4 晴空探测雷达及其在气象上的应用	(240)
§ 8.5 VHF 雷达在大气探测中的应用	(249)

参考文献

第三篇 被动式微波遥感探测

第九章 微波辐射测量学	(254)
§ 9.1 辐亮度.....	(254)
§ 9.2 热辐射.....	(255)
§ 9.3 Kirchhoff 定律	(259)
§ 9.4 温度与功率的对应关系.....	(260)
§ 9.5 微波辐射计(一).....	(263)
§ 9.6 微波辐射计(二).....	(266)
§ 9.7 辐射计分辨率与不确定性原理.....	(274)
§ 9.8 辐射传输理论引论.....	(275)
§ 9.9 无散射大气上行、下行辐射亮温度	(278)
§ 9.10 地表面的发射和散射.....	(282)
§ 9.11 自然地表的微波辐射特征.....	(286)
§ 9.12 考虑大气中云和降水散射时的辐射传输.....	(293)

参考文献

第十章 大气微波辐射传输方程及大气遥感原理	(304)
§ 10.1 辐射亮温度权重函数	(304)

§ 10.2	上行辐射的大气有效透过率	(307)
§ 10.3	大气温度遥感原理	(310)
§ 10.4	大气湿度遥感原理	(317)
§ 10.5	极化法卫星大气遥感原理	(324)
§ 10.6	大气水汽总含量及液态水总含量的遥感原理	(325)
§ 10.7	降水的微波遥感原理	(330)
§ 10.8	雷达和微波辐射计联合探测云雨参数	(335)
§ 10.9	大气中臭氧的微波遥感	(337)
§ 10.10	其它大气参数的遥感	(343)

参考文献

第十一章	大气参数垂直分布的反演理论和方法	(346)
§ 11.1	岭回归解	(348)
§ 11.2	约束解法	(350)
§ 11.3	最小二乘法	(353)
§ 11.4	统计控制法	(356)
§ 11.5	经验正交函数展开法	(357)
§ 11.6	经验正交回归法	(360)
§ 11.7	线性迭代法	(361)
§ 11.8	物理迭代法(非线性迭代法)	(362)
§ 11.9	Backus-Gilbert 反演法	(364)
§ 11.10	统计模拟法(蒙特卡洛法)解非线性水汽遥感方程	(369)
§ 11.11	联合探测和反演方法	(373)
§ 11.12	反演误差与通道选择	(375)

参考文献

第十二章	被动式微波遥感大气的实践与应用	(384)
§ 12.1	大气温度的微波遥感实践与应用	(384)
§ 12.2	大气中水汽和云中液态水的微波遥感实践和应用	(396)
§ 12.3	降水的微波遥感实践和应用	(405)
§ 12.4	臭氧的微波遥感实践与应用	(410)

参考文献

第一篇 基础知识

第一章 质点对电磁波的散射

大气是由气体分子和气溶胶质点(灰尘、凝结核、水汽凝集物)组成的。电磁波(如雷达波)在大气中传播时遇到这些质点就会发生散射。气象雷达观测到的各种气象回波,就是接收这些散射信号的结果。

质点在各方向上散射电磁波的情况,除了与入射波的性质有关以外,还与质点的大小、形状、电学特性等物理性质有关。因此,当质点的物理性质和入射波的性质已知时,就可以知道质点向各方向发出的散射波的性质;反之,当质点散射波特性的已知时,也可以推断出散射质点的物理特性。

由于数学上的困难,目前只有对圆球形、圆柱形、椭球形等少数几种几何形状比较简单的质点的散射,能够从数学上得到解决。气象上云滴、雨滴、冰晶等一般可以看成是圆球形质点或椭球形质点。因此,本章中主要讨论这两种几何形状质点的散射。

对于散射场的研究,目前可归纳为以下几种方法:①分离变量法。在一定的假设条件下,通过分离变量,将麦克斯韦偏微分方程分解成几个常微分方程进行求解。但此法要求散射粒子的表面与已经建立的十一种坐标系中的任一种相重合,故对粒子形状有很大限制。使用这种方法原则上可以用本征函数的无穷级数来表示亥姆霍兹方程的解,解是精确的,但推导过程十分复杂。本章中介绍的球形粒子和椭球形粒子散射的理论,均属于这种方法。②射线追踪法。将电磁波作为射线处理,即把散射问题变成折射、反射、透射、衍射等问题来处理,这样数学上简化很多。这种方法主要用于波长较短、粒子较大时的情形。③积分法(格林函数法)。它将在粒子上感应产生的电荷与电流看作是许多单位源,将这许多单位源在空间某点产生的场进行积分得到该点总的散射场。这种方法与坐标系选择无关,适用于任意形状的散射粒子。目前广泛采用的扩展边界条件的方法(EBCM)原则上就属于积分法。④近似法。主要有微扰法及等效球法等,可用来计算形状较复杂的粒子散射,且计算得到简化,但它只适用于一定的特定条件,所得散射场是近似解。

§ 1.1 球形质点对电磁波的散射^[1,2]

散射过程的物理实质是这样的:当入射波投射到质点上时,入射波的电磁场就在构成质点的介质中形成复杂的电荷分布和电流分布,这就是各阶的电多极矩和磁多极矩。由于入射波的电磁场是交变的,所以它在质点内形成的电多极矩和磁多极矩也是交变的,它们要向外

辐射电磁波。交变的电多极矩和磁多极矩向外界辐射的电磁波就是散射波。

解决散射问题的步骤是：首先从麦克斯韦方程组出发，分析因散射质点的存在而造成的电磁场扰动 $\vec{E}^s$ 、 $\vec{H}^s$ ；然后计算乌-坡矢量 $\vec{S}^s$ ，最后计算侧向散射截面和后向散射截面等。

在整个推导过程中，我们采用高斯单位制。若给出的是在米-千克-秒制中的麦克斯韦方程组，可以通过两种单位制中同一电磁学量的数值转换关系来实现公式的转换。计算时所使用的坐标系是这样选取的：坐标系原点在圆球形散射粒子的中心，在直角坐标系中。入射波能流密度的传播方向沿 z 轴的，入射波电场矢量振动方向沿 x 轴。磁场矢量振动方向沿 y 轴。空间任一点的位置 p 用球坐标 (r, θ, φ) 来确定， p 点离原点的距离以矢径向量 $\vec{R}$ 的量值 r 表示， z 轴与矢径向量 $\vec{R}$ 之间的夹角为 θ ， x 轴与 $\vec{R}$ 在 xy 平面上的投影线之间的夹角为 φ 。如图 1.1 所示。

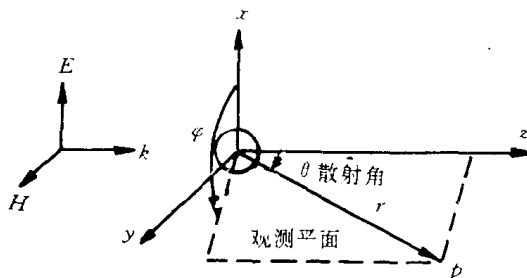


图 1.1 分析圆球形粒子散射特性时，坐标系的选取

一、麦克斯韦方程组化为波动方程

在高斯单位制中，麦克斯韦方程组为

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.4)$$

式中 $\vec{H}$ 为磁场强度， $\vec{B}$ 为磁感应强度， $\vec{E}$ 为电场强度， $\vec{D}$ 为电感应强度， ρ 为自由体电荷密度， c 为光速。在介质内，上述方程组尚不完备，还需要补充三个描述介质性质的方程式：

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (1.5)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.6)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.7)$$

式中 σ 是物质的电导率， ϵ 是介电系数， μ 是磁导率。把 (1.5)~(1.7) 式代入 (1.1)~(1.4) 式后，得

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E} \quad (1.8)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1.9)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho \quad (1.10)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (1.11)$$

假设质点内部、外部都不含自由体电荷密度。质点内、外的介质是均匀、并且各向同性，可以使用 (1.5)~(1.7) 式， $\mu \simeq 1$ 。入射电磁场随时间作周期变化，可以用因子 $e^{i\omega t}$ 表示。 ω 是

入射波圆频率。根据这些假说,并令

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.12)$$

$$m^2 = (\epsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}) \quad (1.13)$$

式中 k 称为波数, m 称为介质的复折射指数。那么, (1.8) 和 (1.9) 两式可写为

$$\nabla \times \vec{H} = im^2 k \vec{E} \quad (1.14)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -ik\vec{H} \quad (1.15)$$

进一步运算后可得

$$\nabla^2 \vec{E} + m^2 k^2 \vec{E} = 0 \quad (1.16)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + m^2 k^2 \vec{H} = 0 \quad (1.17)$$

这说明 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 满足相同的矢量波动方向。

由于在球坐标中直接求解上述矢量波动方程很困难,故下面把这两个矢量波动方程用标量位势 φ 和矢量位 $\vec{A}$ 表示后再求解。并且最后可归结为求解标量位势 φ 的波动方程。根据 (1.11) 式, $\vec{H}$ 可写为

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A} \quad (1.18)$$

将 (1.18) 式代入 (1.9) 式, 并注意 $\mu \simeq 1$, 则有 $\nabla \times (\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$ 。上式括号内可写为 $(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = -\nabla \varphi$, 即

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.19)$$

利用规范不变性可以适当选择 $\vec{A}$ 及 φ , 使它们之间满足如下的洛伦兹条件

$$\nabla \cdot \vec{A} + im^2 k \varphi = 0 \quad (1.20)$$

则 (1.14) 式中 $\vec{H}$ 、 $\vec{E}$ 分别以 (1.18) 和 (1.19) 式代入后, 经运算可得

$$\nabla^2 \vec{A} + m^2 k^2 \vec{A} = 0 \quad (1.21)$$

对 (1.19) 式取散度, 并据假设条件及洛伦兹条件等, 可得

$$\nabla^2 \varphi + m^2 k^2 \varphi = 0 \quad (1.22)$$

可以证明: 若 φ_n 是标量波动方程 (1.22) 式的特解, 则 $\nabla \varphi_n$, $\nabla \times \vec{R} \varphi_n$, $\nabla \times \nabla \times \vec{R} \varphi_n$ 都是矢量波动方程 (1.21) 式的特解。于是可设矢量位势 $\vec{A}$ 的通解为

$$\vec{A} = \frac{i}{k} \nabla \times \vec{R} \Sigma b_n^* \varphi_n - \frac{1}{mk^2} \nabla \times \nabla \times \vec{R} \Sigma a_n^* \varphi_n + \Sigma c_n^* \nabla \varphi_n \quad (1.23)$$

令: $\Phi^m = \Sigma b_n^* \varphi_n$, $\Phi^e = \Sigma a_n^* \varphi_n$, 则 (1.23) 可写为

$$\vec{A} = \frac{i}{k} \nabla \times \vec{R} \Phi^m - \frac{1}{mk^2} \nabla \times \nabla \times \vec{R} \Phi^e + \Sigma c_n^* \nabla \varphi_n \quad (1.24)$$

这就是 $\vec{A}$ 与 Φ_n 之间的关系式。将 (1.24) 式代入 (1.18) 式, 经运算后可得

$$\vec{H} = -m(\nabla \times \vec{R} \Phi^e - i \frac{1}{mk} \nabla \times \nabla \times \vec{R} \Phi^m) \quad (1.25)$$

将 (1.24) 式代入 (1.19) 式, 并注意使用洛伦兹条件。可以证明有关系式: $\nabla \Phi = -ik \Sigma c_n^* \nabla \varphi_n$, 经运算后可得

$$\vec{E} = \nabla \times \vec{R} \Phi^m + i \frac{1}{mk} \nabla \times \nabla \times \vec{R} \Phi^e \quad (1.26)$$

以上就是由 Φ 、 Φ^m 决定 $\vec{H}$ 及 $\vec{E}$ 的关系式。

(1.25)和(1.26)两式表达的电磁矢量在球坐标系中的各个分量可表示为

$$E_r = i \frac{1}{mk} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} r \Phi + m^2 k^2 r \Phi \right) \quad (1.27)$$

$$E_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} r \Phi^m + i \frac{1}{mkr} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} r \Phi^m \quad (1.28)$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} r \Phi^m + i \frac{1}{mkr \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} r \Phi^m \quad (1.29)$$

$$H_r = i \frac{1}{k} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} r \Phi^m + m^2 k^2 r \Phi^m \right) \quad (1.30)$$

$$H_\theta = -\frac{m}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} r \Phi^m + i \frac{1}{k} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} r \Phi^m \quad (1.31)$$

$$H_\varphi = \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} r \Phi^m + i \frac{1}{k} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} r \Phi^m \quad (1.32)$$

以上仅给出了由标量位势去确定电磁场各分量的一般形式。现在的问题是要通过入射场去求解散射场、折射场,这就要应用边界条件。我们知道,在两种介质的界面两侧,只有电场和磁场的切向分量是连续的。因此有

$$\begin{aligned} \vec{n} \times (\vec{E}^{(i)} + \vec{E}^{(s)} - \vec{E}^{(r)}) &= 0 \\ \vec{n} \times (\vec{H}^{(i)} + \vec{H}^{(s)} - \vec{H}^{(r)}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.33)$$

式中 $\vec{n}$ 是介质边界面上单位法向量。要求 $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$ 在边界面处连续,也就是要求下列各量: $r \Phi^m$, $\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial r} r \Phi^m$, $m r \Phi^m$, $\frac{1}{mk} \frac{\partial}{\partial r} r \Phi^m$ 在边界处连续。具体地讲,也就是要求在 $r = a$ (a 是粒子半径) 处下列各式成立

$$r \Phi^{m(i)} + r \Phi^{m(s)} = r \Phi^{m(r)} \quad (1.34)$$

$$\frac{1}{k_1} \left(\frac{\partial}{\partial r} r \Phi^{m(i)} + \frac{\partial}{\partial r} r \Phi^{m(s)} \right) = \frac{1}{k_2} \frac{\partial}{\partial r} r \Phi^{m(r)} \quad (1.35)$$

$$m_1 (r \Phi^{(i)} + r \Phi^{(s)}) = m_2 r \Phi^{(r)} \quad (1.36)$$

$$\frac{1}{m_1 k_1} \left(\frac{\partial}{\partial r} r \Phi^{(i)} + \frac{\partial}{\partial r} r \Phi^{(s)} \right) = \frac{1}{m_2 k_2} \frac{\partial}{\partial r} r \Phi^{(r)} \quad (1.37)$$

上面各式中, k 和 m 的下标 1 和 2 分别表示球外介质或球内介质中的相应值。

二、求入射波、折射波、散射波的标量位势的函数形式

从数理方程中知道,标量波动方程把时间因子分离掉后,若进一步用球坐标进行分离变量,就可以得到如下通解

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=-n}^n \{ \alpha_n^* j_n(mkr) + \beta_n^* \eta_n(mkr) \} p_n^{(q)}(\cos \theta) \{ \nu_q^* \cos q\varphi + \delta_q^* \sin q\varphi \} \quad (1.38)$$

式中 α_n^* 、 β_n^* 、 ν_q^* 、 δ_q^* 都是系数, j_n 是 n 阶球贝塞耳函数, η_n 是 n 阶球诺曼函数, $p_n^{(q)}$ 是 n 阶缔合勒让德函数。

设入射波是平面偏振波。并设入射波沿 z 轴方向传播,电场 $E^{(i)}$ 沿 x 轴方向。磁场 $H^{(i)}$ 沿 y 轴方向。又设入射波电场具有单位振幅,那么入射波在直角坐标系中的各分量可表示为

$$E_x^{(i)} = e^{-im_1 k_1 z} \quad (1.39)$$

$$H_y^{(i)} = m_1 e^{-im_1 k_1 z} \quad (1.40)$$

$$E_y^{(i)} = E_z^{(i)} = H_x^{(i)} = H_z^{(i)} = 0 \quad (1.41)$$

注意到直角坐标系中各分量与球坐标中各分量之间的关系后,可以得到入射波电磁场各分量在球坐标中的表达式

$$\begin{cases} E_r^{(i)} = e^{-im_1 k_1 r \cos \theta} \cdot \cos \varphi \sin \theta \\ E_\theta^{(i)} = e^{-im_1 k_1 r \cos \theta} \cdot \cos \varphi \cos \theta \\ E_\varphi^{(i)} = e^{-im_1 k_1 r \cos \theta} \cdot \sin \varphi \end{cases} \quad (1.42)$$

$$\begin{cases} H_r^{(i)} = m_1 e^{-im_1 k_1 r \cos \theta} \cdot \sin \theta \sin \varphi \\ H_\theta^{(i)} = m_1 e^{-im_1 k_1 r \cos \theta} \cdot \cos \theta \sin \varphi \\ H_\varphi^{(i)} = m_1 e^{-im_1 k_1 r \cos \theta} \cdot \cos \varphi \end{cases} \quad (1.43)$$

$$\begin{cases} H_r^{(i)} = m_1 e^{-im_1 k_1 r \cos \theta} \cdot \sin \theta \sin \varphi \\ H_\theta^{(i)} = m_1 e^{-im_1 k_1 r \cos \theta} \cdot \cos \theta \sin \varphi \\ H_\varphi^{(i)} = m_1 e^{-im_1 k_1 r \cos \theta} \cdot \cos \varphi \end{cases} \quad (1.44)$$

$$\begin{cases} H_r^{(i)} = m_1 e^{-im_1 k_1 r \cos \theta} \cdot \sin \theta \sin \varphi \\ H_\theta^{(i)} = m_1 e^{-im_1 k_1 r \cos \theta} \cdot \cos \theta \sin \varphi \\ H_\varphi^{(i)} = m_1 e^{-im_1 k_1 r \cos \theta} \cdot \cos \varphi \end{cases} \quad (1.45)$$

$$\begin{cases} H_r^{(i)} = m_1 e^{-im_1 k_1 r \cos \theta} \cdot \sin \theta \sin \varphi \\ H_\theta^{(i)} = m_1 e^{-im_1 k_1 r \cos \theta} \cdot \cos \theta \sin \varphi \\ H_\varphi^{(i)} = m_1 e^{-im_1 k_1 r \cos \theta} \cdot \cos \varphi \end{cases} \quad (1.46)$$

$$\begin{cases} H_r^{(i)} = m_1 e^{-im_1 k_1 r \cos \theta} \cdot \sin \theta \sin \varphi \\ H_\theta^{(i)} = m_1 e^{-im_1 k_1 r \cos \theta} \cdot \cos \theta \sin \varphi \\ H_\varphi^{(i)} = m_1 e^{-im_1 k_1 r \cos \theta} \cdot \cos \varphi \end{cases} \quad (1.47)$$

把(1.42)式右边使用平面波展成球面波迭加的 Bauer 公式可得

$$E_r^{(i)} = \frac{i}{mkr} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n (2n+1) j_n(mkr) p_n^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi \quad (1.48)$$

从上式开始,到(1.58)式为止, k 和 m 的下标暂不书写。

对(1.27)式左边以(1.48)代之,右边令

$$\Phi^{(i)} = \sum \alpha_n j_n(mkr) p_n^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi \quad (1.49)$$

经推演,(1.27)式可化为一个球贝塞耳方程。系数 α_n 根据球贝塞耳函数存在有意义解的条件确定为

$$\alpha_n = \frac{(-i)^n (2n+1)}{n(n+1)} \quad (1.50)$$

代回(1.49)式后,即得到我们所需要的 $\Phi^{(i)}$ 的具体函数形式为

$$\Phi^{(i)} = \sum \frac{(-i)^n (2n+1)}{n(n+1)} j_n(mkr) p_n^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi \quad (1.51)$$

同样方法可求得入射波另一标量位势 $\Phi^{m(i)}$ 的具体函数形式为

$$\Phi^{m(i)} = \sum \frac{(-i)^n (2n+1)}{n(n+1)} j_n(mkr) p_n^{(1)}(\cos \theta) \sin \varphi \quad (1.52)$$

折射波是由入射波造成的,故可设折射波标量位势类似于入射波标量位势,但要乘上一个系数 c_n 或 d_n 。另外,在球内的解只能取球贝塞耳函数,因此可设

$$\Phi^{(r)} = \sum \alpha_n c_n j_n(mkr) p_n^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi \quad (1.53)$$

$$\Phi^{m(r)} = \sum \alpha_n d_n j_n(mkr) p_n^{(1)}(\cos \theta) \sin \varphi \quad (1.54)$$

散射波也是由入射波造成的。考虑到散射波在球外面,因此解中应取第二类球汉克函数,于是散射波标量位势的表达式可写为

$$\Phi^{(s)} = \sum \alpha_n a_n h_n^{(2)}(mkr) p_n^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi \quad (1.55)$$

$$\Phi^{m(s)} = \sum \alpha_n b_n h_n^{(2)}(mkr) p_n^{(1)}(\cos \theta) \sin \varphi \quad (1.56)$$

上面两式中的系数 a_n, b_n 要通过边值关系来确定。为了使确定系数 a_n, b_n 的函数表达式具有更对称的形式,引入 Riccati-Bessel 函数,它定义为

$$\psi_n(mkr) = mkr j_n(mkr) \quad (1.57)$$

$$W_n(mkr) = mkr h_n^{(2)}(mkr) \quad (1.58)$$

在入射波、折射波和散射波的标量位势表达式中,相应介质的复折射指数和该介质中的波数都分别以下标 1 或 2 标明。根据边值关系(1.34)~(1.37)式,其中 $\Phi^{(i)}$ 、 $\Phi^{m(i)}$ 、 $\Phi^{(r)}$ 、 $\Phi^{m(r)}$ 、

$\Phi^{(s)}$ 、 $\Phi^{m(s)}$ 各量用上面(1.51)~(1.56)式代入,经运算后可得

$$a_n = \frac{m_1 \psi_n(m_1 k_1 a) \psi'_n(m_2 k_2 a) - m_2 \psi'_n(m_1 k_1 a) \psi_n(m_2 k_2 a)}{m_1 W_n(m_1 k_1 a) \psi'_n(m_2 k_2 a) - m_2 W'_n(m_1 k_1 a) \psi_n(m_2 k_2 a)} \quad (1.59)$$

$$b_n = \frac{m_2 \psi_n(m_1 k_1 a) \psi'_n(m_2 k_2 a) - m_1 \psi'_n(m_1 k_1 a) \psi_n(m_2 k_2 a)}{m_2 W_n(m_1 k_1 a) \psi'_n(m_2 k_2 a) - m_1 W'_n(m_1 k_1 a) \psi_n(m_2 k_2 a)} \quad (1.60)$$

(1.59)和(1.60)式就是系数 a_n 、 b_n 的函数表达式。若重新定义球外介质中的波数 k 为

$$k = m_1 k_1 \quad (1.61)$$

并令符号 m 为

$$m = \frac{m_2}{m_1} \quad (1.62)$$

则系数 a_n 、 b_n 的表达式还可以进行简化。

将(1.50)式确定的 a_n 值代入(1.55)和(1.56)式中,并注意到(1.61)式,就可以写出散射波标量位势的完整表达式,即

$$\Phi^{(s)} = - \sum (-i)^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} a_n h_n^{(2)}(kr) p_n^{(1)}(\cos\theta) \cos\varphi \quad (1.63)$$

$$\Phi^{m(s)} = - \sum (-i)^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} b_n h_n^{(2)}(kr) p_n^{(1)}(\cos\theta) \sin\varphi \quad (1.64)$$

当 $r \gg a$ 时,以 $h_n^{(2)}(kr)$ 的渐近式代入上面两式中后,可得

$$\Phi^{(s)} = - \frac{ie^{-ikr}}{kr} \sum \frac{2n+1}{n(n+1)} a_n p_n^{(1)}(\cos\theta) \cos\varphi \quad (1.65)$$

$$\Phi^{m(s)} = - \frac{ie^{-ikr}}{kr} \sum \frac{2n+1}{n(n+1)} b_n p_n^{(1)}(\cos\theta) \sin\varphi \quad (1.66)$$

三、散射波的电场、能流密度、侧向和后向散射截面

将(1.65)和(1.66)式代入(1.28)式,并使用下面的符号

$$\pi_n(\theta) = \frac{p_n^{(1)}(\cos\theta)}{\sin\theta} \quad (1.67)$$

$$\tau_n(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} p_n^{(1)}(\cos\theta) \quad (1.68)$$

则可得

$$E_\theta^{(s)} = - \frac{ie^{-ikr}}{kr} \sum \frac{2n+1}{n(n+1)} [b_n \pi_n(\theta) + a_n \tau_n(\theta)] \cos\varphi \quad (1.69)$$

同样方法,通过(1.29)式可确定

$$E_\varphi^{(s)} = \frac{ie^{-ikr}}{kr} \sum \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\theta) + b_n \tau_n(\theta)] \sin\varphi \quad (1.70)$$

$H_\theta^{(s)}$ 、 $H_\varphi^{(s)}$ 的函数表达式,可以用类似方法求得。并且可以证明 $E_r^{(s)} = 0$, $H_r^{(s)} = 0$, 即散射波是横波。

若令

$$S_1(\theta) = \sum \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\theta) + b_n \tau_n(\theta)] \quad (1.71)$$

$$S_2(\theta) = \sum \frac{2n+1}{n(n+1)} [b_n \pi_n(\theta) + a_n \tau_n(\theta)] \quad (1.72)$$

式中 $S_1(\theta)$ 、 $S_2(\theta)$ 称为振幅函数, 则(1.69)和(1.70)式可写为

$$E_\theta^{(s)} = -\frac{ie^{-ikr}}{kr} S_2(\theta) \cos\varphi \quad (1.73)$$

$$E_\varphi^{(s)} = -\frac{ie^{-ikr}}{kr} S_1(\theta) \sin\varphi \quad (1.74)$$

恢复时间因子, 省略上标(s)后, 得

$$E_\theta = -\frac{ie^{-i(kr-\omega t)}}{kr} S_2(\theta) \cos\varphi \quad (1.75)$$

$$E_\varphi = \frac{ie^{-i(kr-\omega t)}}{kr} S_1(\theta) \sin\varphi \quad (1.76)$$

由图 1.1 可见, 若观测者位于 p 点, 他只能接收到沿 $\vec{R}$ 方向传播的散射场。我们称包含 z 和 $\vec{R}$ 矢量在内的平面为观测平面。 p 点观测者接收到的散射电场中平行于此平面的散射电场分量简称为平行分量, 以 $E_{\parallel}$ 表示。由于散射波是横波, 故有 $E_{\parallel} = E_\theta$ 。 p 点观测者接收到的散射电场中垂直于观测平面的分量, 称为正交分量, 以 $E_{\perp}$ 表示。显然, $E_{\perp} = -E_\varphi$ 。在 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, 观测者只能接收到散射电场正交分量, 且可得 $E_\varphi = \frac{ie^{-i(kr-\omega t)}}{kr} S_1(\theta)$ 。这时 E_φ 获得最大值。而在 $\varphi = 0$ 时, 观测者只能接收到散射电场的平行分量, 且 $E_\theta = \frac{-ie^{-i(kr-\omega t)}}{kr} S_2(\theta)$ 。这时 E_θ 获得最大值。

从(1.39)式开始的以下推导中, 都假定了入射波电场振幅为单位值。当入射波电场振幅不等于单位值而等于 E_0 时, 表示散射场的表达式(1.75)和(1.76)也都应乘以 E_0 。下面的讨论都认为入射波电场振幅为 E_0 。

在 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 的观测平面上, 观测者接收到的散射电磁场的能流密度为

$$S_1 = \frac{c}{8\pi} E_\varphi \cdot E_\varphi^* = \frac{c}{8\pi} \frac{E_0^2}{k^2 r^2} S_1(\theta) S_1^*(\theta) \quad (1.77)$$

式中 E_φ^* 和 $S_1^*(\theta)$ 分别表示 E_φ 和 $S_1(\theta)$ 的共轭复函数。假如球形粒子向空间任意方向的散射, 都是以 S_1 这样大小的能流密度进行的, 则总散射功率为

$$P_1 = 4\pi r^2 S_1 = \frac{cE_0^2}{2k^2} S_1(\theta) S_1^*(\theta) \quad (1.78)$$

我们知道, 入射波能流密度是

$$S_0 = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \quad (1.79)$$

于是可以定义侧向散射截面 $\sigma_1(\theta)$ 这样一个物理量, 它乘以入射波能流密度后的值, 正好等于(1.78)式所给出的值, 即有 $\sigma_1(\theta) \times S_0 = P_1$ 。把(1.78)和(1.79)式代入此式后, 得

$$\sigma_1(\theta) = \frac{4\pi}{k^2} S_1(\theta) \cdot S_1^*(\theta) \quad (1.80)$$

在 $\varphi = 0$ 的观测平面上, 观测者接收到的散射电磁场的能流密度为

$$S_2 = \frac{c}{8\pi} E_\theta \cdot E_\theta^* = \frac{c}{8\pi} \frac{E_0^2}{k^2 r^2} S_2(\theta) \cdot S_2^*(\theta) \quad (1.81)$$

式中 E_θ^* 和 $S_2^*(\theta)$ 分别表示 E_θ 和 $S_2(\theta)$ 的共轭复函数。假如球形粒子向空间任意方向都以 S_2 这样大小的能流密度进行散射, 则总散射功率为

$$P_2 = 4\pi r^2 S_2 = \frac{CE_0^2}{2k^2} S_2(\theta) \cdot S_2^*(\theta) \quad (1.82)$$

我们同样可以定义一个侧向散射截面 $\sigma_2(\theta)$ ，它乘以入射波能流密度后的值，正好等于 (1.82) 式所给出的值，即有 $\sigma_2(\theta) \cdot S_0 = P_2$ 。将 (1.79) 和 (1.82) 式代入此式后，得

$$\sigma_2(\theta) = \frac{4\pi}{k^2} S_2(\theta) S_2^*(\theta) \quad (1.83)$$

显然， $\sigma_1(\theta)$ 和 $\sigma_2(\theta)$ 都具有面积的量纲，故称它们为“截面”。

空间任一点 $p(r, \theta, \varphi)$ 处的观测者接收到的总散射能流密度为 $S = S_{\perp} + S_{\parallel}$ ，而

$$S_{\perp} = \frac{C}{8\pi} E_{\perp} \cdot E_{\perp}^* = \frac{C}{8\pi} E_{\varphi} \cdot E_{\varphi}^* = \frac{S_0 \sigma_1(\theta)}{4\pi r^2} \sin^2 \varphi \quad (1.84)$$

$$S_{\parallel} = \frac{C}{8\pi} E_{\parallel} \cdot E_{\parallel}^* = \frac{C}{8\pi} E_{\theta} \cdot E_{\theta}^* = \frac{S_0 \sigma_2(\theta)}{4\pi r^2} \cos^2 \varphi \quad (1.85)$$

故

$$S = \frac{S_0}{4\pi r} (\sigma_1(\theta) \sin^2 \varphi + \sigma_2(\theta) \cos^2 \varphi) \quad (1.86)$$

由 (1.86) 式可知，引入侧向散射截面后，空间任意方向的散射能流密度的表达式就具有简明的形式。

据球函数性质可以得到

$$-\pi_n(\pi) = \tau_n(\pi) = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} \quad (1.87)$$

当 $\theta = \pi$ 时，运用上式结果，则 (8.71)、(8.72) 式可写为

$$-S_1(\pi) = \frac{1}{2} \Sigma (-1)^n (2n+1) (a_n - b_n)$$

$$S_2(\pi) = \frac{1}{2} \Sigma (-1)^n (2n+1) (a_n - b_n)$$

所以有

$$-S_1(\pi) = S_2(\pi) = \frac{1}{2} \Sigma (-1)^n (2n+1) (a_n - b_n) \quad (1.88)$$

另外，据 (1.80) 和 (1.83) 式，在 $\theta = \pi$ 时有

$$\sigma_1(\pi) = \frac{4\pi}{k^2} S_1(\pi) S_1^*(\pi)$$

$$\sigma_2(\pi) = \frac{4\pi}{k^2} S_2(\pi) S_2^*(\pi)$$

再据 (1.88) 式有 $\sigma_1(\pi) = \frac{4\pi}{k^2} [-S_2(\pi)] [-S_2^*(\pi)] = \frac{4\pi}{k^2} S_2(\pi) S_2^*(\pi)$ ，故

$$\sigma_1(\pi) = \sigma_2(\pi) = \sigma(\pi) \quad (1.89)$$

现在 $\theta = \pi$ 方向是入射波来的方向，即“后向”，因此 $\sigma(\pi)$ 称为后向散射截面。从侧向散射截面的定义可以了解到后向散射截面是这样—个物理量：它乘以入射波能流密度后，正好等于以 $S(\pi)$ 大小的能流密度向四面八方散射的总功率，故有

$$S(\pi) = \frac{S_0}{4\pi r^2} \sigma(\pi) \cdot$$

$$\sigma(\pi) = \frac{4\pi r^2 S(\pi)}{S_0} \quad (1.90)$$

后向散射截面也叫作雷达截面。

据(1.88)式可得 $S_2(\pi) \cdot S_2^*(\pi) = \left| \frac{1}{2} \Sigma (-1)^n (2n+1)(a_n - b_n) \right|^2$ 。另外,据(1.80)、(1.83)及(1.89)式有 $\sigma(\pi) = \frac{4\pi}{k^2} S_1(\pi) S_1^*(\pi) = \frac{4\pi}{k^2} S_2(\pi) S_2^*(\pi)$ 。因此,后向散射截面的函数表达式可写为

$$\sigma(\pi) = \frac{\pi}{k} \left| \Sigma (-1)^n (2n+1)(a_n - b_n) \right|^2 \quad (1.91)$$

四、散射截面、衰减截面和吸收截面

当有散射粒子存在时,空间任一点处的电磁场应是入射场和散射场之和,即

$$\begin{aligned} \vec{E}_s &= \vec{E}^{(i)} + \vec{E}^{(s)} \\ \vec{H}_s &= \vec{H}^{(i)} + \vec{H}^{(s)} \end{aligned} \quad (1.92)$$

这时,任一点处的能量密度为 $\vec{S}_s = \frac{c}{8\pi} R_e(\vec{E}_s \times \vec{H}_s^*) = \frac{c}{8\pi} R_e[(\vec{E}^{(i)} + \vec{E}^{(s)}) \times (\vec{H}^{(i)} + \vec{H}^{(s)})]$, 该点沿 $\vec{R}$ 方向的分量应为

$$\begin{aligned} \vec{S}_R &= \frac{c}{8\pi} R_e[(\vec{E}_i + \vec{E}_s + \vec{E}_i + \vec{E}_s) \times (\vec{H}_i + \vec{H}_s + \vec{H}_i + \vec{H}_s)^*] \\ &= \frac{c}{8\pi} R_e[(E_i H_i^* - E_s H_s^*) + (E_i H_s^* - E_s H_i^*) + \\ &\quad (E_i H_s^* - E_s H_i^* + E_i H_i^* - E_s H_s^*)] \end{aligned} \quad (1.93)$$

作一个与散射球同心的大球面,然后对(1.93)式进行积分。左边积分值表示净外流功率,它是负值,故用 $-P_s$ 表示。它实际上代表散射球的吸收功率。对右边第一项积分因为考虑的是入射波的净外流功率,故积分值为零。对右边第二项积分是给出了粒子散射到球面外去的总散射功率,以 P_s 表示。右边第三项的积分值,我们先以符号 $-P_a$ 表示之。于是有 $-P_s = 0 + P_s - P_a$, 即

$$P_i = P_s + P_a \quad (1.94)$$

由上式可见, P_i 代表了由于质点散射和吸收作用而从入射波中移走的总功率,它称为衰减功率。

通过演算可以得到

$$P_i = \frac{cE_0^2}{4k^2} R_e \Sigma (2n+1)(a_n + b_n) \quad (1.95)$$

$$P_i = \frac{CE_0^2}{4k^2} \Sigma (2n+1)(|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad (1.96)$$

所谓质点的散射截面、吸收截面和衰减截面,分别是质点的散射功率、吸收功率和衰减功率与入射波乌-坡矢量的比值,即

$$Q_s = \frac{P_s}{S_0} = \frac{2\pi}{k^2} R_e \Sigma (2n+1)(a_n + b_n) \quad (1.97)$$

$$Q_i = \frac{P_i}{S_0} = \frac{2\pi}{k^2} \Sigma (2n+1)(|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad (1.98)$$

$$Q_a = \frac{P_a}{S_0} = Q_i - Q_s \quad (1.99)$$

这些截面都具有面积因子,它们都代表一些等效截面。例如,质点的衰减作用就等效于大小为 Q_i 的一块面积从入射波中截去的电磁能流。

§ 1.2 小旋转椭球体对电磁波的散射^[3]

气象上有些降水质点如大水滴、冰粒、冰雹、雪花等都不是呈圆球状的,所以,还需要了解质点形状变化对散射的影响。由于降水粒子形状复杂,要按它们的实际形状分别处理很困难,只能就非球状质点最主要的特点,即非球对称进行一些分析讨论。最简单的情况是旋转椭球体。使用波动方程去研究椭球体的散射问题。由于边界形状是椭球体面,为了便于分离变量故应采用椭球坐标。椭球坐标如图 1.2 所示。

一、椭球坐标系

椭球坐标和直角坐标之间有如下联系

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1 \quad (a > b > c) \quad (1.100)$$

这个方程是 u 的三次方程,它必定有三个实根 ξ, η, ζ , 分别在下面的范围内

$$\xi \geq -c^2, -c^2 \geq \eta \geq -b^2, -b^2 \geq \zeta \geq -a^2 \quad (1.101)$$

我们称这三个根 (ξ, η, ζ) 就是与点 (x, y, z) 相对应的椭球坐标,它的几何意义可以由这样的事实来认识,即 ξ, η, ζ 可分别为常数的那些面,就是分别代表一系列和椭球同心的椭球面、单叶双曲面和双叶双曲面,如图 1.2 所示。

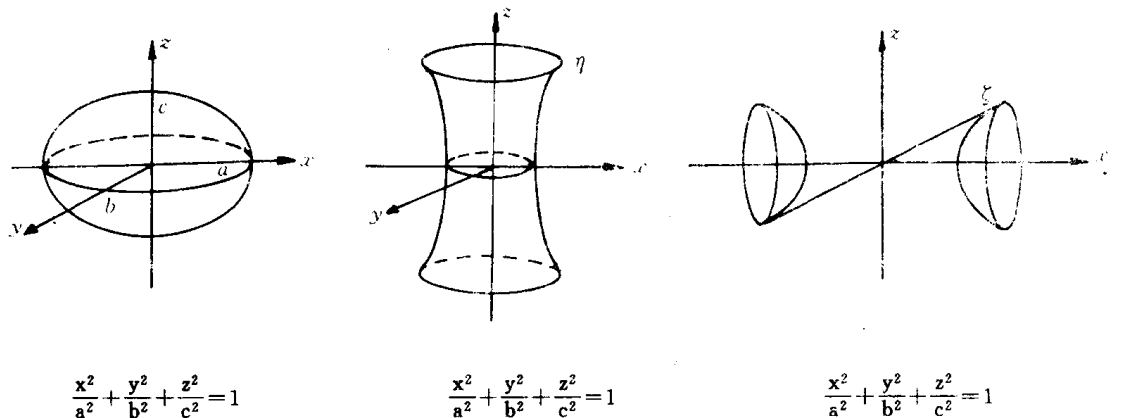


图 1.2 椭球坐标

可以证明这三个曲面是互相正交的,所以 ξ, η, ζ 也是正交曲线坐标。

由椭球坐标转为直角坐标的关系式为

$$\begin{aligned} x &= \pm \left[\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)(\zeta + a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ y &= \pm \left[\frac{(\xi + b^2)(\eta + b^2)(\zeta + a^2)}{(a^2 - b^2)(c^2 - b^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ z &= \pm \left[\frac{(\xi + c^2)(\eta + c^2)(\zeta + c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.102)$$