大学数学学习指导

离散数学

—方法导引

李为鉴 编著

复旦大学出版社

大学数学学习指导

离散数学

——方法导引

李为鑑　编著

复旦大学出版社

内 容 简 介

本书就离散数学的四个主要部分——集合论、数理逻辑、图论、代数结构——介绍有关的概念、定理及其学习方法。为使读者更好地理解这些内容，全书给出了200个有相当代表性的例题，每个例题都有详细的分析和解答。同时还配备了350个习题及其参考性提示。

本书可用作大专院校离散数学课程的教学参考书和应考研究生复习离散数学的辅导读物，也可供广大从事计算机研究和应用的有关人员阅读。

离 散 数 学

——方法导引

李为鑑 编著

复旦大学出版社出版

(上海国权路579号)

新华书店上海发行所发行　　复旦大学印刷厂印刷

开本850×1168 1/32　印张9.625　字数249,000

1990年1月第1版　1990年1月第1次印刷

印数1—4,000

ISBN 7-309-00362-4/O·66

定价：2.55元

前　言

离散数学是高等学校计算科学专业的核心课程，不少高等学校的数学、物理、管理科学和经济科学等的某些专业也相继开设了离散数学课程，这是广泛使用计算机的需要，因而已成为一种趋势。编者不时收到一些大学生、研究生报考者以及离散数学自学者的来信，其中多半涉及到对离散数学中某些概念和定理的理解以及一些习题的解法。本书就是为了适应离散数学教学和自学的这一需要而编写的。

离散数学主要包括集合论、数理逻辑、图论和代数结构这四个部分。本书也就相应地分成这四部分来编写。每一部分都简要地介绍了有关概念和定理，使其起到帮助读者复习的作用。由于本书是辅导性读物，因而就不再重述教科书上对定理的详细证明，而把注意力放在对概念和定理的理解上。为此，书中还给出了足够数量的有代表性的例题，每个例题都有详细的分析和解答。除此以外，全书还配备了相当多的习题及其参考性提示。如果本书的这些努力能对读者有所帮助和启迪，编者将感到莫大的宽慰。

由于编者的水平有限，错误和不当之处在所难免，恳切地希望读者对本书提出宝贵的意见。

编　者

目　录

第一部分　集　合　论

第二部分　数理逻辑

第三部分 图 论

第四部分 代 数 结 构

第一部分　集　合　论

一、概念和例题

1. 集合的概念

集合是数学中的一个原始概念(基本概念)，故不必再用别的概念来给出它的定义。人们在研究或考察某些对象时，通常把这些对象的全体称为集合，而把集合中的对象称为该集合中的*元素*。由有限个元素组成的集合称为*有限集*，由无限个元素组成的集合称为*无限集*。

这里,有一点是需要特别指明的,那就是集合中的元素是确定的。也就是说，如果 A 是某个集合,那么,客观世界的任一对象 a，要么 $a\in A$,要么 $a\notin A$,两者必居其一。

如果集合 B 中的任一元素都是集合 A 中的元素,则称 B 是 A 的*子集*,记为 $B\subseteq A$。如果 $B\subseteq A$ 且有元素 a,使 $a\in A$,$a\notin B$,则称 B 是 A 的*真子集*,记为 $B\subset A$。

集合的表示方法有两种,一种是"枚举法"，例如，$A=\{2,4,6,8,\cdots\}$；另一种是"描述法",例如,$A=\{x|x$ 为正偶数$\}$。前一种方法是显式表示,用后一种方法时,集合可一般地表示成

$$A=\{x|p(x)\}。$$

它的意思是,集合 A 由那些满足性质 p 的元素所组成。必须注意，不适当地使用这后一种方法会导致悖论。例如，C 是一个由集合作为元素所组成的集合，表示成

$$C=\{x|x\text{ 是集合且 }x\notin x\}。$$

我们要问 $C\in C$ 还是 $C\notin C$？如果认为 $C\in C$， 那么由 C 的定义可知 $C\notin C$；反之,如果认为 $C\notin C$,那么由 C 的定义可知 $C\in C$。这就是所谓的罗素悖论。为了避免出现罗素悖论，只要规定所构造的集合只能作为已经构造出来的集合的子集就可以了。也就是说，我们只能这样

来定义一个集合 C：

$$C=\{x|x\in A, x\text{具有某些性质}\}。$$

而这里的 A 是一个已经构造出来的确定集合。这样，我们就不可能构造出包含所有集合的集合。

为此，我们总把所考虑的对象限制在一定的范围内，在这个限定范围内的所有对象的全体所组成的集合就称为全集，记为 E。这样，我们所考察的任何一个集合 A 都只能是 E 的子集，即 $A\subseteq E$。于是，在我们讨论的范围内，对于任一元素 a 来说，或者是 $a\in A$，或者是 $a\in E-A=\overline{A}$（称为 A 的绝对补）。

关于空集 ϕ，它也是一个集合，只是在这个集合中不含有任何一个元素。显然，空集 ϕ 与仅以空集作为元素的集合 $\{\phi\}$ 是有区别的。这好比，一只空口袋与一只装有另一只空口袋的口袋是不一样的。容易证明，空集 ϕ 是任一集合的子集，也就是说，对于任一集合 A，必有 $\phi\subseteq A$。

2. 集合的运算

集合的基本运算有以下几种。对于任意两个集合 A、B，

A 与 B 的交：$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\}$；

A 与 B 的并：$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}$；

B 关于 A 的补，即相对补（亦称 A 与 B 的差）：

$$A-B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\notin B\}；$$

A 与 B 的对称差：$A\oplus B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\notin B \text{ 或 } x\in B \text{ 且 } x\notin A\}$；

A 和 B 这两个集合是相等的，当且仅当它们具有完全相同的元素。

关于集合的相等，有这样一个重要定理，两个集合相等当且仅当这两个集合互为子集，即 $A=B\Longleftrightarrow A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$。这个结论为我们证明集合的等式提供了一种有效的方法，特别是对于一些最基本的集合等式的证明，尤为如此。例如，等式 $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$ 可证明如下：

对于任意的 $x\in A\cap(B\oplus C)$，有

$$x \in A \text{ 且 } \begin{cases} x \in B, x \notin C \\ \quad \text{或} \\ x \in C, x \notin B。 \end{cases}$$

所以，$x \in A \cap B$ 且 $x \notin A \cap C$ 或 $x \in A \cap C$ 且 $x \notin A \cap B$，即有

$$x \in (A \cap B) \oplus (A \cap C)。$$

故有 $$A \cap (B \oplus C) \subseteq (A \cap B) \oplus (A \cap C)。$$

反之，对于任意的 $x \in (A \cap B) \oplus (A \cap C)$，有

$x \in A \cap B$ 且 $x \notin A \cap C$ 或 $x \in A \cap C$ 且 $x \notin A \cap B$，即有

$x \in A$ 且 $x \in B$，但 $x \notin A \cap C$，由此可见，$x \notin C$，即得 $x \in B - C$，所以，$x \in A$ 且 $x \in B - C$，或者

$x \in A$ 且 $x \in C$，但 $x \notin A \cap B$，由此可见，$x \notin B$，即得 $x \in C - B$，所以，$x \in A$ 且 $x \in C - B$。

综上所述，应有

$$x \in A \text{ 且 } \begin{cases} x \in B - C \\ \quad \text{或} \\ x \in C - B。 \end{cases}$$

也就是 $$x \in A \cap ((B - C) \cup (C - B)) = A \cap (B \oplus C)。$$

故有 $$(A \cap B) \oplus (A \cap C) \subseteq A \cap (B \oplus C)。$$

因此 $$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)。$$

下面给出了一些基本的集合等式，这些等式有的是十分明显的，有的可以通过上述方法得到证明。

$A \cap A = A$，$A \cup A = A$；

$A \cap B = B \cap A$，$A \cup B = B \cup A$，$A \oplus B = B \oplus A$；

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$，$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，

$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

$A \cap (A \cup B) = A$，$A \cup (A \cap B) = A$；

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$，$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$；

$A \cup \phi = \phi$，$A \cup E = E$；

$A \cap E = A$, $A \cup \phi = A$;

$A \oplus \phi = A$, $A \oplus E = E - A$, $A \oplus A = \phi$。

以及

$\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{E} = \phi$, $\overline{\phi} = E$;

$A \cup \overline{A} = E$, $A \cap \overline{A} = \phi$;

$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$。

用前面的方法去证明集合等式有时是比较繁琐的。当我们已经有了一些基本的集合等式后，往往可以利用这些等式去证明其它的集合等式。

譬如说，我们可以用上述方法先证明等式 $A - B = A \cap \overline{B}$，利用该等式便可得 $A \oplus B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$，在此基础上，再利用交、并运算的分配律等，就可证明上例的等式，这是因为

$$
\begin{aligned}
(A \cap B) \oplus (A \cap C) &= ((A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)}) \cup (\overline{(A \cap B)} \\
&\qquad \cap (A \cap C)) \\
&= ((A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})) \cup ((\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cap C)) \\
&= (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap A \cap C) \cup (\overline{B} \cap A \cap C) \\
&= \phi \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup \phi \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \\
&= (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \\
&= A \cap ((B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)) \\
&= A \cap (B \oplus C)。
\end{aligned}
$$

例 1 对于任意集合 A, B, C，以下结论成立吗？

(1) 若 $A \in B$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \in C$；

(2) 若 $A \in B$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$；

(3) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \in C$，则 $A \in C$；

(4) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \in C$，则 $A \subsetneq C$；

(5) 若 $A \in B$ 且 $B \nsubseteq C$，则 $A \notin C$；

(6) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \notin C$，则 $A \notin C$。

分析 集合是一个很广泛的概念，任两集合 A 与 B 之间可能有这样几种关系：(i) A 中的元素与 B 中的元素完全相同，即 $A=B$；(ii) A 中的元素都是 B 中的元素，即 $A\subseteq B$；(iii) A 作为一个元素参加到 B 中，即 $A\in B$；(iv) A 与 B 没有公共元素，即 $A\cap B=\phi$；(v) $A\cap B\neq\phi$ 且 $A-B\neq\phi$、$B-A\neq\phi$。

本题就是在A,B,C三个集合满足一定的关系的情况下，要你断定结论是否正确。解答这类题目的基本方法是：如果结论是正确的，就应作出详细证明；如果结论并非一定正确，就应举出反例加以说明。

解 (1) 正确。

因为 B 是 C 的子集，即 B 中任一元素都是 C 中的元素，而 A 是 B 中的元素，所以 A 必是 C 中的元素。

(2) 不一定正确。例如

$$A=\{0,1\},B=\{\{0,1\},2\},C=\{\{0,1\},2,3\},$$

显然有 $A\in B$ 且 $B\subseteq C$，但 A 中的任一元素都不是 C 中的元素，因此，$A\nsubseteq C$。

(3) 不一定正确。例如

$$A=\{1\},B=\{1,2\},C=\{\{1,2\},3\},$$

显然有 $A\subseteq B$ 且 $B\in C$，但 $A\notin C$。

(4) 不一定正确。同(3)中例。

(5) 不一定正确。例如

$$A=\{1\},B=\{\{1\},2\},C=\{\{1\},3\},$$

显然有 $A\in B$ 且 $B\nsubseteq C$，但 $A\in C$。

(6) 不一定正确。例如

$$A=\{1\},B=\{1,2\},C=\{\{1,2\},3,\{1\}\},$$

显然有 $A\subseteq B$ 且 $B\nsubseteq C$，但 $A\in C$。 □

例 2 对于任意集合 A,B，试证明

$$\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\subseteq\mathscr{P}(A\cup B),$$

$$\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)=\mathscr{P}(A\cap B),$$

这里集合 $\mathscr{P}(A)$是 A 的幂集，即 $\mathscr{P}(A)=\{x|x\text{ 是 }A\text{ 的子集}\}$，并举例说明 $\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\neq\mathscr{P}(A\cap B)$。

分析 (1) A,B 是任意两个集合,因此,对 $A=B$ 或 $A\cap B=\phi$ 或 $A\subseteq B$ 等各种情况,都要考虑进去。(2) 应注意 $\mathscr{P}(A)$ 中包含 A 的平凡子集 ϕ 和 A。(3) 要证明集合的等式,应采用等式两端互相包含的方法。

证 先看一个例子。设 $A=\{1,2\}$,$B=\{2,3\}$,就有

$\mathscr{P}(A)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$,$\mathscr{P}(B)=\{\phi,\{2\},\{3\},\{2,3\}\}$,

故得 $\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\}\}$,但是

$\mathscr{P}(A\cup B)=\mathscr{P}(\{1,2,3\})=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},$
$\{1,3\},\{1,2,3\}\}$,

所以 $$\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\neq\mathscr{P}(A\cup B)。$$

其次证明 $$\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\subseteq\mathscr{P}(A\cup B)。$$

对于任意的两个集合 A、B,总有

$$A\subseteq A\cup B \text{ 和 } B\subseteq A\cup B,$$

故有 $$\mathscr{P}(A)\subseteq\mathscr{P}(A\cup B) \text{ 和 } \mathscr{P}(B)\subseteq\mathscr{P}(A\cup B),$$

因此 $$\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\subseteq\mathscr{P}(A\cup B)。$$

最后证明等式 $$\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)=\mathscr{P}(A\cap B)。$$

(1) 若 $A=B$,则等式显然成立。

(2) 若 $A\subseteq B$,则有 $A\cap B=A$ 和 $\mathscr{P}(A)\subseteq\mathscr{P}(B)$,所以

$$\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)=\mathscr{P}(A)=\mathscr{P}(A\cap B)。$$

(3) 若 $A\cap B=\phi$,则 $\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)=\{\phi\}=\mathscr{P}(A\cap B)$。

(4) 若 $A\cap B\neq\phi$ 且 $A-B\neq\phi$,$B-A\neq\phi$,那么

对于任一元素 $x\in\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)$,它表明 x 既是 A 的子集也是 B 的子集,故 x 必是 $A\cap B$ 的子集,即 $x\in\mathscr{P}(A\cap B)$,所以有 $\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)\subseteq\mathscr{P}(A\cap B)$。反之,对于任一元素 $x\in\mathscr{P}(A\cap B)$,它表明 x 是 $A\cap B$ 的子集,故 x 既是 A 的子集也是 B 的子集,即 $x\in\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)$,所以有 $\mathscr{P}(A\cap B)\subseteq\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)$。因此,$\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)=\mathscr{P}(A\cap B)$。 □

例3 对于集合 A,B,C,

(1) 由 $A\cup B=A\cup C$ 必有 $B=C$ 吗?

(2) 由 $A\cap B=A\cap C$ 必有 $B=C$ 吗?

(3) 由 $A\oplus B=A\oplus C$ 必有 $B=C$ 吗?

分析 此题与例 1 属于同一类型。如果成立就要给出证明；如果不一定成立就要举反例说明之。

解 (1) 不一定。例如：

$$A=\{1\},\ B=\{1,2\},\ C=\{2\},$$

$$A\cup B=\{1,2\}=B\cup C,\ 但\ B\neq C。$$

(2) 不一定，例如：

$$A=\{1\},B=\{1,2\},\ C=\{1,3\},$$

$$A\cap B=\{1\}=A\cap C,但\ B\neq C。$$

(3) 用反证法。假设 $B\neq C$，不妨设至少有一个元素 $x\in B$ 但 $x\notin C$，在这种情况下，

(i) 若 $x\in A$，则 $x\notin A\oplus B$，而 $x\in A\oplus C$，这就与 $A\oplus B=A\oplus C$ 相矛盾；

(ii) 若 $x\notin A$，则 $x\in A\oplus B$，而 $x\notin A\oplus C$，这也同样与 $A\oplus B=A\oplus C$ 相矛盾。

因此，由 $A\oplus B=A\oplus C$ 必定有 $B=C$。 □

例 4 对于任意的集合 A,B,C，试导出使等式

$$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$$

成立的充要条件。

分析 这无非是要找出集合 A,B,C 之间应满足的关系。

对于平凡的情况 $A=B=C$，等式自然成立。但是等式成立，并非一定要 $A=B=C$。例如 $A=\{1,2\},B=\{3\},C=\{2\}$，尽管这三个集合均不相等，然而，它们却可使等式成立。可见，$A=B=C$ 决不是使等式成立的必要条件。

若对上述等式的左边用分配律展开，而右边保持不变，则可得 $(A\cup C)\cap(B\cup C)=A\cap(B\cup C)$；若对等式的右边用分配律展开，而左边保持不变，则可得 $(A\cap B)\cup C=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。无论是前者还是后者，要使等式成立，只要 $A\cap C=C$ 即可，故不妨以 $C\subseteq A$ 一试。

解 若 $C\subseteq A$，则 $C\cup A=A$，故有

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)=A\cap(B\cup C)。$$

反之，若$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$，则对于任意的$x\in C$，必有$x\in(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$，故必有$x\in A$，因此，$C\subseteq A$。

由此可见，使$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$成立的充要条件应是$C\subseteq A$。 □

例 5 试证明$A-B=A-(A\cap B)$。

分析 证明集合的等式，一般可采用证明等式两边互相包含的方法。当然，也可利用已知的一些集合等式来证明。对于这个题目，我们不妨试着用两种方法来证明。

用第一种方法证明时，由于要证明的等式中有差运算，即相对补的运算，因此有可能要联系到绝对补。譬如说，$x\in A-B$，这就表明$x\in A$且$x\notin B$。由于我们的集合都是在一个全集中讨论的，如果$x\notin B$，那么必有$x\in\overline{B}$。

证 第一种方法：

设$x\in A-B$，则$x\in A$且$x\notin B$，因为$x\notin B$，所以$x\notin A\cap B$。这就表明$x\in A$且$x\notin A\cap B$，即$x\in A-(A\cap B)$，故有$A-B\subseteq A-(A\cap B)$。反之，设$x\in A-(A\cap B)$，则$x\in A$且$x\notin A\cap B$，即$x\in A$且$x\in\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$，所以，$x\in A$且$x\in\overline{A}$或$x\in\overline{B}$。因为$x\in A$且$x\in\overline{A}$不可能，所以只能有$x\in A$且$x\in\overline{B}$，即$x\in A$且$x\notin B$，故有$x\in A-B$，由此可得$A-(A\cap B)\subseteq A-B$。因此，$A-B=A-(A\cap B)$。

第二种方法：

我们已经知道，集合的交、并运算是相互满足分配律的，且有补运算的狄·摩根原理$\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$，此外，我们也容易证明$A-B=A\cap\overline{B}$。在此基础上，我们就可证明上述等式了，即

$$\begin{aligned}A-(A\cap B)&=A\cap\overline{(A\cap B)}=A\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\\&=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B})\\&=\phi\cup(A\cap\overline{B})=A\cap\overline{B}=A-B。\end{aligned}$$

这样的证明，简洁明了。然而，在没有给定哪些已知等式可以利用的情况下，还是采用第一种方法进行证明为妥。 □

例 6 证明以下三个式子是等价的：

(*a*) $A\subseteq B$； (*b*) $A\cap B=A$； (*c*) $A\cup B=B$。

分析 要证明这三个式子是等价的，实际上就是要证明它们之间是两两等价的，因此，只要证明，由(*a*)可推得(*b*)，由(*b*)可推得(*c*)，由(*c*)可推得(*a*)即可。

证 先证由(*a*)推得(*b*)。设 $A\subseteq B$成立。

对任意的 $x\in A$，由 $A\subseteq B$ 可知 $x\in B$，故有 $x\in A\cap B$，所以 $A\subseteq A\cap B$，另外，$A\cap B\subseteq A$ 是显然的。这就证明了 $A=A\cap B$。

再证由(*b*)推得(*c*)。设 $A\cap B=A$，

对任意的 $x\in A\cup B$，则 $x\in A$ 或 $x\in B$。若 $x\in A$，因 $A=A\cap B$，所以 $x\in A\cap B$，由此可得 $x\in B$，故有 $A\cup B\subseteq B$，另外，显然有 $B\subseteq A\cup B$。这就证明了 $A\cup B=B$。

最后再证由(*c*)推得(*a*)，设 $A\cup B=B$。对任意的 $x\in A$，就有 $x\in A\cup B$，而 $A\cup B=B$，所以 $x\in B$，这就证明了 $A\subseteq B$。

故 $A\subseteq B$，$A\cap B=A$，$A\cup B=B$ 这三个式子是等价的。 □

3. 集合的基数

集合的基数就是用来表示集合大小的一种概念，有的书上称它为集合的势，集合A 的基数通常用$|A|$来表示。两个集合的大小相等，就称这两个集合是等势的或称这两个集合有相同的基数。怎样来确定两个集合是等势呢？通常的办法是，如果在集合 A 与集合 B 的元素之间存在着一一对应的关系，则称 A 与 B 是等势的。

显然，对于有限集而言，只要两个集合中的元素个数是相等的，那么总可以在集合 A 与集合 B 的元素之间找到一一对应关系，因此，任何两个元素个数相等的集合都是等势的。可见，任何一个有限集与它的真子集是不可能等势的。

然而，对于无限集来说，情况就不一样了。譬如，自然数集$N=\{1,2,3,\cdots\}$，它的真子集$T=\{1,3,5,\cdots\}$。注意，决不能简单地认为 N

的元素比 T 的元素多，原因正在于它们都是无限集。事实上，可以由下式

$$t=2n-1, n\in N, t\in T$$

建立这两个集合中元素之间的一一对应关系，因此，N和 T是等势的。我们把自然数集 的基数用 $\aleph_0$ 来表示。一切与自然数集等势的集合称为可列集。

定理 1 一个集合为无限集的充要条件是它必有与其等势的真子集。

由此，我们可以严格地定义有限集与无限集为：一个集合，如果存在着与其等势的真子集，则称该集合为无限集，否则称该集合为有限集。

定理 2 任一无限集必含可列集。

定理 3 可列集的任一无限子集仍是可列集。

定理 4 可列个可列集之并集仍是一个可列集。

定理 5 有理数集是可列集。

由于任何一个无限集都含可列集，因此，可列集是无限集中基数最小的无限集。那么，是否有基数比 $\aleph_0$ 更大的无限集呢？回答是肯定的，例如，实数集 R 就是不可列的无限集。这可证明如下：

首先令

$$S=\{x\mid x\in R \text{ 且 } 0<x<1\}。$$

显然，$S\subseteq R$。

作函数 $f(x)=\frac{1}{\pi}\mathrm{tg}^{-1}x+\frac{1}{2}$，那么对于任一 $x\in R$，都有唯一的 $f(x)\in S$，因此，S 和 R 是等势的。

其次，可以证明 S 是不可列的。我们用反证法，假设 S 是可列的；即 S 中的元素可排列成

$$s_0, s_1, s_2, s_3, \cdots$$

因为 s_i 是(0,1)中的一个实数，所以 s_i 可表成

$$s_i=0.a_{i0}a_{i1}\cdots a_{in}\cdots$$

另外构造一个实数 $r=0.b_0b_1\cdots b_n\cdots\in S$，其中