数学物理方程

〔美〕Tyn Myint—U
杨年钧 姜广良 尤全德 编译
赵惠元 校

辽宁科学技术出版社

数学物理方程

〔美〕Tyn Myint—U
杨年钧　姜广良　尤全德　编译
赵惠元　　　　　　　　　校

辽宁科学技术出版社
一九八五年·沈阳

数学物理方程

Shuxue Wuli Fangcheng

〔美〕Tyn Myint—U

杨年钧　姜广良　尤全德　编译

赵惠元　校

辽宁科学技术出版社出版　（沈阳市南京街6段1里2号）

辽宁省新华书店发行　沈阳新华印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32　印张：14 1/8　字数：320,000

1985年5月第1版　1985年5月第1次印刷

责任编辑：董　平　制　图：崔雅娟

封面设计：栾录章　责任校对：王　莉

印数：1—7,400

统一书号：7288·15　定价：3.55 元

编译者说明

本书是根据美国Tyn Myint—U所著的《数学物理方程》编写而成的。

原著为美国 Manhattan 大学的教材。我们在教学中发现该书内容新颖，叙述简明扼要，随即译成中文并作为教材。但经过一段教学实践之后，又感到书中内容与我国高校教学的需要还有一定距离，而且某些推演及练习题答案有错误。

为提高教学效果，使它成为我国理工科研究生和高年级大学生的教材或参考书，我们对原著内容作了适当的增减：

原著第一、二章内容改编为数学模型；删去原第五章富里叶级数；增加了正交函数系一章；考虑到工科院校的需要，加强了特殊函数部分的内容；除原第八、九章外，其余各章都充实了一些内容。为了便于初学者掌握和工程技术人员的自学，除了在书中给出例题外，每章后面都附有练习题，并在书的最后附有练习题答案和典型题的详细解答。

书中带"*"的节，可以不讲（供有研究能力的学生阅读），因这对基本内容的掌握并无大的妨碍。

本书编译稿完成后，承蒙武汉大学数学系齐民友教授，东北工学院物理系杨德新教授，北京工业大学郑乃扬教授等阅过并提出不少宝贵意见，对此我们谨致衷心的谢意。

因编译者水平所限，错误难免，殷切期望读者随时给予批评指正。

编译者

1984年6月

目　　录

第一章　数学模型

1.1 引　言

所谓数学物理方程，是指在物理学、力学和工程技术问题的研究中，归结出来的一些偏微分方程（以及某些常微分方程和积分方程）.

微积分学产生以后，人们就设法把力学、物理学中的一些问题和规律，归结成微分方程进行研究. 例如，早在十八世纪初，人们就将弦线的横向振动问题归结成著名的弦振动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

并研究了它的解法. 因此，数学物理方程是一门历史悠久的学科. 由于它具有紧密地、直接地联系着许多自然现象的特点，生产和科学技术的发展所提出的新课题和新方法，不断地丰富和更新它的研究内容，也促进着许多相关联的数学分支的发展，并从它们之中引进许多解决问题的有力工具. 所以，数学物理方程又是纯数学的许多分支和自然科学各部门之间的一个桥梁，它的基本内容已成为广大科技工作者必备的基础知识.

数学物理方程研究的范围十分广泛，本书主要讲述一些简单的典型方程，即波动方程、热传导方程和拉普拉斯(Laplace)方程等. 因为一方面，这些方程很好的描述了一些典型的物理现象，能解决某些重要的问题；另一方面，通过这些问题的研究，

可以掌握一些方法，作为探讨新问题的参考。

1.2 经典方程

一个微分方程，如果除未知函数和自变量外，还含有未知函数的一个或几个偏导数时，称为偏微分方程。一般可以写成

$$f(x, y, \cdots, u, u_x, u_y, \cdots, u_{xx}, u_{xy}, \cdots) = 0 \quad (1.2.1)$$

的形式。

上节已提到，本书主要研究在数学物理问题中常出现的三种经典方程，它们三维的情形分别如下：

（1）波动方程

$$u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0$$

（2）热传导方程

$$u_t - k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0$$

（3）拉普拉斯方程

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

数学物理中的许多问题均可化归为偏微分方程，特别是以上列举的偏微分方程的求解问题。例如弹性体的振动、电磁波的传播、热的传导、粒子扩散等研究所归结出来的数学模型都属上类方程。我们的学习就从建立描述物理问题的这些数学模型开始。

1.3 弦 振 动

在数学物理中重要的问题之一便是弹性弦的振动问题。它简单而又常出现在数学物理的许多分支之中，使其在偏微分方程的理论中成为一个经典的例子。

设长度为 l，拉紧的两端固定的弹性弦。我们的问题是：对给定的初始扰动，确定弦上各点的运动规律，即建立描述弦上任一点x处在任意时刻 t，位移 $u(x, t)$ 所满足的方程。

为了能得到一个简单的方程我们做如下假定：

（1）弦是柔软和具有弹性的，即弦不能抵抗弯矩，因而弦上的张力总是沿着弦的振形的切线方向。

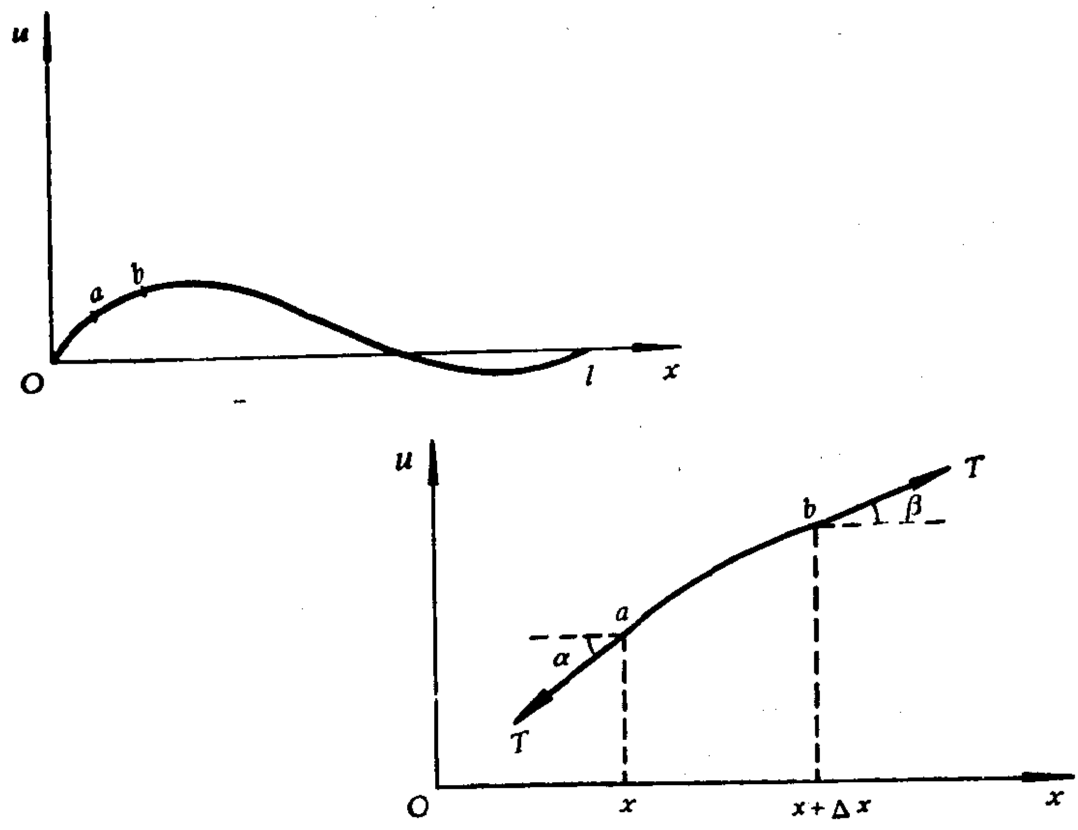

图 1.1

（2）振动弦的每一段没有伸长，因此由虎克(Hooke)定律，张力为定值。

（3）弦的重量远小于弦中的张力。

（4）弦的挠度远小于弦的长度。

（5）运动的弦在任意点的斜率远小于1。

（6）只有纯横向振动。

我们考虑弦的一个微元。令T为端点处的张力，如图1.1所示，沿铅直方向作用在这个微元上的力是

$$T\sin\beta - T\sin\alpha$$

由牛顿(Newton)第二定律，此合力等于质量乘以加速度。因此

$$T\sin\beta - T\sin\alpha = \rho\Delta s u_{tt} \tag{1.3.1}$$

其中ρ是密度，Δs是微元弦的弧长。因为运动弦的斜率是很小的，故有

$$\Delta s \approx \Delta x$$

因角 α 和 β 也很小，所以我们有

$$\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha, \quad \sin\beta \approx \mathrm{tg}\beta$$

于是（1.3.1）式变成

$$\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T}u_{tt} \tag{1.3.2}$$

但由微积分学我们知道，在时刻t

$$\mathrm{tg}\alpha = u_x(x,\ t)$$

$$\mathrm{tg}\beta = u_x(x+\Delta x,\ t)$$

于是，方程（1.3.2）便可写成

$$\frac{1}{\Delta x}[u_x(x+\Delta x,\ t) - u_x(x,\ t)] = \frac{\rho}{T}u_{tt}$$

令 $\Delta x \to 0$ 取极限，我们求得

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{1.3.3}$$

其中 $c^2 = \dfrac{T}{\rho}$. 方程（1.3.3）称一维波动方程。

如果在弦的每个单位长上作用有外力F，方程(1.3.3)将取

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f \tag{1.3.4}$$

的形式．其中 $f=\frac{F}{\rho}$．此处 F 可以是压力、万有引力、阻力等等．

1.4 膜振动

在数学物理的大量问题中会遇到膜振动方程．在推导膜振动方程之前，我们作类似于弦振动情形的某些简化假定：

（1）膜是柔软而有弹性的，即膜不抵抗弯矩，且膜上的张力总是沿着与膜的振形相切的方向．

（2）膜的每个单元没有伸张，因此，由虎克定律张力是定值．

（3）膜的重量远比膜的张力为小．

（4）膜的挠度远比膜的直径为小．

（5）运动的膜上任一点处沿任一方向的斜率远比 1 为小．

（6）只有纯横向振动．

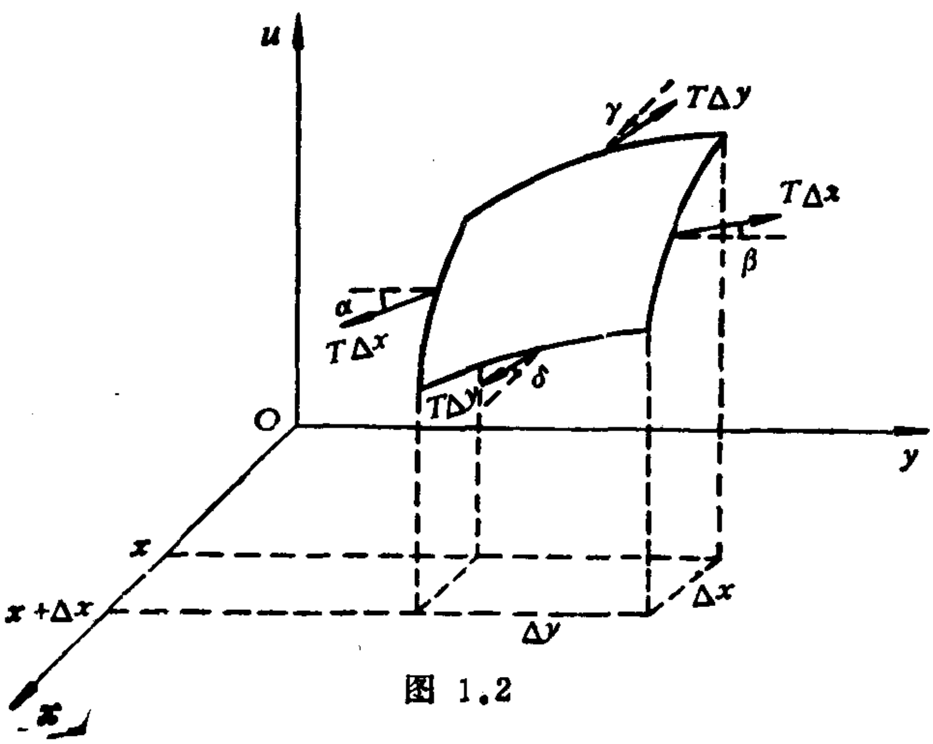

图 1.2

我们考察膜的任一小单元，因为挠度和斜率很小，这个单元的面积近似地等于 $\Delta x \cdot \Delta y$. 若T是每单位长的张力，则作用在此单元边缘上的张力为 $T\Delta x$和 $T\Delta y$（参看图1.2）.

沿铅直方向作用在膜的这个单元上的力为

$$T\Delta x\sin\beta - T\Delta x\sin\alpha + T\Delta y\sin\delta - T\Delta y\sin\gamma$$

因为斜率很小，这些角的正弦近似地等于该角的正切．于是合力成为

$$T\Delta x(\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha) + T\Delta y(\mathrm{tg}\delta - \mathrm{tg}\gamma)$$

由牛顿第二运动定律，这个合力等于质量乘以加速度．因此，得

$$T\Delta x(\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha) + T\Delta y(\mathrm{tg}\delta - \mathrm{tg}\gamma) = \rho\Delta A u_{tt} \quad (1.4.1)$$

其中 ρ 是每单位面积的质量，$\Delta A \approx \Delta x\Delta y$ 是这个单元的面积，u_{tt} 是在所考虑的区域上某点的加速度．而由微分学我们有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tg}\alpha = u_y(x_1,\ y)\\
&\mathrm{tg}\beta = u_y(x_2,\ y+\Delta y)\\
&\mathrm{tg}\gamma = u_x(x,\ y_1)\\
&\mathrm{tg}\delta = u_x(x+\Delta x,\ y_2)
\end{aligned}$$

其中x_1和 x_2 是在 x与 $x+\Delta x$之间的x值，y_1，y_2是 y 与 $y+\Delta y$之间的 y值．把上述各值代入（1.4.1）式中，我们得到

$$\begin{aligned}
&T\Delta x[u_y(x_2,\ y+\Delta y) - u_y(x_1,\ y)]\\
&\quad + T\Delta y[u_x(x+\Delta x,\ y_2) - u_x(x,\ y_1)]\\
&= \rho\Delta x\Delta y u_{tt}
\end{aligned}$$

除以 $\rho\Delta x\Delta y$ 便得

$$\frac{T}{\rho}\left[\frac{u_y(x_2,\ y+\Delta y) - u_y(x_1,\ y)}{\Delta y} + \frac{u_x(x+\Delta x,\ y_2) - u_x(x,\ y_1)}{\Delta x}\right] = u_{tt} \quad (1.4.2)$$

令Δx 和 Δy 趋于零，取极限，我们得

$$u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy}) \qquad (1.4.3)$$

其中 $c^2=\dfrac{T}{\rho}$. 这个方程称为二维波动方程.

如果每单位面积的膜上作用有外力F,方程（1.4.3）则取

$$u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy})+f \qquad (1.4.4)$$

的形式. 其中 $f=\dfrac{F}{\rho}$.

波动方程的一般形式可以写成

$$u_{tt}=c^2\nabla^2 u \quad 或 \quad u_{tt}=c^2\Delta u \qquad (1.4.5)$$

符号Δ或 ∇^2 叫做拉普拉斯算子. 它可以是一维，二维或三维等. 例如三维拉普拉斯算子表示

$$\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

相应的方程（1.4.5）称为三维波动方程. 在研究空间中的声波和电磁波的传播时都会出现三维波动方程.

1.5 固体中的热传导

我们考虑以闭曲面B^*为边界的区域D^*. 令$u(x, y, z, t)$ 为点(x, y, z)处 t 时刻的温度，若温度不为常数，热流由温度高处流向温度低处. 富里叶(Fourier) 定律指出，热流的速度与温度的梯度成正比. 因此在各向同性的物体中热流的速度是

$$v=-K\,\mathrm{grad}\,u \qquad (1.5.1)$$

其中K为常数，叫做物体的热传导系数.

令D为 D^* 中由闭曲面B围成的任意区域，于是每单位时间从D散发的热量总计为

$$\iint_B v_n ds$$

其中 $v_n = v \cdot n$ 是B 的单位外向法线上 v 的分量。于是由高斯(Gauss)定理

$$\iint_B v_n ds = \iiint_D \operatorname{div}(-K\operatorname{grad} u)\, dxdydz$$

$$= -K\iiint_D \nabla^2 u\, dxdydz \tag{1.5.2}$$

但D内的总热量又等于

$$\iiint_D \sigma\rho u\, dxdydz \tag{1.5.3}$$

这里ρ是物体的物质密度，σ是它的比热。假设积分与微分的次序可以交换，那么在D中热量的减少速度便是

$$-\iiint_D \sigma\rho\frac{\partial u}{\partial t} dxdydz \tag{1.5.4}$$

由于D中热量减少的速度必须等于每单位时间D内散发出的总热量，故对D^*中任意的D我们有

$$-\iiint_D \sigma\rho u_t\, dxdydz = -K\iiint_D \nabla^2 u\, dxdydz$$

或

$$\iiint_D \left[\sigma\rho\frac{\partial u}{\partial t} - K\nabla^2 u\right] dxdydz = 0 \tag{1.5.5}$$

我们假定被积函数是连续的。要是在D内某点(x_0, y_0, z_0)处被积函数不是零，那么由连续性，必将在点(x_0, y_0, z_0)附近的小区域中被积函数不是零，比如假定为正，那么在这个小区域上积分将不是零。由于D的任意性，若就取此小区域为D，其结果与（1.5.5）式矛盾。因此被积函数必须处处为零，即