1986

離散數學
原理及題解

王慶善 譯

含600個問題及解答

曉園出版社
世界圖书出版公司

序　　言

　　離散數學，有限系統的探討，在電腦時代推進的同時更顯出其重要。數位電腦基本上是一有限結構，且其許多性質可在有限數學系統的架構中得到解釋。本書可於離散數學的正規課程中當成教課書，或是所有目前的標準教材之補充資料。

　　前三章涵蓋了集合，關係和函數的標準題材。次章介紹向量和矩陣。而後有三章討論圖，有向圖，和樹狀圖。最後，有獨立的章節探討組合分析，代數系統，偏序集合和格子，命題計算，以及布林代數。在圖論的章節中包括平面性，可貫穿性，四色定理，最短路徑，和有限自動機的討論。在代數系統中亦處理形式語言和文法。並且，在布林代數的章節中，包含電路的討論和找最小選言正規形式之卡諾圖的用法。我們要強調，所有章節均寫得使其難易和連續性不因其順序而有所改變。

　　每章之開始，均對定義，原理和定理有明白的敘述並配以例題和其他描述的題材。其後接著已解答的和補充的問題集。這些已解答的問題例舉並加強了該章的題材，並包含定理的證明。補充的問題更豐富了對該章題材的回顧。最後並有與該章內容直接相關的電腦程式問題。這使本書更具彈性，對參考用提供了更有用的書，並激發更多在此課題中的興趣。

　　本書翻譯志在提供讀者更快速的學習路徑，以達事半

离散数学原理及题解

西摩、利普舒茨　著

王庆善　译

*

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司　重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

1993 年 11 月第　一　版　　开本：787×1245 1/20

1993 年 11 月第一次印刷　　印张：16

印数：0001－1000　　字数：25万字

ISBN：7－5062－1639－6/O·82

定价：12.40元（W_B9304/9）

功倍之效。然力求口語化的過程中，仍不免受原文之限，另外，原文中之幾處訛誤，譯者已予更正，但仍以原文為主，更正處則以括號說明。編譯雖是力求完美，而缺失在所難免，只望讀者不吝指正於再版時繼續更正，不勝感激。

王慶善
1986.6. 于台北

目　錄

第一章　集合理論

1. 集合與元素　1　／2. 宇集合，空集合　2　／3. 子集合　3　／4. 文氏圖　4　／5. 集合運算　4　／6. 集合的代數，對偶性　6　／7. 有限集合，計算原理　7　／8. 集合組，冪集合　9　／9. 論證和文氏圖　10　／10. 數學歸納法　11　／習題與解答　12　／補充題　20　／補充題解答　25

第二章　關　係

1. 簡介　29　／2. 積集合　29　／3. 關係　30　／4. 關係的圖形表示法　31　／5. 逆關係　33　／6. 合成關係　34　／7. 關係的性質　36　／8. 分割　37　／9. 等價關係　37　／10. 等價關係和分割　38　／11. 偏序關係　39　／12. n 元關係　40　／習題與解答　40　／補充題　49　／補充題解答　52

第三章　函　數

1. 簡介　55　／2. 函數　55　／3. 函數的圖形　56　／4. 一對一、映射和可逆函數　58　／5. 集合的索引組　60　／6. 計量性　61　／習題與解答　62　／補充題　72　／補充題解答　76

第四章　向量與矩陣

1. 簡介　79　／2. 向量　79　／3. 矩陣　80　／4. 矩陣加法與純量乘法　81　／5. 總和符號　83　／6. 矩陣乘法　84　／7. 轉置　85　／8. 方矩陣　86　／9. 可逆矩陣　87　／10. 行列式　88　／11. 可逆矩陣與行列式　89　／習題與解答　90　／補充題　100　／補充題解答　102

第五章　圖　論

1. 簡介　105　／2。圖與多圖　105　／3. 次　106　／4. 連結性　106　／5. 柯尼格斯柏橋，可貫穿的多圖　108　／6. 特殊圖　110　／7. 矩陣和圖　111　／8. 標註圖　113　／9. 同構圖　114　／習題與解答　114　／補充題　120　／補充題解答　124

第六章　平面圖，著色，樹狀圖

1. 簡介　127　／2. 地圖，地域　127　／3. 尤拉公式　128　／4. 非平面圖，庫爾托斯基定理　129　／5. 彩色圖　130　／6. 四色定理　131　／7. 樹狀圖　132　／8. 有根樹狀圖　134　／9. 有序之有根樹狀圖　135　／習題與解答　137　／補充題　144　／補充題解答 147

第七章　有向圖，有限狀態圖

1. 簡介　149　／2. 有向圖　149　／3. 基本定義　150　／4. 雙圖，關係，非負整數之方矩陣　151　／5. 對最短路徑的修剪演算法　153　／6. 有限狀態機　155　／7. 字串輸入和輸出磁帶　157　／8. 有限自動機　159　／習題與解答　161　／補充題　164　／補充題解答　167

第八章　組合分析

1。計數的基本原理　169　／2. 階乘記法　169　／3. 二項式係數　170　／4. 排列　172　／5. 排列和重覆　173　／6. 組合　174　／7. 有序的分割　176　／習題與解答　178　／補充題　190　／補充題解答　193

第九章　代數系統，形式語言

1. 運算與半群　197　／2. 自由半群，語言　199　／3.文法和語言　200　／4. 群　202　／5. 子群和正規子群　204　／6. 環，完整的定義域和體　208　／習題與解答　210　／補充題　220　／補充題解答　225

第十章 偏序集合和格子

1. 偏序集合 229 ／2. 偏序集合的圖形 230 ／3. 極上值和極下值 232 ／4. 格子 234 ／5. 有界的格子 236 ／6. 可分配的格子 237 ／7. 互補的格子 238 ／習題與解答 239 ／補充題 245 ／補充題解答 249

第十一章 命題計算法

1. 敍述和複合敍述 251 ／2. 連接，$p \wedge q$ 251 ／3. 選言，$p \vee q$ 252 ／4. 否定，$\sim p$ 253 ／5. 命題與真值表 254 ／6. 同義重覆和矛盾 255 ／7. 邏輯的等價 256 ／8. 命題的代數 257 ／9. 條件的和雙條件的敍述 257 ／10. 論證 258 ／11. 邏輯暗示 260 ／習題與解答 261 ／補充題 271 ／補充題解答 274

第十二章 布林代數

1. 基本定義 277 ／2. 對偶性 278 ／3. 基本定理 279 ／4. 布林代數如格子 279 ／5. 描述定理 280 ／6. 對集合的選言正規形式 281 ／7. 選言正規形式 282 ／8. 交換電路設計 283 ／9. 質蘊涵，交感法 285 ／10. 最小布林表示法 286 ／11. 卡諾圖 287 ／習題與解答 291 ／補充題 301 ／補充題解答 304

第一章
集合理論

1·1 集合與元素

在所有數學的分枝中都包含集合的概念。從字義來說，集合就是定義嚴密的表列或一群事物（object），以大寫字母 A，B，X，Y，…表示。構成集合的這些事物稱做元素或成員（member），而以小寫字母 a，b，x，y…表示。一句敍述“ p 是 A 的元素”或“ p 屬於 A ”，寫成

$$p \in A$$

$p \in A$ 的否定敍述寫成 $p \notin A$ 。

當集合的成員已闡明後，這個集合已被完全決定。通常稱這種陳述方式爲闡述原理（Principle of Extension）。

闡述原理：若且唯若集合 A 與 B 有相同的成員，則稱這兩個集合相等。

通常，A 與 B 相等，寫成 $A=B$，而 $A \neq B$ 表示兩集合不相等。

主要有兩種方式來闡述一個特定的集合。一種方式是表列集合的所有成員。例如：

$$A=\{a, e, i, o, u\}$$

表示集合 A 的元素是字母 a，e，i，o，u 。元素以大括號 { } 括起來，且彼此間以逗號分開。第二種方式是以說明代表元素特徵的性質。例如：

$$B=\{\ x : x \text{ 是整數}.\ x>0\ \}$$

讀成“ B 是所有使得 x 爲正整數的 x 所成的集合”，表示元素爲正整數的集合 B 。字母 x 常被當成集合的代表成員。冒號讀成“使得”，逗號則讀成“且”。

例題 1.1

(a) 上述的集合 A 也可寫成

$$A=\{\ x : x \text{ 是英文字母},\ x \text{ 是母音}\ \}$$

由此得知 $b \notin A$，$e \in A$ 且 $p \notin A$。

(b) 我們無法列出 B 的所有元素，常常將它寫成

$$B = \{ 1, 2, 3, \cdots\cdots \}$$

在此我們已假設大家都知道此式的意義。由此得知 $8 \in B$ 但 $-6 \notin B$。

(c) 令 $E = \{ x : x^2 - 3x + 2 = 0 \}$。換言之，$E$ 包含符合等式 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 解的數字，有時稱爲該給定等式的解集合。然而此方程式的解是 1 和 2，我們亦可寫成 $E = \{ 1, 2 \}$。

(d) 令 $E = \{ x : x^2 - 3x + 2 = 0 \}$，$F = \{ 2, 1 \}$ 且 $G = \{ 1, 2, 2, 1, 6/3 \}$。則 $E = F = G$。由此得知，集合與其元素的出現方式無關。若集合的元素重複或是經過重排，此集合仍是相同的集合。

某些集合將在課文中時常出現，我們以特殊符號表示他們。除非另外定義，否則我們令：

N = 正整數的集合：1，2，3，⋯
Z = 整數的集合：⋯－2，－1，0，1，2，⋯
Q = 有理數的集合
R = 實數的集合
C = 複數的集合

即使我們可以列出一個集合的所有元素，但是這麼做並不實用。例如．我們不可能去列出一個包含全世界於 1976 年出生人口的集合之所有元素，即使在理論上編輯這樣的表是可能的。也就是說，我們僅在描素含有少數元素的集合時才以表列的方式，否則我們以描述代表元素特徵的性質來表示集合。

以特性描述集合的陳述方式，通常稱爲**摘要原理**（Principle of Abstraction）。

摘要原理：對一給定的集合 U 和性質 P，有一集合 A 使得 A 的元素恰是具有性質 P 之集合 U 的成員。

1.2 宇集合，空集合

在集合理論的各種應用中，所有研究中集合的成員，通常屬於某個固定的大集合，稱爲**宇集合**（universal set）或**玄論宇宙**（universe of discourse）。例如，在平面幾何中，宇集合包含平面上的所有點，而在人類人口研究中，宇集合包含全世界的人類。我們令符號

$$U$$

代表宇集合，除非另外有說明或暗示。

對一個給定的集合U及性質P，在U中可能沒有任何具有性質P的元素。例如，集合

$$S = \{ x : x \text{是正整數}, x^2 = 3 \}$$

沒有元素，因爲沒有正整數具有敍述中的性質。

沒有元素的集合稱爲空集合（emp y set）或零集合（null set），寫成

$$\emptyset$$

由闡述原理，得知只有一個空集合。換言之，若集合S和T都是空集合，則$S = T$，因爲它們有相同的元素，就是什麼都沒有。

1·3 子集合

若A中的每一元素都是集合B的元素，則A稱爲B的子集合。亦可說成A包含於B或B包含A。這種關係寫成

$$A \subset B \quad \text{或} \quad B \supset A$$

若A不是B的子集合，也就是說，A中至少有一元素不屬於B，我們寫成$A \not\subset B$或$B \not\supset A$。

例題 1.2

(a) 考慮集合

$$A = \{1, 3, 4, 5, 8, 9\} \qquad B = \{1, 2, 3, 5, 7\} \qquad C = \{1, 5\}$$

則$C \subset A$且$C \subset B$因爲C的元素1和5均是A和B的成員。但$B \not\subset A$因爲B的某些元素，例如，2和7，不屬於A。進一步說，因爲A，B和C的所有元素必須屬於宇集合U，因此U至少包含集合$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$。

(b) 令$\mathbf{N}$，$\mathbf{Z}$，$\mathbf{Q}$和$\mathbf{R}$如1.1節中定義，則

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

(c) 集合$E = \{2, 4, 6\}$是集合$F = \{6, 2, 4\}$的子集合，因爲屬於E的任何數字2，4和6均屬於F。事實上，$E = F$。同理，可得證每個集合都是本身的子集合。

由定義，所有A中的成員都屬於宇集合U，所以每一個集合A都是宇集合U的子集合。而且空集合ϕ是A的子集合。

如上所述，因爲A的元素都屬於A，所以每個集合A都是本身的子集合。

若A中的每一元素均屬於集合B，而且B中的每一元素均屬於集合C，則顯然A中的每一元素均屬於C。換言之，若$A \subset B$且$B \subset C$，則$A \subset C$。

若$A \subset B$且$B \subset A$則A和B有相同的元素，即$A = B$。反之，若$A = B$則$A \subset B$且$B \subset A$，因每一集合均是本身的子集合。

我們將這些結果形式化地說明如下：

定理 1.1：（i）對任何集合A，$\phi \subset A \subset U$

（ii）對任何集合A，$A \subset A$

（iii）若$A \subset B$且$B \subset C$，則$A \subset C$

（iv）若且唯若$A \subset B$且$B \subset A$，則$A = B$

若$A \subset B$，則$A = B$仍是可能的。若$A \subset B$但$A \neq B$，則我們說A是B的眞子集合（proper subset）。（有的作者寫$A \subseteq B$表示A是B的子集合，而以$A \subset B$表示A是B的眞子集合。）例如：

$$A = \{1,3\} \qquad B = \{1,2,3\} \qquad C = \{1,3,2\}$$

則A和B都是C的子集合；但A是C的眞子集合，而B不是C的眞子集合，因$B = C$。

1·4 文氏圖

文氏圖（Venn diagram）是以平面上的一群點，對集合的圖形表示法。宇集合U由長方形的內部表示，而他的集合由放在矩形中的圓盤表示。若$A \subset B$，則代表A的圓盤將全部放在代表B的圓盤中，如圖 1-1 (a)。若A和B互斥（disjoint），也就是說沒有共同的元素，則代表A的圓盤應與代表B的圓盤分開，如圖 1-1 (b)。

無論如何，若A和B是兩個任意的集合，可能有些事物在A中而不在B中，有些在B中而不在A中，有些在A中也在B中，也有些不在A中也不在B中；因此，一般來說，我們將A和B表示如圖 1-1 (c)。

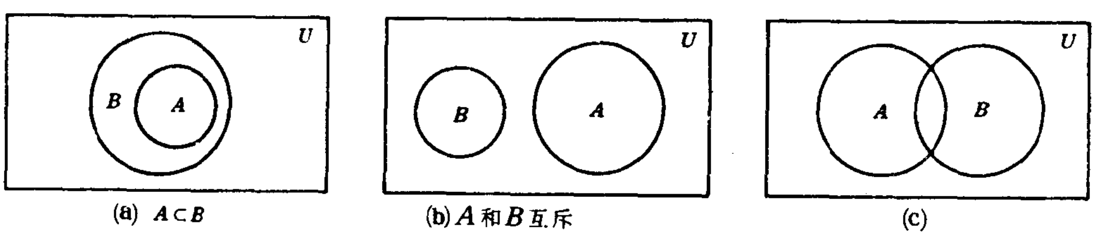


圖 1-1

1·5 集合運算

兩集合的聯集（union）是指屬於A或B的所有元素所成的集合，表示成$A \cup B$：

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

在此，“或”爲且/或的意思。

兩集合的交集(intersection)是指屬於A且B的所有元素所成的集合，表示成$A \cap B$：

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

若$A \cap B = \phi$，那就是說，若A和B沒有共同的元素，則稱A和B互斥(disjoint)或不相交(nonintersecting)。

集合B對集合A的相對互補(relative complement)，或簡稱A和B的差集(difference)，即是指屬於A但不屬於B中的元素所成的集合，表示成$A \setminus B$：

$$A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$$

集合$A \setminus B$讀成“A減B”，很多著作中把$A \setminus B$寫成$A - B$。

如前面所提到的，在某一特定時間所考慮的所有集合，都是某固定宇集合U的子集合。而絕對互補(absolute complement)或簡稱集合A的互補(complement)是指屬於U但不屬於A的所有元素所成的集合，表示成A^c：

$$A^c = \{x : x \in U, x \notin A\}$$

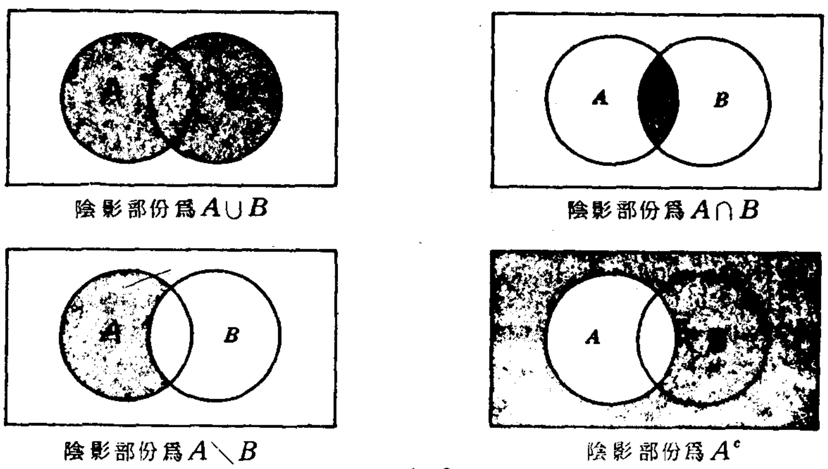


圖 1-2

也就是說，A^c是宇集合U和A的差集。某些著作表示成A'。

我們以圖1-2中文氏圖的陰影部份，表示集合$A \cup B$，$A \cap B$，$A \setminus B$和A^c。

例題 1.3

令$A = \{1, 2, 3, 4\}$和$B = \{3, 4, 5, 6\}$，而$U = \{1, 2, 3, \cdots\}$爲所有

正整數的集合，則：

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\} \qquad A\cap B=\{3,4\}$$
$$A\setminus B=\{1,2\} \qquad A^c=\{5,6,7,\ldots\}$$

下一個定理，證明集合包含性和交集與聯集運算間的關係。

定理 1.2：$A\subset B$，$A\cap B=A$，$A\cup B=B$ 是相等的敍述。
（註：問題1.21 將證明這個定理，問題1.31 列出其相等的敍述）

1·6　集合的代數，對偶性

上面提到的集合運算會滿足列在表1.1中的不同定律或恆等式。較正式的說法：

定理 1.3：集合必滿足表1.1中的定律。

表 1-1　集合的代數定理

等效律	
1a. $A\cup A=A$	1b. $A\cap A=A$
結合律	
2a. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	2b. $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
交換律	
3a. $A\cup B=B\cup A$	3b. $A\cap B=B\cap A$
分配律	
4a. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	4b. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
同一律	
5a. $A\cup\emptyset=A$	5b. $A\cap U=A$
6a. $A\cup U=U$	6b. $A\cap\emptyset=\emptyset$
遞迴律	
7. $(A^c)^c=A$	
互補律	
8a. $A\cup A^c=U$	8b. $A\cap A^c=\emptyset$
9a. $U^c=\emptyset$	9b. $\emptyset^c=U$
笛摩根定律	
10a. $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$	10b. $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

我們討論兩種證明包含集合運算等式的方式。第一種是剖析等式兩邊的事物 x 的意義，成爲元素，第二種是利用文氏圖。例如，考慮笛摩根定律的第一條，

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$$

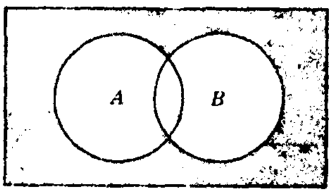
方法1：我們先證明 $(A\cup B)^c\subset A^c\cap B^c$。若 $x\in(A\cup B)^c$ 則 $x\notin A\cup B$。因此 $x\notin A$ 且 $x\notin B$，即 $x\in A^c$ 且 $x\in B^c$，得到 $x\in A^c\cap B^c$。

其次證明 $A^c\cap B^c\subset(A\cup B)^c$。令 $x\in A^c\cap B^c$，則 $x\in A^c$ 且 $x\in B^c$，即 $x\notin A$ 且 $x\notin B$，因此 $x\notin A\cup B$，所以 $x\in(A\cup B)^c$。

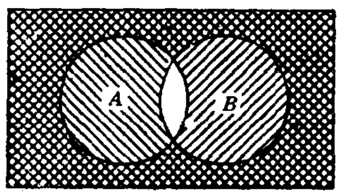
我們已證明 $(A\cup B)^c$ 中的每一元素屬於 $A^c\cap B^c$，且 $A^c\cap B^c$ 中的每一元素屬於 $(A\cup B)^c$。由以上的包含性得證，兩者有相同的元素，即 $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$。

（注意：我們已在無形中用到了第11章中所討論到的類比邏輯定律）。

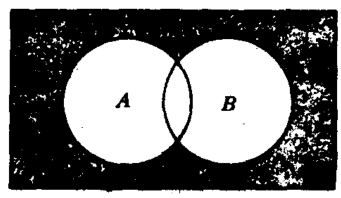
方法2：從圖1.2的文氏圖 $A\cup B$ 部份，我們以圖1.3(a)的陰影部份表示 $(A\cup B)^c$。由圖1.3(b)中，左斜線代表 A^c，右斜線代表 B^c，我們找到在 A^c 和 B^c 部份的區域，即 $A^c\cap B^c$，則 $A^c\cap B^c$ 爲交叉線條的區域，以圖1.3(c)中陰影部份表示。因爲 $(A\cup B)^c$ 和 $A^c\cap B^c$ 是以相同的區域表示，即它們是相等的。



(a)陰影部份爲 $(A\cup B)^c$



(b) ////. 陰影部份爲 A^c
\\\\\\\\. 陰影部份爲 B^c



(c)陰影部份爲 $A^c\cap B^c$

圖 1-3

讀者可能懷疑爲什麼表1.1中的等式是成對排列的，如2a和2b。我們現在來看看在這種排列之後的原理。假設 E 是集合代數中的等式。而其對偶（dual）E^* 是將 E 中的 $\cup$，$\cap$，U 和 ϕ，分別換成 $\cap$，$\cup$，ϕ 和 U 得到。例如

$$(U\cap A)\cup(B\cap A)=A \text{ 的對偶是 } (\emptyset\cup A)\cap(B\cup A)=A$$

由此得知表1.1中的成對的定律是彼此的對偶。這在集合代數中稱爲**對偶原理**（principle of duality），就是，若等式 E 是恒等式，則其對偶 E^* 亦爲恒等式。

1·7 有限集合，計算原理

若一個集合包含 m 個不同的元素，而 m 爲某個非負整數，則稱此集合是有限的。反之，此集合是無限的。例如，空集合和由英文字母構成的集合都是有限集合，而由正偶數構成的集合 $\{2,4,6,\cdots\}$ 是無限的。

若集合 A 是有限的，則我們令 $n(A)$ 代表 A 中元素的個數。有些著作中用 $\#(A)$ 而不用 $n(A)$。

輔助定理 1.4： 若有限集合A和B互斥，則$A\cup B$是有限的，且

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B)$$

證明：在計算$A\cup B$的元素個數前，先算A的元素個數，得知有$n(A)$個。$A\cup B$的其他元素應是屬於B但不在A中的。又因A和B是互斥的，在A中並沒有B的元素，所以B中有$n(B)$個元素，且均不在A中，故$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$。

在問題1.22將證明若A和B不是互斥，$n(A\cup B)$的公式。

定理 1.5： 若A和B是有限集合，則$A\cup B$和$A\cap B$都是有限的，且

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$$

我們可將此結果應用到三個集合，得到類似公式。

系定理 1.6： 若A，B和C是有限集合，則$A\cup B\cup C$亦是有限的，且

$$n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - n(A\cap C) - n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C)$$

這結果可由數學歸納法（1.10節）將之一般化成為對任意多個有限集合。

例題 1.4

假設某大學120名數學系學生中的100名，至少選了法文，德文，俄文三者之一，再設：

65 人修法文
45 人修德文
42 人修俄文
20 人修法文及德文
25 人修法文及俄文
15 人修德文及俄文

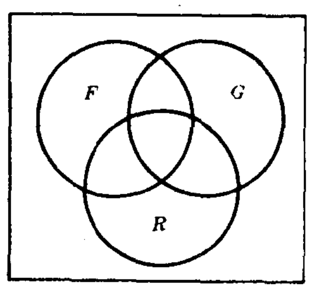


圖 1-4

令F，G和R分別代表修法文，德文和俄文的學生所成的集合。現在我們想求三種語文都修的學生人數，並將正確的人數填入圖1.4文氏圖中的八塊區域。

由系定理1.6

$$n(F\cup G\cup R) = n(F) + n(G) + n(R) - n(F\cap G) - n(F\cap R) - n(G\cap R) + n(F\cap G\cap R)$$

因已知 100 名學生至少選修三者之一，則 $n(F\cup G\cup R)=100$。代入

$$100 = 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + n(F\cap G\cap R)$$

得到 $n(F\cap G\cap R)=8$，即是有8名學生修了三種語文。

用這個結果填入文氏圖中，我們得到：

8 名學生修所有語文，
$20-8=12$ 名學生修法文和德文，但沒修俄文，
$25-8=17$ 名學生修法文和俄文，但沒修德文，
$15-8=7$ 名學生修德文和俄文，但沒修法文，
$65-12-8-17=28$ 名學生只修法文，
$45-12-8-7=18$ 名學生只修德文，
$42-17-8-7=10$ 名學生只修俄文，
$120-100=20$ 名學生沒有修任何一種語文。

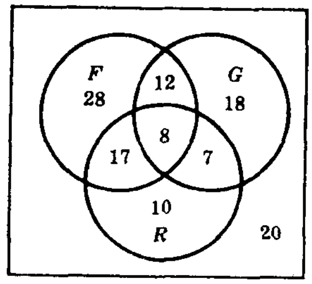


圖 1-5

據此，完成如圖 1.5。由此得知 $28+18+10=56$ 名學生只修一種語文。

1.8 集合組，冪集合

我們想談談任一給定集合 A 的子集合。因此必須考慮集合的集合。為免混淆起見，當我們說到這種情況，將用**集合組**(class of sets)或**集合群**(collection of sets)而不用集合的集合。若我們想考慮一組集合的某些集合，我們稱之為**次組**(subclass)或**次群**(subcollection)。

例題 1.5

假設 $A=\{1,2,3,4\}$。令 $\mathcal{A}$ 代表一組只含恰好三個元素之 A 的子集合。則

$$\mathcal{A} = [\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}]$$

$\mathcal{A}$ 的元素是集合 $\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,3,4\}$ 和 $\{2,3,4\}$。

令 $\mathcal{B}$ 代表一組含有元素 2 及另兩個其他元素之 A 的子集合。則

$$\mathcal{B} = [\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}]$$

$\mathcal{B}$ 的元素是集合 $\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$，$\{2,3,4\}$。因為 $\mathcal{B}$ 中的每一元素均在 $\mathcal{A}$

中，故$\mathcal{B}$是$\mathcal{A}$的次組。(爲免混淆，我們常以方括號來括起一組的集合)。

我們想談談對任一給定集合A，其所有子集合的組。這個組稱爲A的冪集合(power sets)，以$\mathcal{P}(A)$表之。若A是有限集合，則$\mathcal{P}(A)$亦是。更進一步說，$\mathcal{P}(A)$的元素個數等於2的$n(A)$次方：

$$n(\mathcal{P}(A)) = 2^{n(A)}$$

爲此，A的冪集合通常以2^A表示。

例題 1.6

例設$A=\{1,2,3\}$

$$\mathcal{P}(A) = [\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A]$$

注意因ϕ是A的子集合。故空集合ϕ屬於$\mathcal{P}(A)$。相同地，A亦屬於$\mathcal{P}(A)$。由此$\mathcal{P}(A)$有$2^3=8$個元素。

1-9　論證和文氏圖

許多文字上的敍述可被轉換成可用文氏圖描述之有關集合的敍述。因此文氏圖常用來決定論證(argument)的正確性。

例題 1.7

檢視摘錄自Lewis Carroll的Alice in Wonderland書中的論證：

S_1：我的燉鍋是我所有東西的僅有錫製品。
S_2：我發覺你所送的禮物非常有用。
S_3：我的燉鍋沒有一個是有用的。

S：你送我的禮物不是錫製品。

在此水平線上的敍述S_1，S_2和S_3代表假設，而在線下的敍述S代表結論。我們將決定是否結論S是由假設邏輯推導而得的，也就是說，是否S爲一正確的結論。

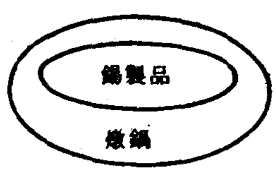


圖 1-6