

教学用书

微分几何习题集

〔苏〕A.C.菲金科等编

陈立人译 顾鹤荣校

浙江师范学院金华分校数学科

1982年

前 言

本书系根据苏联科学出版社(Издательство «Наука»)出版的菲金科(А.С.ФЕДЕНКО)等编著“微分几何习题集”(Сборник задач по дифференциальной геометрии) 1979年版全文译出。全书分六章, 共有 1091 道题目。内容包括概论、矢函数、平面曲线、空间曲线、曲面、曲线和曲面的仿射性质、场论初步等。大部分习题附有解答或提示。每一章节开始, 还简要介绍了有关基本概念、公式、定义和定理。该书考虑到了目前在数学教学中发生的变化, 运用了比较近代的方法, 是苏联高等院校较新的数学教学参考书。翻译并出版此书, 目的是为了适应我国教学需要, 供高等院校数学专业和工科大学有关专业的“微分几何”教学参考。考虑到我国目前教学中所习惯采用的符号, 中译本对原书所使用的某些符号作了更动, 对原书中的一些错误和遗漏作了修改与补充。

在本书的出书过程中, 得到了我校和科领导的大力支持。华东师范大学陈信漪、顾鹤荣、李浩然等老师对本书的翻译工作给予了热情鼓励和指导。特别是, 顾鹤荣老师校阅了全部译稿, 并作了仔细的修改。另外, 我们科里的一些同志为此书作了不少工作, 金华新华印刷厂为本书承担排版印刷。在此译者向他们表示衷心的感谢。

由于水平有限, 错误在所难免, 敬请读者批评指正。

陈立人

1982年2月

目 录

序言	(1)
符号	(2)
概论	(3)
映射	(3)
空间 R^n	(4)
矢函数	(9)
曲线和线	(13)
曲面	(15)
第一章 矢函数、曲线、线和曲面的概念	(19)
第二章 平面曲线	(25)
§ 1. 确定曲线的各种方法	(25)
§ 2. 切触、切线和法线	(30)
§ 3. 渐近线、奇异点、线(曲线)的 讨论和作图	(38)
§ 4. 曲线族、包络	(46)
§ 5. 弧长、曲率	(49)
§ 6. 渐缩线和渐伸线、自然方程	(55)
第三章 空间的曲线和线	(59)
§ 7. 曲线和线的方程	(59)
§ 8. 弗朗内标架、弧长	(61)
§ 9. 弗朗内公式、曲率和挠率、自然方程	(68)

第四章 曲面	(75)
§ 10. 曲面方程.....	(75)
§ 11. 曲面的切平面和法线。直纹面。 曲线与曲面的切触.....	(80)
§ 12. 曲面族。包络面.....	(87)
§ 13. 第一二次形式.....	(90)
§ 14. 球面映射。第二二次形式.....	(99)
§ 15. 共轭网和渐近曲线.....	(110)
§ 16. 曲率线.....	(113)
§ 17. 测地线.....	(115)
§ 18. 曲面论中的活动标架法.....	(119)
§ 19. 杂题.....	(127)
第五章 曲线和曲面的仿射性质	(131)
第六章 场论初步	(134)
§ 20. 数量场.....	(134)
§ 21. 矢量场.....	(139)
解 答	(148)

序 言

本习题集包含在综合性大学物理数学系讲授的微分几何课程的基本章节范围内的一千多道习题和练习题。在这版的准备时，作者力求考虑到目前在数学教学中发生的变化。

中学转到新的教学大纲导致了教学方法、术语及符号的变化，在此书中我们尽力巩固和发展这些革新。我们无条件地采用在中学里惯用的所有术语和符号，特别注意在微分几何课程中被研究的基本对象的确切定义。对于曲线（线）给出两种定义。即一方面，曲线被定义为等价参数表示道路的类；另一方面，引入作为一维流形的线的概念。曲面被看作为二维流形并通常借助其参数表示给出。大多数题目可从局部观点来解决，即在确定点的邻域内研究几何图形。

在本书的叙述中作者力求将微分几何课程同其他数学课程结合起来，主要用到线性代数、数学分析和微分方程的工具，并特别注意与中学几何和解析几何的联系。

全书包括概论、六章及二十一节。

此书可推荐为综合性大学和师范学院物理数学系的教学参考书。

符 号

$\{ a, b, c, \dots \}$ —— 由元素 $a, b, c, \dots$ 组成的集合;
 $\{ x \mid x \text{ 具有性质 } P \}$ —— 所有具有给定性质 P 的元素的集合;

$x \in A$ —— x 是集合 A 的元素 (x 属于 A);

$A \subset B$ —— 集合 A 是集合 B 的子集;

$A \cup B$ —— 集合 A 和 B 的并;

$A \cap B$ —— 集合 A 和 B 的交;

$A \setminus B$ —— 集合的差;

$\emptyset$ —— 空集;

$\mathbb{R}$ —— 所有实数的集合;

$\forall$ —— 任一个;

$\exists$ —— 存在;

$p \Rightarrow q$ —— 由 p 得出 q ;

$p \Leftrightarrow q$ —— p 和 q 等价;

$\overline{a} \cdot \overline{b}$ —— 矢量的数量积;

$\overline{a} \times \overline{b}$ —— 矢量的矢量积;

$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ —— 矢量的混合积。

所有其他符号将在本文中阐明。

概 论

映 射

设 X 和 Y 是任意的非空集合, 如果集合 X 的每一个元素与集合 Y 中的某个元素相对应, 那么说给出了集合 X 到集合 Y 内的一个映射。映射用字母 f 表示, 在此记为

$$f: X \rightarrow Y, x \mapsto f(x) \quad (1)$$

元素 $y = f(x)$ 称为元素 x 的象。如果 $A \subset X$, 则集合

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$$

称为集合 A 的象, 集合 $f(X)$ 称为映射 f 的象。

若 $f(X) = Y$, 则称 f 是集合 X 到集合 Y 上的映射, 或者称 f 是满射。如果

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2),$$

则称映射 f 是内射。同时是满射和内射的映射称为双射。这种映射确定了集合 X 和 Y 的元素之间的一一对应。对于双射 f 存在逆映射:

$$f^{-1}: Y \rightarrow X, f(x) \mapsto x,$$

它同样也是双射。

如果 $A \subset X$, 那么可以观察映射 (1) 在 A 上的限制:

$$f|_A: A \rightarrow Y, a \mapsto f(a), \text{ 这里 } a \in A.$$

当将实数集合 R 作为 Y , 则称映射 (1) 为函数。

设 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow Z$ 均为映射, 那么能确定映射

$$g \circ f: X \rightarrow Z, x \mapsto g(f(x)),$$

它称为映射 f 和 g 的合成。

两个集合 X 和 Y 的直积 (或笛卡尔积) 是所有的偶 (x, y) 的集合, 其中, $x \in X, y \in Y$;

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}.$$

空 间 R^n

由 n 个实数的有序组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 组成的集合

$$R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1, x_2, \dots, x_n \in R\}$$

能够赋予不同的结构。 R^n 是 n 维实矢量空间, 据此 R^n 中的元素可称为矢量, 并用符号 $\overline{a}, \overline{b}, \overline{x}, \overline{y}, \dots$ 表示。由矢量

$$\begin{aligned} \overline{i}_1 &= (1, 0, \dots, 0), \overline{i}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \\ \overline{i}_n &= (0, 0, \dots, 1), \end{aligned}$$

组成的空间 R^n 的基称为规范基。在 R^3 中的规范基用 $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$ 表示。

我们可将 R^n 看作为与矢量空间 R^n 联系在一起的点的仿射空间。此时 R^n 的元素既可看作是点, 并用符号 $M, N, \dots$ 表示, 也可看作是矢量 $\overline{a}, \overline{x}, \dots$ 。

矢量 $\overline{r} = (x_1, \dots, x_n)$ 关于规范基具有坐标 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 点 $A(x_1, \dots, x_n)$ 关于标架 $(O, \overline{i}_1, \overline{i}_2, \overline{i}_3, \dots, \overline{i}_n)$ 具有同样的仿射坐标, 其中 $O = (0, 0, \dots, 0)$ 是坐标原点。

如果使空间 R^n 的任意两个矢量 $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和

$\overline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 与称为矢量 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$ 的数量积的数:

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

相对应, 那么 R^n 成为 n 维欧基里德空间。在这个空间中能引入两点: $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $N = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 间的距离的概念:

$$|MN| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}。$$

特别是, 对中学数学课程中研究的平面和空间, 如果在它们中选取笛卡尔坐标系, 则能够分别看作为 R^2 和 R^3 。

集合

$$B(A, \varepsilon) = \{M \in R^n | |AM| < \varepsilon\}$$

称为球心在点 A , 半径为 $\varepsilon > 0$ 的球, 这个球称为点 A 的 ε 邻域。

R^n 的子集 U 称为开集, 如果对它的每个点 A , 它都包含球心在 A 的某个球。所有包含点 A 的开集都称为该点的邻域。

点 $A \in R^n$ 称为集合 $U \in R^n$ 的接触点, 如果这个点的任何邻域至少包含 U 里的一个点。集合 U 的所有接触点的总合称为集合 U 的闭包, 并用符号 $\overline{U}$ 表示。如果 $\overline{U} = U$, 则集合 U 称为闭的。

 如果不存在不交的开集 U_1 和 U_2 , 这两个开集将集合 V 分为两个非空子集 V_1 和 V_2 , 使 $V_1 \subset U_1$, $V_2 \subset U_2$, 则集合 $V \subset R^n$ 称为连通的。开连通集合称为区域, 区域的闭包称为闭区域。

如果集合 U 内的点连同它的某个邻域都属于集合 U , 则

该点称为集合 U 的内点。集合 U 的所有内点的总合称为该集合的内部。

如果在点 $M \in R^n$ 的任何领域中既存在属于集合 $U \subset R^n$ 的点，又存在不属于集合 U 的点，则点 M 称为集合 U 的边界点。集合 U 的所有边界点的总合称它的边界，并用符号 ∂U 表示。

在空间 R^n 中所有点的子集皆称为空间 R^n 的图形 Φ 。给出一个含有 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的方程称为图形 Φ 的方程，如果 R^n 的属于图形 Φ 的点且仅仅是属于图形 Φ 的点满足此方程。设 $l: R^m \rightarrow R^n$ 是一个线性映射， $(\bar{i}_1, \bar{i}_2, \dots, \bar{i}_m)$ 是 R^m 的规范基， $(\bar{i}'_1, \bar{i}'_2, \dots, \bar{i}'_n)$ 是 R^n 的规范基，并设

$$l(\bar{i}_k) = \sum_{j=1}^n \alpha_{jk} \bar{i}'_j \quad (k = 1, 2, \dots, m)。$$
 矩阵

$$(\alpha_{jk}) \quad \begin{matrix} 1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq m \end{matrix}$$

称为线性变换 l 的矩阵，它的列是矢量 $l(\bar{i}_k)$ 的坐标。如果 $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$ ，且

$$l(x) = (y_1, y_2, \dots, y_r) \in R^n，那么$$

$$y_j = \sum_{k=1}^m \alpha_{jk} x_k。$$

m 维矢量空间 V 的两个基 $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m) = [\bar{e}]$ 和 $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m) = [\bar{a}]$ 称为等价的，如果由基 $[\bar{e}]$ 到基 $[\bar{a}]$ 的变换矩阵的行列式（即空间 V 的由基 $[\bar{e}]$ 到基 $[\bar{a}]$ 的线

性变换的矩阵)是正的。空间 V 的等价基的类称为这个空间的定向。每个矢量空间仅仅存在两个定向, 其中一个称为正的, 另一个称为反的。这样, 空间的定向的选择等价于这个空间中基的选择。

如果 V 是在 R^3 中的二维子空间, $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ 是 V 的基, 而 $\bar{n}$ 是 R^3 的不属于 V 的非零矢, 则 $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{n})$ 是 R^3 的基。如果矢量 $\bar{n}$ 已被选定, 而基 $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{n})$ 与 R^3 的规范基等价, 则基 $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ 称为正的。这样, 确定 V 的定向等价于确定矢量 $\bar{n}$ 。通常将 $\bar{n}$ 取为与 V 正交的单位矢量。

线性映射 $\alpha: R^n \rightarrow R$ 称为在矢量空间 R^n 上的线性形式。设 $\alpha(\bar{i}_k) = \alpha_k$, 那么对于矢量

$\bar{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ 有

$$\alpha(\bar{h}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k.$$

坐标函数

$u_i: R^n \rightarrow R, (u_1, u_2, \dots, u_n) \mapsto u_i (i = 1, 2, \dots, n)$

是线性形式的例子。

满足下列条件的映射 $\beta: R^n \times R^n \rightarrow R$ 称为在矢量空间 R^n 上的双线性形式:

$$\beta(\bar{h}_1 + \bar{h}_2, \bar{p}) = \beta(\bar{h}_1, \bar{p}) + \beta(\bar{h}_2, \bar{p})$$

$$\beta(\lambda \bar{h}, \bar{p}) = \lambda \beta(\bar{h}, \bar{p})$$

$$\beta(\bar{h}, \bar{p}_1 + \bar{p}_2) = \beta(\bar{h}, \bar{p}_1) + \beta(\bar{h}, \bar{p}_2)$$

$$\beta(\bar{h}, \lambda \bar{p}) = \lambda \beta(\bar{h}, \bar{p}).$$

如果 $\beta(\bar{i}_k, \bar{i}_l) = \beta_{kl}$, $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n)$, $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n)$, 则

$$\beta(\bar{h}, \bar{p}) = \sum_{k, l=1}^n \beta_{kl} h_k p_l$$

如果 $\beta(\bar{h}, \bar{p}) = \beta(\bar{p}, \bar{h})$ ，则称双线性形式 β 是对称的。如果 $\beta(\bar{h}, \bar{p}) = -\beta(\bar{p}, \bar{h})$ ，则称双线性形式 β 是反对称的（或称为 2-形式）。对于对称双线性形式有 $\beta_{kl} = \beta_{lk}$ ，对于反对称双线性形式有 $\beta_{kl} = -\beta_{lk}$ 。映射 $q: R^n \rightarrow R$ 称为矢量空间 R^n 上的二次形式，如果存在双线性对称形式 β ，使 $q(\bar{h}) = \beta(\bar{h}, \bar{h})$ 。在坐标下 $q(\bar{h})$ 可用下面公式表示：

$$q(\bar{h}) = \sum_{k, l=1}^n \beta_{kl} h_k h_l。$$

二次形式 q 称为是与双线性形式 β 相对应的形式。设 α 和 β 是在矢量空间 R^n 上的两个线性形式，2-形式

$$\alpha \wedge \beta: R^n \times R^n \rightarrow R$$

称为这两形式的外积，它由下式确定：

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(\bar{h}, \bar{p}) &= \frac{1}{2} (\alpha(\bar{h})\beta(\bar{p}) - \alpha(\bar{p})\beta(\bar{h})) \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \alpha(\bar{h}) & \alpha(\bar{p}) \\ \beta(\bar{h}) & \beta(\bar{p}) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

设 M 是空间 R^3 中的任意点，偶 $(M, \bar{h})$ 称为 R^3 在点 M 处的切矢量，这里 $\bar{h}$ 是 R^3 中的任意矢量。切矢量 $(M, \bar{h})$ 能够表示为点的这样的有序点对 (M, N) ，使对应于点对的矢量与 $\bar{h}$ 一致（即 $M + \bar{h} = N$ ），而作为矢量 $\bar{h}$ 已被放到点 M 处。 R^3 在点 M 处的所有切矢量的集合 $T_MR^3 = \{(M, \bar{h}) | \bar{h} \in R^3\}$ 称为切矢量空间。对 R^3 中矢量的运算，可根据下面原则转到同一点的切矢量上：

$$(M, \overline{h}) + (M, \overline{P}) = (M, \overline{h} + \overline{P})$$

$$\alpha(M, \overline{h}) = (M, \alpha \overline{h})$$

$$(M, \overline{h}) \cdot (M, \overline{P}) = \overline{h} \cdot \overline{P}$$

关于这些运算 $T_M R^3$ 是一个欧几里德矢量空间。而矢量 $(M, \overline{i})$ 、 $(M, \overline{j})$ 、 $(M, \overline{k})$ 构成它的正交基。当切点 M 明确时，切矢量 $(M, \overline{h})$ 能简单地用 $\overline{h}$ 来表示。

在 R^3 （或它的某个子集）的每个点指定 R^3 的一个切矢量，就称为 R^3 （或 R^3 的某个子集）上的矢量场。

矢 函 数

设 U 是空间 R^m 的某个点集，使每个点 $(u_1, u_2, \dots, u_m) \in U$ 映到矢量 $\overline{r}(u_1, u_2, \dots, u_m) \in R^n$ 的映射

$$\overline{r}: U \rightarrow R^n \quad (2)$$

称为 m 个数量变量的矢函数。确定一个矢函数相当于确定 n 个数量函数（称为它的分量）：

$$\overline{r}(u_1, u_2, \dots, u_m) = (x_1(u_1, u_2, \dots, u_m), \dots, x_n(u_1, \dots, u_m)).$$

设矢函数 $\overline{r}$ 定义在点 $M_0 \in R^m$ 的某个邻域中，或许除点 M_0 本身以外，此外， $\overline{a}$ 是某个固定的矢量，如果对于 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ，使

$$0 < |MM_0| < \delta \implies |\overline{r}(M) - \overline{a}| < \varepsilon,$$

则矢量 $\overline{a}$ 称为矢函数 $\overline{r}$ 的极限，并记为 $\overline{a} = \lim_{M \rightarrow M_0} \overline{r}(M)$ 。

定义在点 M_0 的某个邻域中的矢函数(2)称为在该点是连续的，如果

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \overline{r}^-(M) = \overline{r}^-(M_0)。$$

在一般情况下，对于任意点 $M_0 \in U$ ，如果对点 $\overline{r}(M_0)$ 在 R^n 内的任何邻域 W 可求得点 M_0 在 R^m 的邻域 V ，使 $\overline{r}(V \cap U) \subset W$ ，则矢函数 (2) 称为在点 M_0 是连续的。映射 $\overline{r}: U \rightarrow V$ ，这里 U 是 R^m 的子集， V 是 R^n 的子集，称为同胚，如果 $\overline{r}$ 是双射且 $\overline{r}$ 和 $\overline{r}^{-1}$ 均是连续的。

我们考虑定义在直线 R 的开集上的矢函数 $\overline{r} = \overline{r}(t)$ ，即一个实变量 t 的矢函数，如果这矢函数在点 t 有定义，且存在极限：

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{r}(t_0 + \Delta t) - \overline{r}(t_0)}{\Delta t}，$$

那么称这极限为已知矢函数在点 t_0 的导数，并用符号 $\overline{r}'(t_0)$

或 $\frac{d\overline{r}}{dt}(t_0)$ 表示。这样产生矢函数 $\overline{r}'$ 称它为矢函数 $\overline{r}$

的导矢函数。 $\overline{r}'$ 的导数称为矢函数 $\overline{r}$ 的二阶导数， $\overline{r}^{k-1}$ 的导数称为矢函数 $\overline{r}$ 的 k 阶导数 $\overline{r}^k$ 。具有 k 阶连续导数的函数属于 C^k 级函数，具有任意阶导数的函数称为 C^∞ 级函数。通常将 C^k 级函数称为光滑的。矢函数 $\overline{r} = \overline{r}(t)$ 的导数 $\overline{r}'(t_0)$ 与使每个 $\tau \in R$ 映到矢量 $\tau \overline{r}'(t_0)$ 的线性映射 $\overline{r}'(t_0): R \rightarrow R^n$ 能够同样看待，这个映射满足等式：

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\overline{r}(t_0 + \Delta t) - \overline{r}(t_0) - \Delta t \overline{r}'(t_0)|}{|\Delta t|} = 0。$$

通常称这个线性映射 $\overline{r}'(t_0): R \rightarrow R^n$ 为微分，并记为

$$d\bar{r}t_0 = \bar{r}'(t_0)dt.$$

定义在线段 $J = [\alpha, \beta]$ 上的矢函数 $\bar{r} = \bar{r}(t)$ 称为光滑的, 如果存在定义在包含线段 J 的区间 $I =]a, b[$ 上的光滑矢函数 $\bar{\rho} = \bar{\rho}(t)$, 使 $\bar{\rho}|_J = \bar{r}$ 。

对属于 C^k 级的一个实变量的矢函数 $\bar{r}$ 有台劳公式:

$$\begin{aligned} \bar{r}(t + \Delta t) &= \bar{r}(t) + \Delta t \bar{r}'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \bar{r}''(t) \\ &+ \dots + \frac{(\Delta t)^k}{k!} (\bar{r}^{(k)}(t) + \bar{\varepsilon}(t, \Delta t)), \end{aligned}$$

其中 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\varepsilon}(t, \Delta t) = \bar{0}$ 。

现在考虑定义在变量为 u, v 的 R^2 的子集上的矢函数 (2), 这个函数在点 (u_0, v_0) 的偏导数由下列方式确定:

$$\begin{aligned} \partial_u \bar{r}(u_0, v_0) &= \bar{r}_u(u_0, v_0) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(u_0 + h, v_0) - \bar{r}(u_0, v_0)}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_v \bar{r}(u_0, v_0) &= \bar{r}_v(u_0, v_0) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(u_0, v_0 + h) - \bar{r}(u_0, v_0)}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{uu} \bar{r} &= \bar{r}_{uu} = \partial_u(\bar{r}_u), \quad \partial_{vv} \bar{r} = \bar{r}_{vv} = \partial_v(\bar{r}_v), \\ \partial_{uv} \bar{r} &= \partial_{vu} \bar{r} = \bar{r}_{uv} = \bar{r}_{vu} = \partial_u(\bar{r}_v) = \partial_v(\bar{r}_u). \end{aligned}$$

矢函数 $\bar{r}: U \rightarrow R^n, (u, v) \mapsto \bar{r}(u, v)$, 其中 U 是在 R^2 内的区域, 称为在 $M_0 \in R^n$ 处可微的, 如果存在线性映射 $l: R^2 \rightarrow R^n$, 使

$$\lim_{|\bar{h}| \rightarrow 0} \frac{|\bar{r}(M_0 + \bar{h}) - \bar{r}(M_0) - l(\bar{h})|_s}{|\bar{h}|} = 0.$$

在点 M_0 可微的矢函数在该点是连续的, 而线性映射 $l: R^2 \rightarrow R^n$ 是唯一的且称为矢函数 $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ 在点 M_0 的微分(或导数), 记为 $d\bar{r}_{M_0}$ 。微分 $d\bar{r}_{M_0}$ 可以表示为 $T_{M_0}R^2$ 到 $T_{r(M_0)}R^n$ 内的映射, 只需将矢量 $\bar{h} \in R^2$ 看作为 R^2 在点 M_0 的切矢量 $(M_0, \bar{h})$, 而将矢量 $d\bar{r}_{M_0}(\bar{h}) = l(\bar{h}) \in R^n$ 看作为 R^n 在点 $\bar{r}(M_0)$ 的切矢量 $(\bar{r}(M_0), d\bar{r}_{M_0}(\bar{h}))$ 。如果矢函数 $\bar{\rho} = \bar{\rho}(t)$ 满足条件 $\bar{\rho}(t_0) = M_0$, $\bar{\rho}'(t_0) = \bar{h}$, 那么矢量 $d\bar{r}_{M_0}(\bar{h})$ 与矢函数 $(\bar{r} \circ \bar{\rho})$ 的导数 $(\bar{r} \circ \bar{\rho})'(t_0)$ 重合。矢函数 $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ 称为可微的, 如果它在 U 的每一点可微。坐标 u 和 v 能够理解为在 U 上的函数, $u: (u, v) \mapsto u, v: (u, v) \mapsto v$ 。这些函数是可微的, 而它们的微分 du 和 dv 与切线矢量 $(M, \bar{h})$ 对应, 其中 $\bar{h} = (h_1, h_2)$, h_1 和 h_2 为相应的数, 即 $du_M(\bar{h}) = h_1, dv_M(\bar{h}) = h_2$ 。对微分 du 和 dv 的这种表示有公式:

$$d\bar{r} = \partial_u \bar{r} du + \partial_v \bar{r} dv,$$

对于切矢量 $\overline{h} = (h_1, h_2)$,

$$\begin{aligned} d\bar{r}(\bar{h}) &= e_u \bar{r} du(\bar{h}) + e_v \bar{r} dv(\bar{h}) \\ &= e_u \bar{r} h_1 + e_v \bar{r} h_2. \end{aligned}$$

若 $\bar{r}(u, v) = (f_1(u, v), \dots, f_n(u, v))$, 且 $M_0 = (u_0, v_0)$, 则微分 $d\bar{r}_{M_0}$ 可用雅可比矩阵给出:

[illegible]

当线性映射由它的矩阵给出时, R^2 到 R^n 内的线性映射空间 $\mathcal{L}(R^2, R^n)$ 可以看作空间 R^{2n} , 对于可微的矢函数

$\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ 可产生矢函数 $d\bar{U} \rightarrow R^{2n}$ 。矢函数 $d\bar{r}$ 在点 M 处的微分称为矢函数 $\bar{r}$ 在点 M 处的二阶微分并记为 $d^2\bar{r}_M$ 。矢函数 $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ 称为二次可微, 如果在 U 的每一点都存在 $d^2\bar{r}$ 。若 $d\bar{r}$ 是连续的, 则称 $\bar{r}$ 为连续可微的 (或为 C^1 级的); 若 $d^2\bar{r}$ 是连续的, 则为 C^2 级的。这样可逐次确定 k 阶微分和 C^k 级矢函数。为简便起见 C^k 级矢函数称为光滑的。线性映射

$$d^2\bar{r}_M: R^2 \rightarrow \mathcal{L}(R^2, R^n), \bar{h} \mapsto d^2\bar{r}_M(\bar{h})$$

可看作为按下面规则确定的 $R^2 \times R^2$ 到 R^n 的双线性映射 (同样可表示为 $d^2\bar{r}_M$):

$$d^2\bar{r}_M(\bar{h}, \bar{p}) = d^2\bar{r}_M(\bar{h})(\bar{p}).$$

双线性映射 $d^2\bar{r}_M$ 是对称的, 而对应它的二次形式通常记为:

$$d^2\bar{r} = a_{uu}\bar{r} du^2 + 2a_{uv}\bar{r} du dv + a_{vv}\bar{r} dv^2.$$

设 U, V 是在 R^n 中的区域, 映射 $f: U \rightarrow V$ 称为 C^k 级微分同胚, 如果 f 是双射且与其逆映射 f^{-1} 均属 C^k 级的。

曲 线 和 线

设 I 是在直线 R 上的区间、线段或半开集。 C^k 级矢函数 $\bar{r}: I \rightarrow R^3$ 称为在空间 R^3 中的 C^k 级道路 (或参数表示的曲线), 并用 $(I, \bar{r})$ 表示。道路 $(I, \bar{r})$ 称为:

- 1) 简单的, 如果映射 $\bar{r}$ 是一一的;
- 2) 正则的, 如果对于所有内点 $t_0 \in I$ 有

$$\bar{r}'(t_0) \neq 0;$$