自由网平差与变形分析

陶本藻 编著

测绘出版社

自由网平差与变形分析

陶本藻　编著

测 绘 出 版 社

本书专述秩亏自由网平差及其在变形分析中的应用，是根据作者多年收集的资料和本人研究成果编写而成的。

全书共分六章，详细介绍了国内、外现有的各种自由网平差方法，对其作了具体分析和比较，并列举了大量示例。

本书可供大地测量、工程测量和地震工作者研究自由网平差理论、探讨其应用时学习参考。

自由网平差与变形分析

陶本藻　编著

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行・各地新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16・印张 12 $^{3}/_{8}$・字数 286 千字

1984 年 7 月第一版・1984 年 7 月第一次印刷

印数 1—12,000 册・定价 2.00 元

统一书号：15039・新 332

前　言

秩亏自由网平差是近十余年发展起来的现代平差理论之一，已引起我国测量工作者的重视。近二、三年来，研究这种平差的理论及应用方面的文章相继出现。为了促使这项研究工作深化，并探讨其应用，作者将收集到的有关资料以及自己的科研成果整理成本书，供读者参考。

全书共分六章。第一章阐述秩亏自由网平差原理，举例说明了水准网、测边网和测角网的自由网平差方法。第二章在介绍国外一些作者提出的六种解法基础上，研究了这些方法的共性和相互之间的等价性，进一步研究了自由网平差的性质以及与经典自由网平差的异同。第三章作者提出了自由网平差的坐标变换法，导出了水准网、测边网、测角网和边角网的坐标变换公式，是通过经典平差的结果变换而得。第四章先介绍我国周江文研究员针对监测网提出的自由网拟稳平差原理，根据其理论，作者研究了该法的性质，得出了拟稳参考系，并提出了按附加条件法和坐标变换法作拟稳平差的方法。第五章作者针对变形分析中有时要求在基线不变情况下作自由网平差的情况，提出了具有约束条件的自由网平差理论，并分别就伪逆平差和拟稳平差作了讨论。自由网平差主要应用于工程建筑物变形分析和地壳形变分析，为此在第六章中讨论了变形分析的有关问题，其中包括变形分析的基准、平差方法的选择、一些实际问题的处理以及变形分析的数理统计方法等。

唐诗华、张后苏、宛梅华、米桂村、金新祥、皮新等同志参加了本书部分内容的研究或提供了算例。

周江文研究员和欧吉坤硕士审阅了本稿，并提出了宝贵意见，在此表示感谢。

由于本书大部分内容是研究成果，有不当之处，欢迎指正。

编著者

1982.11

目　　录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第一章　秩亏自由网平差原理

本章从满秩平差引出秩亏平差问题，按广义逆理论阐述秩亏自由网平差的原理，举例说明计算方法，并讨论了自由网平差的一些统计性质。

§1.1　满秩平差问题

进行大地网的经典间接平差，通常必须设定足够的起始数据，选择网中待定点高程或坐标作为未知参数，它们是非随机变量，平差的数学模型是

$$\underset{n1}{E(l)} = \underset{nt\,t1}{A\overline{X}} \qquad D(l) = \bar{\mu}^2 Q_{ll} = \bar{\mu}^2 P^{-1} \tag{1.1.1}$$

称为高斯-马尔可夫模型。式中 l 是 n 维观测向量；$\overline{X}$为 t 维未知参数向量；A 为系数阵；$Q_{ll}^{-1} = P$为 l 的权阵，是n阶对称方阵；$\overline{\mu}^2$ 为单位权方差；$D(l)$和$E(l)$分别是 l 的方差和数学期望。(1.1.1) 式中第一式是由 l 的误差 Δ 的数学期望 $E(\Delta)=0$ 所决定，其意思是观测中不包含系统误差，仅存在随机误差。

由于网中有足够的起始数据，数学模型中的A必为列满秩阵，即A的秩 $\mathrm{R}(A)=t$，t 为未知参数个数。A为列满秩，表示A中 t 个列向量线性无关。权阵P是非奇异阵（满秩阵）。由 (1.1.1) 的数学模型作最小二乘平差，称为满秩平差问题。

设$\overline{X}$的估值为X，Δ 的估值为V，V一般称为 l 的改正数，亦可称为残差或余差，由 (1.1.1) 中第一式可写出其估式为

$$\underset{n1}{V} = \underset{nt\,t1}{AX} - \underset{n1}{l} \tag{1.1.2}$$

这是误差方程。按最小二乘原理

$$V^T P V = \min \tag{1.1.3}$$

由 (1.1.2) 式可得法方程

$$\underset{tt}{N}X = A^T P l \tag{1.1.4}$$

式中$N = A^T PA$，$\mathrm{R}(N)=t$，为满秩对称方阵。N的凯莱逆 N^{-1}存在，故 (1.1.4) 有唯一解

$$X = N^{-1}A^T Pl \tag{1.1.5}$$

亦即$\overline{X}$的最小二乘估计X是唯一的。这就是满秩平差问题。

从统计性质分析，由(1.1.5)求出的X是未知参数$\overline{X}$的最优线性无偏估计。X是$\overline{X}$的无偏估计，即

$$E(X) = \overline{X} \tag{1.1.6}$$

而且X具有最小方差性：

$$D(X) = \min \tag{1.1.7}$$

最小二乘估计X是未知参数$\overline{X}$的最优线性无偏估计有各种证法，下面选择一种方法来证明。

设$\overline{X}$的任一线性函数为

$$\overline{F}=f^T\overline{X} \tag{1.1.8}$$

其估计量为

$$F=f^TX=\alpha^Tl \tag{1.1.9}$$

上式表示$\overline{F}$的估计量F是观测值l的线性函数。α为待定系数，它的确定必须使F是$\overline{F}$的最优无偏估计。

F是$\overline{F}$的无偏估计，则有

$$E(F)=E(f^TX)=f^TE(X)=f^T\overline{X} \tag{1.1.10}$$

及

$$E(F)=E(\alpha^Tl)=\alpha^TE(l)=\alpha^TA\overline{X} \tag{1.1.11}$$

式中顾及了（1.1.1）式。对比上两式知：

$$f^T=\alpha^TA \quad 或 \quad A^T\alpha-f=O \tag{1.1.12}$$

此为无偏条件。

F是$\overline{F}$的最优估计，必须使

$$D(F)=D(\alpha^Tl)=\alpha^TD(l)\alpha=\min \tag{1.1.13}$$

为此，作如下函数并求导得

$$\varphi=\overline{\mu}^2\alpha^TQ_{ll}\alpha-2K^T(A^T\alpha-f)$$

$$\frac{d\varphi}{d\alpha}=2\overline{\mu}^2\alpha^TQ_{ll}-2K^TA^T=0$$

$$\overline{\mu}^2Q_{ll}\alpha-AK=0$$

或

$$\alpha=\frac{1}{\overline{\mu}^2}Q_{ll}^{-1}AK=\frac{1}{\overline{\mu}^2}PAK \tag{1.1.14}$$

代入（1.1.12）式得

$$f^T=K^TA^TPA/\overline{\mu}^2$$

或

$$K^T=\overline{\mu}^2f^T(A^TPA)^{-1}=\overline{\mu}^2f^TN^{-1} \tag{1.1.15}$$

将（1.1.14）式转置，并将上式代入，即可确定α^T：

$$\alpha^T=f^TN^{-1}A^TP \tag{1.1.16}$$

代入（1.1.9）式，即得$\overline{F}=f^T\overline{X}$的最优无偏估计为

$$f^TX=f^TN^{-1}A^TPl \tag{1.1.17}$$

按协方差传播律，估计量f^TX的方差为

$$D(f^TX)=\overline{\mu}^2f^TN^{-1}A^TPQ_{ll}PAN^{-1}f$$

$$=\overline{\mu}^2f^TN^{-1}f=\overline{\mu}^2Q_{FF} \tag{1.1.18}$$

式中

$$Q_{FF}=f^T N^{-1} f \tag{1.1.19}$$

由（1.1.17）和（1.1.18）即得$\overline{X}$的最优无偏估计及其方差为

$$X=N^{-1}A^T Pl \tag{1.1.20}$$

$$D(X)=\overline{\mu}^2 N^{-1}=\overline{\mu}^2 Q_{XX} \tag{1.1.21}$$

$$Q_{XX}=N^{-1} \tag{1.1.22}$$

此即最小二乘平差导出的相应公式。

单位权方差$\overline{\mu}^2$是用下式估计的：

$$\mu^2=\frac{V^T PV}{n-t} \tag{1.1.23}$$

μ^2是$\overline{\mu}^2$的无偏估计，现给出如下证明。

二次型函数

$$\begin{aligned}V^T PV &= -V^T Pl=-(AX-l)^T Pl \\ &= l^T Pl-X^T A^T Pl=l^T Pl-l^T PAN^{-1}A^T Pl\end{aligned} \tag{1.1.24}$$

令 $P=HH^T$，则上式为

$$V^T PV=l^T H(I-H^T AN^{-1}A^T H)H^T l \tag{1.1.25}$$

两边取数学期望得

$$E(V^T PV)=E(l^T H(I-H^T AN^{-1}A^T H)H^T l) \tag{1.1.26}$$

按附录二，二次型函数的数学期望公式为

$$E(X^T AX)=\mathrm{tr}(AD(X))+E^T(X)AE(X)$$

上式可写成：

$$\begin{aligned}E(V^T PV)=&\mathrm{tr}[(I-H^T AN^{-1}A^T H)D(H^T l)] \\ &+E^T(H^T l)(I-H^T AN^{-1}A^T H)E(H^T l)\end{aligned} \tag{1.1.27}$$

因为

$$\begin{aligned}(H^T AN^{-1}A^T H)^2 &= H^T AN^{-1}A^T HH^T AN^{-1}A^T H \\ &= H^T AN^{-1}A^T PAN^{-1}A^T H \\ &= H^T AN^{-1}A^T H(I-H^T AN^{-1}A^T H)^2 \\ &= I-H^T AN^{-1}A^T H-H^T AN^{-1}A^T H+(H^T AN^{-1}A^T H)^2 \\ &= I-H^T AN^{-1}A^T H\end{aligned}$$

故$(H^T AN^T A^T H)$和$(I-H^T AN^{-1}A^T H)$均为幂等阵，按附录三，有

$$\mathrm{tr}(I-H^T AN^{-1}A^T H)=\mathrm{R}(I-H^T AN^{-1}A^T H)=n-t \tag{1.1.28}$$

此外，还有

$$\begin{aligned}D(H^T l) &= H^T D(l)H=H^T \overline{\mu}^2 P^{-1}H=\overline{\mu}^2 H^T(HH^T)^{-1}H \\ &= \overline{\mu}^2 H^T(H^T)^{-1}H^{-1}H=\overline{\mu}^2 I\end{aligned} \tag{1.1.29}$$

$$E(H^T l)=H^T E(l)=H^T A\overline{X} \tag{1.1.30}$$

$$\begin{aligned}E^T(H^T l)(I-H^T AN^{-1}A^T H)E(H^T l) &= (H^T A\overline{X})^T(I-H^T AN^{-1}A^T H)(H^T A\overline{X}) \\ &= \overline{X}^T A^T HH^T A\overline{X}-\overline{X}^T A^T HH^T AN^{-1}A^T HH^T A\overline{X}\end{aligned}$$

$$=\overline{X}^T A^T P A\overline{X} - \overline{X} A^T PAN^{-1} A^T P A\overline{X} = O \tag{1.1.31}$$

将（1.1.28）、（1.1.29）和（1.1.31）式代入（1.1.27）式得

$$E(V^T PV) = \overline{\mu}^2 (n-t) \tag{1.1.32}$$

或

$$E\left(\frac{V^T PV}{n-t}\right) = E(\mu^2) = \overline{\mu}^2 \tag{1.1.33}$$

所以，由（1.1.23）式算得的 μ^2 是单位权方差 $\overline{\mu}^2$ 的无偏估计。

综上所述，满秩平差问题的特点是，数学模型中系数阵 A 为列满秩，法方程系数阵 N 非奇异，未知参数（高程或坐标等）的最小二乘估计唯一，而且是最优线性无偏估计，而使平差问题满秩的前提是预先配置必要的起始数据。

§1.2　秩亏自由网平差原理

先看一个小例。设有简单水准网如图1.1，选定 x_3 为已知高程，按经典平差可列出如下误差方程

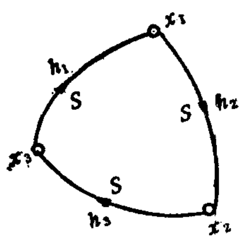

图 1.1

$$\underset{31}{V} = \underset{32}{A}\ \underset{21}{X} - \underset{31}{l}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}$$

在 A 中二阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$，$A$ 的秩 $R(A) = 2$，A 为列满秩。法方程为

$$A^T AX = A^T l$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 - l_2 \\ l_2 - l_3 \end{pmatrix}$$

系数阵 $N = A^T A$ 的行列式 $|N| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$，故 $R(N) = 2$，非奇异，法方程有唯一解：

$$X = (x_1 \quad x_2)^T = N^{-1} A^T l \tag{1.2.1}$$

如果网中不设起始高程，x_3 和 x_1、x_2 一样也是未知高程，那么可列出如下误差方程：

$$\underset{31}{V} = \underset{33}{A}\ \underset{31}{X} - \underset{31}{l} \tag{1.2.2}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}$$

此时系数阵A的行列式为

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

故$\mathrm{R}(A)=2$，A为降秩阵。由此所得的法方程系数阵为

$$N=A^TA=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

而且有

$$|N|=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=3\neq 0$$

故$\mathrm{R}(N)=2$，N为奇异阵，其凯莱逆N^{-1}不存在。此时如仍按经典平差公式（1.1.4）解X，将不可能得出唯一解。其原因就是A不列满秩，N奇异。

令A的列满秩数为$\overline{\mathrm{R}}(A)$，A的实际秩数为$\mathrm{R}(A)$，$d=\overline{\mathrm{R}}(A)-\mathrm{R}(A)$，$d$称为秩亏数，简称秩亏，此例$d=3-2=1$，秩亏为1。对于法方程系数阵$N$，必有$d=\overline{\mathrm{R}}(N)-\mathrm{R}(N)$。

如果$d=0$，就是经典满秩平差问题；当$d\neq 0$时，就是所谓的秩亏自由网平差。

在实用上，产生秩亏的主要原因是不设起始数据，而且选定网中高程，坐标等作为平差的未知参数，所以秩亏自由网平差也叫无固定数据的自由网平差，简称自由网平差。

具体问题中阵A或N的秩亏d，虽然可以通过计算$\mathrm{R}(A)$或$\mathrm{R}(N)$求出，实际上并不需要这样作，究其原因可知，秩亏d就是网中必要的起始数据个数。对于水准网，必要一个点的起算高程，故$d=1$；测边网或边角网，必要起始数为一点坐标和一个方位角，故$d=3$；测角网必要起始数据为两个点的坐标，故$d=4$等等。

在具有秩亏d的情况下，如何求上述未知参数的最优估计，如何评定精度以及应用生产实际的可能性和适应性等，就是自由网平差研究的课题。

一、用广义逆解线性方程组

设A为$n\times m$矩阵，秩$\mathrm{R}(A)=r\leqslant\min(m,n)$，满足如下方程的$G$

$$AGA=A \tag{1.2.3}$$

定义为A的广义逆，G为$m\times n$矩阵，并记为A^-，一般不唯一，称为A^-型广义逆。

A^-型广义逆有如下性质：

(1) $(A^T)^-=(A^-)^T$ （其中之一，即$(A^-)^T\subset(A^T)^-$） (1.2.4)

(2) $(kA)^-=\dfrac{1}{k}A^-\quad k\neq 0$ (1.2.5)

$(kA)^-=O\quad k=0$ (1.2.6)

(3) $$A(A^TA)^-A^TA=A \tag{1.2.7}$$

$$A^TA(A^TA)^-A^T=A^T \tag{1.2.8}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(4)
$$(A^-A)^2 = A^-A \tag{1.2.9}$$
$$(AA^-)^2 = AA^- \tag{1.2.10}$$
亦即 A^-A 和 AA^- 均为幂等阵。

如下对 A^- 型广义逆作某些限制，就可得唯一确定的广义逆。

设矩阵 A 为 $n\times m$ 阶，如果有一广义逆 G 满足如下四个方程：
$$AGA = A \tag{1.2.11}$$
$$GAG = G \tag{1.2.12}$$
$$(GA)^T = GA \tag{1.2.13}$$
$$(AG)^T = AG \tag{1.2.14}$$
则 G 为 A 的 A^+ 型广义逆，称为 Moore-Penrose 逆，简称伪逆。因伪逆 G 满足(1.2.11)，它也是一个 A^- 型广义逆，因此 A^- 的四个性质对 A^+ 来说都成立。此外，A^+ 还有一个性质：
$$(A^+)^+ = A \tag{1.2.15}$$
A^+ 是唯一确定的广义逆。

有关广义逆详细叙述见附录一。

广义逆理论的提出与解线性方程组理论有关，测量平差的基本计算归根到底是解线性方程组问题。所以下面介绍用广义逆解线性方程组的基本理论。

设有相容线性方程组
$$\underset{nm}{A}\ \underset{m1}{X} = \underset{n1}{B} \tag{1.2.16}$$
其解存在，设为 $\underset{m1}{Y}$，则有
$$AY = B \tag{1.2.17}$$
按 A^- 逆定义，有
$$A\,A^-AY = B$$
或
$$A\,A^-B = B \tag{1.2.18}$$
此式称为方程组（1.2.16）的相容条件。由此可知
$$X = A^-B \tag{1.2.19}$$
为（1.2.16）的一个特解。

齐次方程组 $AX = O$ 的一般解为
$$X = (I - A^-A)M \tag{1.2.20}$$
I 为单位阵，M 为任意向量。事实上
$$AX = A(I - A^-A)M = (A - AA^-A)M = (A - A)M = O$$

因为非齐次方程组（1.2.16）的一般解等于它的任一特解与对应齐次方程组一般解之和，故（1.2.16）的一般解为
$$X = A^-B + (I - A^-A)M \tag{1.2.21}$$
这是相容线性方程组解的一般公式。

当A为m阶非奇异方阵时，则$A^{-}=A^{-1}$，即A^{-}等于凯莱逆，此时

$$X=A^{-1}B+(I-A^{-1}A)M=A^{-1}B \tag{1.2.22}$$

式中顾及$A^{-1}A=I$，这就是满秩平差中法方程的解。

下面将结合自由网平差原理说明A为降秩情况下的各种解。

二、秩亏方程组的最小二乘解

在自由网平差中，数学模型为

$$\underset{n1}{E(l)}=\underset{nt\,t1}{A\overline{X}} \qquad D(l)=\overline{\mu}^2Q_{ll}=\overline{\mu}^2P^{-1} \tag{1.2.23}$$

其中$\mathrm{R}(A)=r<t$，秩亏$d=t-r$，P为n阶非奇异对称阵，此模型称为具有秩亏的高斯-马尔可夫模型。由模型得误差方程为

$$V=AX-l \tag{1.2.24}$$

按最小二乘原理

$$V^TPV=\min \tag{1.2.25}$$

得法方程为

$$\underset{tt}{N}\ X=A^TPl$$

式中$\mathrm{R}(N)=\mathrm{R}(A^TPA)=r$，$N$为奇异阵，其凯莱逆不存在，得不到唯一解。实际上，由（1.2.21）可知，法方程有如下的一般解：

$$X=N^{-}A^TPl+(I-M^{-}N)M \tag{1.2.26}$$

式中$N^{-}N\neq I$，所以满足法方程的解有任意多个，其解不唯一。

由此可知，在秩亏自由网平差中，如果像经典平差那样，只要求遵循最小二乘原则求未知参数的解，将不可能取得唯一确定的估计量，这是这种平差方法的特点。为了确定唯一的估计量，需要在遵循平差基本原则——最小二乘原则基础上附加另外条件，这个条件的确定应该保证所求得的未知参数的估计量是最优的。这样的最优解是唯一存在的，它就是法方程的最小范数解。

三、秩亏法方程的最小范数解

设满足法方程的一个解为$X=(x_1\ \ x_2\ \ \cdots\ \ x_t)^T$，取其平方和的开方为

$$\|X\|=(X^TX)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

称为向量X的范数，几何意义是向量的长度。如果在法方程的一般解中有一个解X满足其范数最小，这个解就称为最小范数解，最小范数解满足的条件，称为最小范数条件，其表达式为

$$\|X\|=\min \quad 或 \quad X^TX=\min \tag{1.2.27}$$

设N_m^{-}是N的N^{-}型一个广义逆，由（1.2.19）式知，法方程有一个特解为

$$X=N_m^{-}A^TPl \tag{1.2.28}$$

如果这个特解的范数$\|N_m^{-}A^TPl\|$比起任何解的范数要小，那它就是最小范数解。

现设由（1.2.28）式表达的X就是最小范数解，其广义逆N_m^{-}就称为最小范数逆，现在的问题是要确定N_m^{-}。

下面要证明，一个最小范数逆必须满足下列两个方程：

$$NN_m^-N = N \quad (1.2.29)$$

$$(N_m^-N)^T = N_m^-N \quad (1.2.30)$$

N_m^- 既是一个 N^- 型广义逆，前一式必然要成立。第二式说明 N_m^-N 是对称阵。

按（1.2.26)式，当法方程的特解取（1.2.28）式时，其一般解为

$$X = N_m^-A^TPl + (I - N_m^-N)M \quad (1.2.31)$$

因为特解为最小范数解，故必有

$$\|N_m^-A^TPl\| \leqslant \|N_m^-A^TPl + (I - N_m^-N)M\| \quad (1.2.32)$$

设 Y 为满足法方程的任意解向量，则有

$$NY = A^TPl \quad (1.2.33)$$

代入（1.2.32）得

$$\|N_m^-NY\| \leqslant \|N_m^-NY + (I - N_m^-N)M\| \quad (1.2.34)$$

两边平方，考虑 $\|U\|^2 = U^TU$，得

$$(N_m^-NY)^T(N_m^-NY) \leqslant (N_m^-NY + (I - N_m^-N)M)^T(N_m^-NY + (I - N_m^-N)M)$$

化简：

$$\begin{aligned} O &\leqslant (N_m^-NY)^T(I - N_m^-N)M + ((I - N_m^-N)M)^TN_m^-NY \\ &\quad + ((I - N_m^-N)M)^T(I - N_m^-N)M \\ &= M^T(I - N_m^-N)^T(I - N_m^-N)M + 2Y^T(N_m^-N)^T(I - N_m^-N)M \end{aligned}$$

上式右边第一项大于等于零，使不等式成立，顾及 Y 与 M 的任意性，必须使

$$(N_m^-N)^T(I - N_m^-N) = O$$

或

$$(N_m^-N)^T = (N_m^-N)^TN_m^-N \quad (1.2.35)$$

两边转置：

$$(N_m^-N) = (N_m^-N)^TN_m^-N$$

可见（1.2.30）式成立。

由此可知，只要取满足（1.2.29）和（1.2.30）两条件的广义逆 N_m^- 作为最小范数逆，按（1.2.28）式就可求得法方程的最小范数解。

在自由网平差中，最小范数逆常取为

$$N_m^- = N^T(NN^T)^- \quad (1.2.36)$$

它确实满足上述两个条件，现验证如下：

$$NN_m^-N = NN^T(NN^T)^-N \overset{(1.2.8)}{=\!=\!=} N$$

$$(N_m^-N)^T = (N^T(NN^T)^-N)^T = N^T(NN^T)^-N \overset{(1.2.36)}{=\!=\!=} N_m^-N$$

由于法方程系数阵 N 对称，$N^T = N$，故有

$$N_m^- = N(NN)^- \quad (1.2.37)$$

将（1.2.29）、（1.2.30）两个条件与伪逆四个条件相对照可知，它是其中两个条件，但只有同时满足四个条件的逆才唯一，所以最小范数逆仍是 N^- 型而不是 N^+ 型，它

不是唯一确定的。虽然最小范数逆不唯一，但不论哪一个最小范数逆代入公式（1.2.28），其最小范数解却是唯一的。了解这一点对于研究自由网平差理论十分重要。下面作出证明。

最小范数逆所满足的两个条件与满足下列一个条件是一致的：

$$N_m^- N N^T = N^T \tag{1.2.38}$$

事实上

$$N^T \xlongequal{(1.2.29)} (N N_m^- N)^T = (N_m^- N)^T N^T \xlongequal{(1.2.30)} N_m^- N N^T$$

亦即满足（1.2.38）的 N_m^- 也是最小范数逆。

设有两个最小范数逆 $N_{m_1}^-$ 和 $N_{m_2}^-$，相应最小范数解为

$$X_1 = N_{m_1}^- A^T P l, \qquad X_2 = N_{m_2}^- A^T P l$$

按（1.2.38）式有

$$N_{m_1}^- N N^T = N^T, \quad N_{m_2}^- N N^T = N^T$$

即

$$(N_{m_1}^- - N_{m_2}^-) N N^T = O$$

两边右乘 $(N_{m_1}^- - N_{m_2}^-)^T$ 得

$$(N_{m_1}^- - N_{m_2}^-) N N^T (N_{m_1}^- - N_{m_2}^-)^T = O$$

或

$$[(N_{m_1}^- - N_{m_2}^-) N][(N_{m_1}^- - N_{m_2}^-) N]^T = O$$

上式成立，必须

$$(N_{m_1}^- - N_{m_2}^-) N = O$$

右乘任意解向量 Y，得

$$(N_{m_1}^- - N_{m_2}^-) N Y = O$$

因为 $NY = A^T P l$，故有

$$(N_{m_1}^- - N_{m_2}^-) A^T P l = O$$

$$N_{m_1}^- A^T P l - N_{m_2}^- A^T P l = O$$

$$X_1 - X_2 = O$$

即

$$X_1 = X_2$$

可见，最小范数解不因最小范数逆不同而异，最小范数解唯一。

将（1.2.37）式代入（1.2.28）式得法方程的最小范数解为

$$X = N(NN)^- A^T P l \tag{1.2.39}$$

由于 N 的伪逆 N^+ 也满足最小范数逆的两个条件，所以 N^+ 也是一个最小范数逆，用 N^+ 代 N_m^-，也可求得最小范数解：

$$X = N^+ A^T P l \tag{1.2.40}$$

在附录一中已证明下式成立

$$N^+ = N(NN)^- N(NN)^- N \tag{1.2.41}$$

所以有

$$X = N(NN)^- N(NN)^- N A^T P l = N_m^- N_m^- N A^T P l \tag{1.2.42}$$

特殊地，当N非奇异，即秩亏 $d = 0$ 时，则有

$$N_m^- = N^{-1} = N^+$$

于是

$$X = N^{-1} A^T P l$$

此即满秩平差求未知参数的估计公式。

四、自由网平差及算例

自由网平差数学模型是（1.2.23）式，误差方程是（1.2.24），平差所遵循的原则是

$$V^T P V = \min \tag{1.2.43}$$

$$X^T X = \min \tag{1.2.44}$$

平差参数的估计公式是

$$N X = A^T P l \tag{1.2.45}$$

$$X = N_m^- A^T P l = N(NN)^- A^T P l \tag{1.2.46}$$

$$X = N^+ A^T P l = N(NN)^- N(NN)^- N A^T P l \tag{1.2.47}$$

此法是 Mittermayer 提出的[1]。

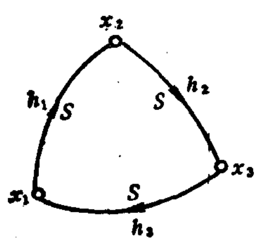

图 1.2

例 1　在图 1.2 水准网中测得

$h_1 = 12.345$ m，　$h_2 = 3.478$ m，　$h_3 = -15.817$ m

各线路距离 S 相等，求平差后各点高程。

取各点近似高程为

$H_1^0 = 0$ m，　$H_2^0 = 12.345$ m，　$H_3^0 = 15.823$m

1．误差方程

$$V = AX - l$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

常数项单位 mm，秩亏 $d = 1$。

2．法方程

$$N X = A^T l$$

$$N = A^T A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\quad A^T l = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

3．计算 $(NN)^-$ 和 $N_m^- = N(NN)^-$

$$NN=\begin{pmatrix}6&-3&-3\\-3&6&-3\\-3&-3&6\end{pmatrix}$$

为了验证不同最小范数逆得出相同的最小范数解，这里按附录一所述的两种方法计算广义逆 $(NN)^-$ 从而得出两个不同的 N_m^-。

（1）因 $R(N)=2$，$R(NN)=2$，在 NN 中取左上角二阶行列式不为零的子阵并求凯莱逆得

$$A_1=\begin{pmatrix}6&-3\\-3&6\end{pmatrix},\quad A_1^{-1}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}6&3\\3&6\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$$

于是

$$(NN)^-=\begin{pmatrix}2/9&1/9&0\\1/9&2/9&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$N_{m_1}^-=N(NN)^-=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

（2）令 $\underset{33}{(NN)}=\underset{32}{B}\,\underset{23}{C}$，取

$$B=\begin{pmatrix}6&-3\\-3&6\\-3&-3\end{pmatrix}\quad 则\quad C=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

这里必须 $R(B)=R(C)=R(NN)=2$。

计算 B 的左逆：

$$B_L^{-1}=(B^TB)^{-1}B^T=\frac{1}{81}\begin{pmatrix}9&0&-9\\0&9&-9\end{pmatrix}$$

计算 C 的右逆：

$$C_R^{-1}=C^T(CC^T)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\\-1&-1\end{pmatrix}$$

于是

$$(NN)^-=C_R^{-1}B_L^{-1}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

$$N_{m_2}^-=N(NN)^-=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

4. 计算 X

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com