

内力影响面分析的机动法

——理论，算法和程序

Kinematic Method for the Internal
Force Influence Surface Analysis
——Theory, Algorithm and Software

沈为平 刘 钢 著

人民交通出版社

2000节点、10000自由度的计算模型,进行静力分析和机动法内力影响面分析。该程序的工作站版本也已开发完成。

1987年起,这一成果开始应用于工程中,如用于上海杨浦大桥、杭州中河路立交桥、广东承德伦教立交桥、四川的三座立交桥和北京的若干立交桥的分析与计算,均取得了极好效果。

1989年国家教委鉴定会对当时的研究成果作了鉴定,专家们认为该成果已达到国际先进水平,国际上未见同类工作。并希望推广这一成果。

本书是对上述5年科研工作的总结,系统地阐述了理论(第一章)、算法(第二章),并编制了6个教学程序。

本书第一作者负责本课题的组织实施和理论研究,第二作者参与了部分理论研究,并负责计算程序的开发。参加研究工作的还有:施平、许昌、戴弘、罗长伟、吴乃恩、戴朝威、王忠辉与冯晓焰。李云鹏和祝绮为本书编制了6个程序。这些程序参考了刘正兴著的《结构分析程序设计基础》一书中的程序。

在研究过程中,我们得到了金成棣、钟万勰、项海帆、石洞、张乃华、林元培、张昌权、何福保、邵容光等前辈专家的指导和鼓励。

在应用中,我们和工程界的专家们建立了良好的合作关系,专家们对我们的工作提出了宝贵建议。他们是:王春富、谢邦珠、王南翔、许荣华、倪一清、谢源生、胡云程、胡洪畴、臧瑜、葛竞辉、邬贵全、王岗、张宏宝等。

国家教委资助优秀年轻教师基金为本课题提供了充足的经费。张宁、杨建安自始至终关心支持我们的研究工作。

借此机会我们向上述各位专家和朋友们,以及其他以各种方式支持过我们的朋友们表示衷心感谢。没有他们的支持、鼓励、合作和共同努力,这项工作是不能完成的,至少达不到目前这样的完美程度。我们谨以此书奉献给他们。

沈为平 刘 钢

一九九三·七

(京) 新登字091号

内力影响面分析的机动法——理论，算法和程序

沈为平 刘 钢 著

插图设计：王惠茹 正文设计：周 圆

人民交通出版社出版
(100013 北京和平里东街10号)

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

顺义牛栏山印刷厂印刷

开本：850×1168 $\frac{1}{32}$ 印张：11 字数：280千

1994年10月 第1版

1994年10月 第1版 第1次印刷

印数：0001—2310册 定价：13.00元

ISBN 7-114-01959-9
U·01304

內 容 提 要

该书是一部介绍结构内力影响面分析的专著，主要内容有：求解应力影响函数的机动法的理论、求解内力影响面的机动法的算法和采用机动法计算内力影响面的程序。该书所介绍的成果在国内上海杨浦大桥等六、七座大跨径桥梁和城市立交桥的应用，已取得了极好效果。

作者简介

沈为平 浙江鄞县人,1946年3月16日出生于上海。1963至1970年就读于北京航空航天大学飞机和发动机系。1979至1982年就读于上海交通大学工程力学系,师从钟万勰教授,1982年2月获工学硕士学位。1983年3月赴联邦德国斯图加特大学,1986年3月获博士学位,导师为J. Argyris教授,同年4月归国。现任上海交通大学建筑工程与力学院副院长,土木建筑工程系系主任,工程力学系教授。

沈为平的主要研究领域为计算结构力学及结构工程。曾负责国家自然科学基金等十余项课题。在结构分析软件系统,结构弹塑性极限分析和稳定分析,内力影响面机动算法理论,桥梁活载加载算法,结构力学并行计算等方面作了大量工作,发表了40篇左右论文。

沈为平曾应日本京都大学和英国威尔士大学邀请,作为客座教授在两校短期任职,并建立了校际合作关系。曾前往德国、奥地利、前苏联、波兰、泰国等国家的大学、公司和研究所做学术交流活动。

刘 钢 湖北枣阳县人,1964年1月31日出生于上海。1981至1985年就读于上海交通大学工程力学系,获工学学士学位。1985年至1988年在同系读研究生,1988年2月获工学硕士学位,同年留该系任教,曾获上海市优秀青年教师称号。1993年10月赴英,现是英国牛津大学土木系博士生。

刘钢的主要研究方向是计算结构力学,他在内力影响面机动算法及程序实现,结构静动力分析程序的发展及工程应用方面作了很多工作。目前从事土力学理论及工程应用研究工作。曾发表了10篇左右论文。

KINEMATIC METHOD FOR THE INTERNAL FORCE INFLUENCE SURFACE ANALYSIS

——Theories, algorithms and softwares

Weiping SHEN and Gang LIU

ABSTRACT

Internal force influence surface analysis plays an important role in the structural engineering, especially for the analysis of bridge structures subjected to live loads. The most efficient method for obtaining influence surface is the kinematic method based on the Muller-Breslau principle. But unfortunately this principle is applicable only to discrete structures, namely, trusses, continuous beams, frames, and grids. Modern structures are more complex and must be idealized with different kinds of numerical models, for example, finite element model, finite strip model, finite difference model, boundary element model, etc. It is an urgent need to develop a theoretical basis for kinematic method of above-mentioned numerical models.

In last five years the authors have proposed and proved several principles and based on them provided the kinematic method for the internal force influenced surface analysis of different kinds of numerical models. Using the finite element model a software system has been developed to analyze the influenced surface with the theories and algorithms. It is powerful and efficient and has been applied to analyze several important and large-scale bridges in China. This book is a

summary of our research achievements.

In section 1, the theories are discussed. Four principles are provided and explained. The first two are the principles for the average internal force influence surface of continua and finite elements respectively. Because they deal with the average internal force, usually they are used for relative simpler and lower-order elements. The third principle is for the generalized internal force of elements. Based on it the influence surface of the internal force at any position can be analyzed. So one is able to apply it to relative more complicated and higher-order elements. The last principle is the most general one. It is applicable to any kind of numerical model in which the only independent unknowns are displacements (or generalized displacements).

The theoretical basis of these principles is quite similar to that for the original Muller-Breslau principle, although their expressions are far different from each other. Some standard deformations are defined. From them the equivalent load vector will be calculated (principle 1-3), or the equivalent load vector is defined directly (principle 4). Then the displacement fields generated by the equivalent loads will represent the internal force surfaces. Sometimes in our publications these principles were named the generalized Muller-Breslau principles.

In section 2, the algorithms are presented. For principle 2, the explicit expressions of standard node displacement modes (SDMs) for different popular finite elements are given. For principle 3, the element eigenvector analysis for SDMs is proposed. And several examples of finite element model and finite strip model are described to show how to apply principle 4, to different numerical models.

In the last section, six computer programs are provided and ex-

plained in detail. In order to make the program easy to understand, there is only one kind of finite element in each program. All the source programs are attached as appendices.

前 言

结构内力影响面分析是桥梁工程中的一个重要问题。以往的桥梁结构分析中，一般把桥梁用梁来模型化，因而只需分析梁的内力一维影响线。影响线的分析可以采用静力法，但是更多地采用根据内力影响线定理的机动法，在大多数情况下机动法比静力法方便且效率高。

大型复杂桥梁的发展，特别是大量公路立交桥的建造，使得桥梁结构分析不能再采用单纯的梁单元模型，而要采用有限元方法或其他数值模型，同时必须分析二维的内力影响面。传统结构力学的内力影响线定理不适用于这种模型，因而只能采用静力法分析影响面。用静力法求一个影响面要在加载面上选用几百上千加载点反复执行静力分析，影响面要从大量静力分析结果中提取。显然静力法是效率低又不方便的方法。这一现状与静力分析中有限元及其他数值方法的理论、算法及程序的发展是不相适应的。关键在于缺少适用于各种数值模型的类似梁的内力影响线定理的理论。

1987年开始，本书第一作者负责的课题组开始研究机动法分析各种数值模型内力影响面的理论、算法和应用。这项工作到1992年完成，历时五年。在此期间，理论研究、算法设计，程序编制和工程应用齐头并进，提出了若干逐步深入的定理，设计了相应算法，编制了以有限元法为主的应用程序 DDJB—W。该程序以大连理工大学的多单元多工况静力分析 DDJ—W 微机程序为基础，改写了数据结构，扩大了解题规模，提高了效率，增加了机动法分析内力影响面和动态规划进行活载加载及图形前处理功能。最新的2.0版；可以在640K 字节内存、40兆外存的硬件条件下，求解

目 录

前言

引言	(1)
----------	-----

第一章 求解应力影响函数的机动法的理论	(6)
---------------------------	-----

§ 1.1 杆系结构的内力影响线定理	(6)
--------------------------	-----

§ 1.1.1 线性弹性结构的叠加原理	(6)
---------------------------	-----

§ 1.1.2 线性弹性结构的功的互等定理 (贝蒂定理)	(7)
---------------------------------------	-----

§ 1.1.3 杆系结构的内力影响线定理	(9)
----------------------------	-----

§ 1.2 连续体和有限元模型平均应力影响函数定理	(15)
---------------------------------	------

§ 1.2.1 连续体平均应力影响函数定理 (定理一)	(16)
--------------------------------------	------

§ 1.2.2 有限元模型的平均应力影响函数定理 (定理二)	(18)
---	------

§ 1.3 高阶有限单元广义应力的影响函数定理	(23)
-------------------------------	------

§ 1.3.1 求解单元内一点应力的影响函数近似解的 “强迫应变盒”方法	(23)
---	------

§ 1.3.2 单元广义应力的影响函数定理 (定理三)	(25)
--------------------------------------	------

§ 1.4 求数值模型一点应力的影响函数的普遍定理 (定理四)	(28)
--	------

§ 1.4.1 广义位移和广义力	(29)
------------------------	------

§ 1.4.2 求一点应力影响函数的普遍定理 (定理四)	(31)
---------------------------------------	------

§ 1.5 小结·····	(34)
第二章 求解内力影响面的机动法的算法 ·····	(37)
§ 2.1 梁单元内力影响线的机动法的算法·····	(38)
§ 2.2 有限单元平均内力影响面的算法·····	(48)
§ 2.2.1 算法流程·····	(48)
§ 2.2.2 构造有限单元基准节点位移模式的原理及 常用单元的公式·····	(53)
§ 2.3 应用定理三求单元某点应力分量的影响面的 算法·····	(70)
§ 2.3.1 单元节点弹性位移子空间基向量的单元特 征值解法·····	(71)
§ 2.3.2 用单元广义应力表示的单元内任一点的 应力·····	(75)
§ 2.4 定理四的算法·····	(76)
§ 2.4.1 有限元模型应用定理四的算法·····	(77)
§ 2.4.2 有限条模型应用定理四算法初步·····	(83)
§ 2.5 小结·····	(87)
第三章 采用机动法计算内力影响面的程序 ·····	(91)
§ 3.1 计算平面桁架内力影响线的程序 (杆单元) —— INFBAR ·····	(92)
§ 3.1.1 输入数据格式·····	(92)
§ 3.1.2 子例程清单及数据结构·····	(97)
§ 3.1.3 各子例程说明 ·····	(103)
§ 3.1.4 输出结果说明 ·····	(137)
§ 3.2 计算平面问题内力影响面的程序 (三节点三角 形膜元) ——INFPN1 ·····	(146)
§ 3.2.1 输入数据格式, 子例程清单及数据结构 ···	(146)
§ 3.2.2 三角形膜元单元刚度阵算法及有关子 例程 ·····	(149)
§ 3.2.3 三角形膜元平均内力和一点内力影响面	

算法及有关子例程	(156)
§ 3.2.4 算例	(159)
§ 3.3 计算平面问题内力影响面的程序 (四节点等参膜元) —— INFPN2	(163)
§ 3.3.1 输入数据格式, 子例程清单及数据结构 ...	(163)
§ 3.3.2 四节点等参膜元单元刚度阵算法及有关子例程	(165)
§ 3.3.3 四节点等参膜元平均内力及一点内力影响面算法及有关子例程	(175)
§ 3.3.4 算例	(180)
§ 3.4 计算空间问题应力影响面的程序 (八节点等参块体元) —— INFF3D	(184)
§ 3.4.1 输入数据格式, 子例程清单及数据结构 ...	(184)
§ 3.4.2 八节点等参块体元单元刚度阵算法及有关子例程	(187)
§ 3.4.3 八节点等参块体元平均应力及一点应力影响面算法及有关子例程	(198)
§ 3.4.4 算例	(205)
§ 3.5 计算板弯曲问题内力影响面的程序 (三角形三节点板弯曲元) —— INFPLT	(208)
§ 3.5.1 输入数据格式, 子例程清单及数据结构 ...	(208)
§ 3.5.2 三角形三节点离散克希霍夫板弯曲元单元刚度阵算法及有关子例程	(211)
§ 3.5.3 三角形三节点板弯曲元平均内力影响面算法及有关子例程	(221)
§ 3.5.4 算例	(223)
§ 3.6 计算平面框架内力影响线的程序 (梁单元) —— INFBEM	(226)
§ 3.6.1 输入数据格式, 子例程清单及数据结果 ...	(226)
§ 3.6.2 梁单元单元刚度阵, 单元内荷载和内力算法	

及有关子例程	(228)
§ 3.6.3 梁单元内力影响线算法及有关子例程	(239)
§ 3.6.4 算例	(248)
§ 3.7 小结	(255)
参考文献	(259)
附录: 第三章讨论的各源程序	(261)
1. 计算平面桁架内力影响线的程序 (杆单元)	
——INFBAR	(261)
2. 计算平面问题内力影响面的程序 (三角形膜元)	
——INFPN1	(282)
3. 计算平面问题内力影响面的程序 (四节点等参膜元)	
——INFPN2	(289)
4. 计算空间问题应力影响面的程序 (八节点等参块体元)	
——INFF3D	(298)
5. 计算板弯曲问题内力影响面的程序 (三角形三节点板弯	
曲元) ——INFPLT	(312)
6. 计算平面框架内力影响线的程序 (梁单元)	
——INFBEM	(322)

引言

结构内力影响面的分析，在结构力学、结构工程特别是桥梁工程中有重要应用。对于一座桥梁，结构某处内力的影响面在桥面上的值，表示了荷载在桥面上移动时对该内力的作用，是分析桥面上车队荷载加载时的基础。

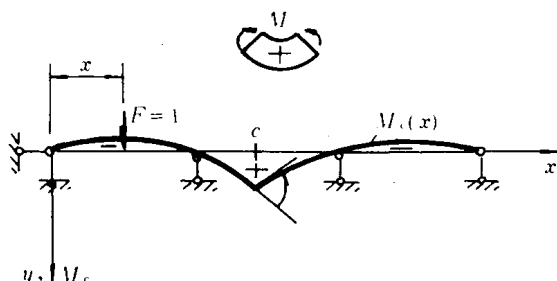


图 0.1-1 三跨连续梁的影响线

图 0.1-1 所示是一个三跨连续梁。有一个单位集中力 F 竖直向下作用在梁上。 F 是一个移动荷载，如果用它距梁左端的距离 x 来表示它的位置， x 是个变量。考虑梁上某固定截面 c 处某指定内力分量，例如弯矩 M_c ，当 F 作用在不同位置时， M_c 的值是不同的，或说 M_c 是 F 作用位置 x 的函数，用 $M_c(x)$ 来表示。用纵坐标表示弯矩值，取 F 作用方向即竖直向下为正向，把 F 作用下产生的 M_c 值标志在 F 作用位置处，就得到了图示曲线。该曲线就称作 C 截面弯矩 M_c 对应于竖直向下单位集中外力 F 的影响线，简称 M_c 的内力影响线。在本书中，固定截面 c 称为关心截面，内力 M_c 称为关心内力分量。

请注意把内力影响线与结构内力图（例如梁的弯矩图）相区别。影响线所对应的内力位置是固定的，荷载是移动的。内力影

响线的横坐标是外力作用位置,纵坐标是关心截面关心内力值。而内力图的荷载大小和作用位置是固定的,内力的截面位置是变动的。横坐标是截面位置,纵坐标是该截面内力值。

对于平面问题或板弯曲及壳体等结构分析问题,结构是二维的,外力移动范围是一个“面”。同样,如果考虑结构某点某应力(内力)的值,它也是随着外力作用位置变化而变化的,即该应力分量 σ_i 是外力作用位置 (x, y) 的函数,表示为 $\sigma_i(x, y)$ 。用与影响线同样方法画出的函数图形将是一个曲面,称为 σ_i 的应力(内力)影响面。 σ_i 称为关心应力(内力),它的位置称为关心点。

同样,对于空间问题这样的三维结构,外力作用范围在理论上是一个三维空间的“体”。相应可把影响函数称为应力影响“体”。但是在本书中我们不采用这一名称,而把它与影响线和影响面统称为应力(内力)影响函数。

求解线性弹性杆系结构的内力影响线有两种方法。一种是静力法。以图 0.1-1 所示三跨连续梁为例,移动外力 F ,即改变 x 的值,对每一个 F 作用位置,作一次结构静力分析,得到相应的 M_c 值。当 F 作用点相对较密时,我们就可以得到足够光滑的影响线的图形。

另一种方法是机动法。仍以图 0.1-1 为例,截断截面 C ,代之以铰,并强迫产生一个相对单位转角,即铰左右两侧梁段切线夹角为 1 弧度,则由此产生的梁位移曲线与 M_c 内力影响线完全一致。

比较以上两种方法。机动法求影响线只需分析一次,静力法要分析足够多次。当然,静力法可同时求各截面影响线。但一般在实际应用中需求影响线的截面较少,机动法的效率要高得多。

复杂结构不仅有梁构件,还有板,平面应力应变膜,壳体及三维块体等连续体。对于这类结构已发展出十分有效且便于电子计算机执行的各种数值方法,例如各种有限元法,有限条法,边界元法及有限差分法。但是对于这类线性弹性结构的内力影响面分析,一般只能采用静力法。原因何在?

目前用机动法分析内力影响面的现状与 50 年代结构静力分析的状况相类似，见图 0.1-2 所示。图上部所示为静力分析。那时对于杆系这样的离散结构可用力法，位移法或混合法得到线性方程组，用计算机或其他计算工具解此线性方程组求得解答。对于连续结构则得到偏微分方程组，其中少数形状规则、荷载简单的连续体，可以用解析法得到解析解。对于复杂结构则无法求解。于

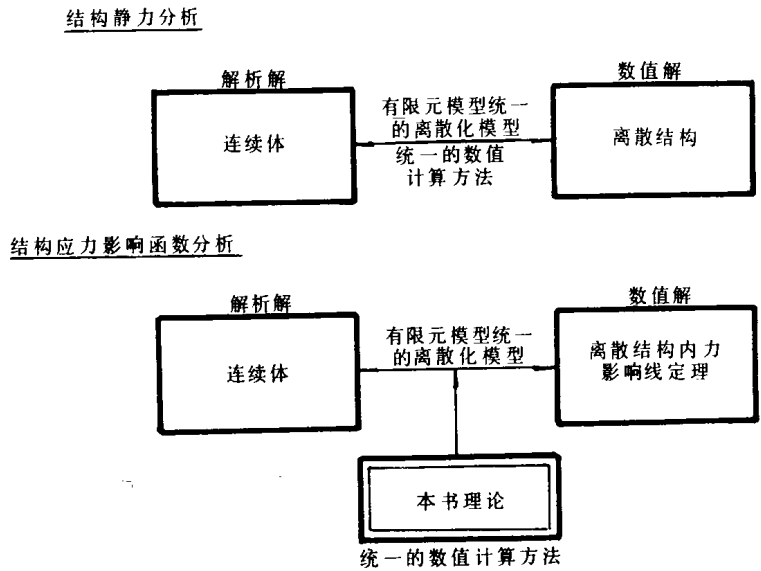


图 0.1-2 本书理论的背景和作用

是发展了各种数值方法。它们把连续体离散化，与杆系结构组成统一的离散化结构，并导得线性方程组，用电子计算机解得结果。现在对于内力影响函数的机动法分析也类似这种状况。

对于杆系这样的离散结构，可以根据内力影响线定理用机动法求内力影响线。对于少数形状规则结构，主要是矩形板，有内力影响面的解析解。但是对于复杂结构，尽管可以用各种数值方法离散化，与杆系组成统一的离散化结构，但是还是只能用静力法分析内力影响面，其原因就在于对于连续体的数值模型缺乏一个类似杆系内力影响线定理的理论基础。我们的研究任务就是发