线性代数基础

〔美〕 J·索普 P·佩尔合著
钱辉镜 杨宗仁 等译

线性代数基础

[美]J. 索普 P. 佩尔 合著
钱辉镜 杨宋仁 等译

中央广播电视大学出版社

(京)新登字163号

线性代数基础

[美]J. 索普 P. 孔佩尔 合著

钱辉镜 杨宗仁 等译

*

中央广播电视大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京顺义北方印刷厂印装

·

开本 787×1092 1/16 印张 26.375 千字 604

1988 年 5 月第 1 版 1993 年 4 月第 1 次 印刷

印数 1—3,550

定价 16.50元

ISBN 7—304—00237—9/O·20

译者的话

由于线性代数课程的基本概念较为抽象，其理论具有较强的逻辑性而使不少学生望而生畏，被认为是一门难度较大的课程．对于业余自学者来说，学习本门课程的困难是不言而喻的．

本书作者在美国著名的纽约布鲁克港大学任教，具有丰富的教学经验和卓越的教学艺术．他们写作本书的目的就是要使具备高中数学基础的学生能够自学线性代数基础内容．本书内容安排由浅入深，循序渐进，力求在学生打下坚实基础后，再引入较抽象和困难的概念，以便于学生理解和吸收．鉴于线性代数课程具有广泛的实用性，本书在每一章内都列有应用实例以使学生开阔眼界．

参加本书翻译工作的有钱辉镜（第一章）、杨宗仁（第二章）、周燕（第三章、前言、习题答案）、孙美春（第四章）、沈桂芝（第五章）、冯泰（第六章、附录）．

在本书出版过程中，北京邮电学院数学系王玉孝副教授对全书作了认真的审稿工作，对此我们表示衷心的感谢．

由于我们翻译水平有限，难免有错，敬请广大读者批评指正．

译　者

1988年 3 月

前　言

本教科书是大学线性代数的初级教程．凡是掌握中学代数、几何与初等三角的学生均能理解本书的内容．

在本书的第一章里，首先学习用高斯消元法求解线性方程组．这是学习线性代数的一个自然起点，它可以把学生已经学过的中学代数知识平稳地过渡到线性代数．从线性方程组的解，我们自然地引出 R^n 中向量的概念以及向量空间 R^n 的结构．在学过 R^n 中的代数运算以后，我们就着手学习 R^2 中的向量几何，然后是 R^n 的向量几何问题．我们用向量方程来表示 R^n 中的直线；随后，作为一种求两个向量之间夹角的方法引进内积的概念，并用内积的概念来表示 R^2 中的直线、R^3 中的平面和 R^n 中的超平面．在 R^3 中作为一种求与两个已知向量垂直的向量的方法，我们引入了叉积的概念．我们还阐述了叉积的性质，并利用叉积来求平行六面体和四面体的体积、证明毕达哥拉斯定理对于 R^3 中四面体的推广．第一章最后以“应用”结束：介绍求解R^2中的线性规划问题的顶点法．

第二章介绍由矩阵所确定的线性变换的概念．我们从平面到自身的线性变换着手讨论，用大量浅显的例子着重说明它们的几何意义．然后将讨论转移到较为普遍的情况：从 R^n到R^m的线性变换．我们还要讨论线性变换和矩阵的代数运算，利用矩阵和线性变换之间的对应关系引出矩阵乘法，矩阵乘法是对应于线性变换的乘积的矩阵运算．接着，再讨论逆变换和逆矩阵．最后，以对于马尔科夫过程的应用结束．

第三章讨论行列式．我们先以通常的公式定义 2 阶矩阵，然后考察行变换对 2 阶行列式的作用，再用这些性质定义一个 n 阶矩阵的行列式，n 为任意数．这样做可使学生很快便学到一种较优的计算行列式的算法，而不必在一开始就去研究那些广泛的理论．随后我们再证明，还可以用子式的展开式或是用排列来求行列式的值．我们还要推导可逆矩阵求逆的代数余子式公式；并用此公式来证明克莱姆法则．对各定理的证明仅限于 3 阶行列式，以便使证明易于被读者领会．最后，我们要证明乘积的行列式是行列式的乘积，同时还要讨论在线性变换下，如何以行列式来度量面积和体积的伸缩．

第四章讨论 R^n 中的子空间、生成集以及线性相关性．我们要讨论向量在有序基下的坐标、正交规范基和格兰姆-施密特正交化法．最后，以讨论最小二乘近似法作为本章的结束．

在第五章里我们要研究 n 维空间到自身的线性变换的特性，讨论特征向量和特征值、方阵的对角化和等距变换．在这一章里，我们要充分讨论三维空间内的旋转变换．最后，讨论对角化方法如何应用于二次曲线的研究．

本书的最后一章论述一般向量空间．我们要讨论有限维向量空间的线性变换、线性相关性、基和维数的概念．我们以前几章的内容为例，详尽阐明这些抽象概念．和其它各章一样，本章以

对于线性差分方程的应用结束.

在写作本书的过程中,我们始终遵循下述原则:

1. 教科书的内容安排应该由浅入深. 较简单的内容安排在前面,待学生对本学科的具体概貌有所了解,打下坚实基础后,再介绍较抽象和困难的概念. 根据这一精神, 我们在前三章里从几何和计算的角度阐述线性代数问题; 到第四章再介绍较难学的线性相关性和基本的概念; 而一般向量空间这样抽象的概念则安排在第六章.

2. 好的教学方法应能使学生处于一个平稳的、始终建立在他们现有知识水平基础上的学习过程中. 我们将这一原则贯穿全书. 本书在一开始就安排学习线性方程组, 就是出于应用并扩大学生已掌握的中学代数知识的考虑.

3. 引入新概念要慎重,只有在其必要性对学生来说是显而易见的情况下, 才应该提出新概念. 特别要避免漫无目标地介绍许多定义. 例如,我们引入内积的概念,是为了度量两个向量之间的夹角;介绍叉积的概念,是为了求一个垂直于两个已知向量的向量; 讲述矩阵乘法, 是为了找到一个对应于线性变换乘积的矩阵运算.

4. 举例比之抽象的讨论更易于被学生接受. 为此,在证明一个定理之前, 我们经常先讨论一个精心选择的例子,用例子来阐明该定理,从而使证明过程的意义更加明确.

5. 对于大学低年级水平的学生来说, 通过做计算来学习,其效果最佳. 尽管他们能够理解抽象概念,但是不能缺少经常的计算技巧训练,以进一步理解和证实这些抽象概念. 我们在本书的每一节里都安排了许多计算实例和练习,学生决不致只就理论来思考问题.

6. 学生们是不大注意去学习严格的数学证明的. 虽然这些证明令数学家们满意,对数学程度较高的、认真的学生来说是基本的知识,但是对于初学的学生来说,却往往是不适应的. 为此,我们采取以下措施来克服这个难题:

(i) 尽量用恰当、通俗的语言准确地叙述每一条定理.

(ii) 细致、严格地证明各项定理. 无论这些证明是相当浅显的,还是对于加深学生对定理的理解有重大意义的,一概都不例外.

(iii) 如果只对于低维情况下给出的证明,但却包含了一般情况下的全部基本概念, 我们就毫不犹豫地采用这个证明. 通过这个证明过程,学生理解的透彻性将会大大提高.

(iv) 有时,我们把特别困难的证明完全略去,代之以一个精心设计的讨论,使学生明白为什么我们所阐述的结论是有道理的.

7. 从几何角度来学习线性代数是容易理解的,其效果比从代数角度学习为好. 我们利用一切机会提醒学生去注意线性代数的几何内容. 所以,在定义平面的线性变换以后,我们立即以一节的内容详细地讨论各种几何实例:伸展、压缩、旋转和反射. 我们准备了 200 多张图,以便在提出每个概念时,用这些图来说明此概念的几何意义. 事实上,光是这些图和详细的图注, 就能使学生对本门学科的内容有一个很深的印象.

8. 既然安排了"应用"这一节,就必须严肃地对待它. 每一章的最后一节都是"应用", 每一章的"应用"都有一定深度. 我们避免牵强地谈论将线性代数应用于天下万物的可能性, 宁可只

采用少量有意义的“应用”，而把其它的应用留给专业教程.

在每一章的结尾都有复习题，以帮助学生加强其薄弱环节.

我们希望通过自己的努力奉献出一本学生们能看得懂的书. 显然，线性代数这门学科，大学一、二年级学生，甚至高中学生都可以学习. 对这些读者来说，在学习过程中勤于提出疑问，无疑是增加了一种合适的学习手段，这正是我们一直在追求的目标.

J. A. 索普

P. G. 孔佩尔

目　录

第一章　线性方程、矩阵和向量

本书专门研究线性代数及其应用．最简单的线性代数问题是求平面上两条直线的交点．毫无疑问，在以前学过的代数课程中，你已经清楚地知道这一问题的解法，这就是要解两个联立的线性方程．在这一章里，将对这个问题及其推广作系统的研究．

§1.1　解线性方程组

我们先阐述解线性方程组的系统步骤．由一个例子开始．

例 1　考虑包含三个方程的三元方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ 2x_1+4x_2+x_3=3 \\ 3x_1+7x_2 \qquad =2 \end{cases}$$

将求出这一方程组的全部解，即求出同时满足三个方程的所有三元有序实数组 (x_1, x_2, x_3)．

解法的第一步是消去除第一个方程外所有方程中的 x_1．为此将第一个方程的 -2 倍加到第二方程并且第一个方程的 -3 倍加到第三个方程．于是这方程组变成

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ \qquad\qquad -x_3=-3 \\ \qquad x_2-3x_3=-7 \end{cases}$$

第二步，消去除第二个方程外所有方程中的 x_2．鉴于第二个方程不包含 x_2，我们首先互换第二个方程和第三个方程的位置得

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ \qquad x_2-3x_3=-7 \\ \qquad\qquad -x_3=-3 \end{cases}$$

现在可将第二个方程的 -2 倍加到第一个方程便可消去除第二个方程外所有方程中的 x_2：

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad +7x_3=17 \\ \qquad x_2 \quad -3x_3=-7 \\ \qquad\qquad\quad -x_3=-3 \end{cases}$$

其次，以 -1 乘第三个方程使得在其中 x_3 的系数是 1：

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + 7x_3 = 17 \\ \qquad x_2 - 3x_3 = -7 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = 3 \end{cases}$$

最后，以第三个方程适当的倍数加到另外两个方程上，以便消去除第三个方程外的所有方程中的 x_3：

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = -4 \\ \qquad x_2 \qquad = 2 \\ \qquad\qquad x_3 = 3 \end{cases}$$

于是，我们求出原方程组的唯一解为

$$(x_1, x_2, x_3) = (-4, 2, 3)$$

解线性方程组的上述作法可用缩写表示法大大简化. 我们可删去未知量、加号和等号，并仍保留方程组的全部基本信息. 剩下的那些数构成一个方形阵列，称为**矩阵**.

在例 1 中方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 7x_2 \qquad = 2 \end{cases}$$

的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

我们注意到，矩阵中的最后一列表示方程组各方程等号右边的常数，其余各列是未知量的系数. 矩阵的行表示方程组的各个方程. 在适当的位置上放回未知量 x_1, x_2, x_3、加号和等式，可以还原各个方程.

我们还进一步看到，在方程组中以一个实数乘某方程，相当于在矩阵中以该实数乘某行. 互换两个方程的位置，相当于在矩阵中互换两行. 将某一方程加到另外的方程上，相当于矩阵中将某一行加到另一行上.

因此，求解线性方程组的运算，相当于矩阵的三种**行变换**：

(i) 以非零实数乘某行；

(ii) 互换两行；

(iii) 某行的若干倍加到另一行.

于是求解例 1 中的线性方程组的运算可用下面的简洁的方法表示：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(iii)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(ii)}}\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&-3&-7\\0&0&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{(iii)}}\begin{pmatrix}1&0&7&17\\0&1&-3&-7\\0&0&-1&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(i)}}\begin{pmatrix}1&0&7&17\\0&1&-3&-7\\0&0&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{(iii)}}\begin{pmatrix}1&0&0&-4\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

这每一箭头上方的标号表明运用行变换的相应步骤. 我们看到，遇到的最后一个矩阵恰好是方程组

$$\begin{cases}x_1 \qquad\qquad = -4\\ \qquad x_2 \qquad = 2\\ \qquad\qquad x_3 = 3\end{cases}$$

的矩阵，显然这就是方程组的解.

再考虑另外一个例子，这里求解过程的每一步，我们不写出方程而用矩阵缩写形式取代. 在研究这个例子时，暂不要求弄清每一步的原理，而顺着这些步骤即可达到解方程组的目的. 至于这样做的原理，将在这个例子之后进行讨论.

例 2　解方程组

$$\begin{cases}\qquad\qquad\qquad x_3+x_4=0\\ -2x_1-4x_2+x_3 \qquad = -3\\ \quad 3x_1+6x_2-x_3+x_4=5\end{cases}$$

对矩阵

$$\begin{pmatrix}0&0&1&1&0\\-2&-4&1&0&-3\\3&6&-1&1&5\end{pmatrix}$$

作一系列行变换.

首先，互换第一行与第三行，使位于第一行、第一列的元素异于零：

$$\xrightarrow{\text{(ii)}}\begin{pmatrix}3&6&-1&1&5\\-2&-4&1&0&-3\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}$$

然后，将第二行加到第一行，使得位于第一行、第一列的元素化为 1：

$$\xrightarrow{\text{(iii)}}\begin{pmatrix}1&2&0&1&2\\-2&-4&1&0&-3\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}$$

其次将第一行的两倍加到第二行上，使得第一列其余的元素值等于零；这是从除第一方程外的所有方程中消去未知量 x_1：

$$\xrightarrow{\text{(iii)}}\begin{pmatrix}1&2&0&1&2\\0&0&1&2&1\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}$$

将第二行的 -1 倍加到第三行上，使得第二行、第三列的元素是 1，而第三列其余的元素全为零；这即是从除第二个方程外的所有方程中消去未知量 x_3:

$$\xrightarrow{\text{(iii)}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

以 -1 乘第三行，将第三行、第四列的元素化为 1：

$$\xrightarrow{\text{(i)}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

最后，将第三行的 -1 倍加到第一行上，第三行的 -2 倍加到第二行上，使得第三行、第四列的元素为 1，而第四列其余的元素全为零：

$$\xrightarrow{\text{(iii)}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

对应最后一个矩阵的方程组是

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = 1 \\ \qquad\quad x_3 & = -1 \\ \qquad\qquad x_4 & = 1 \end{cases}$$

从这些方程中，显然可见

$$x_3 = -1,\ \ x_4 = 1$$

然而第一个方程仍含有未知量 x_1 和 x_2. 不能消去 x_2 这一事实说明，我们可以选择 x_2 为任何值. 如果令 $x_2 = c$，那么 $x_1 = 1 - 2c$，于是方程组的解是

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2c \\ x_2 = c \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

其中 c 是任何实数. 换言之，方程组的解集合是所有四元有序实数组

$$(1-2c, c, -1, 1)$$

的集合. 其中 c 是任意实数.

回顾在前面两例中得到的矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

我们将看出它们有几个共同的特点.

在每个矩阵中可画出“阶梯形”虚线,使得:

(i) 每一个阶梯占一行;

(ii) 每一个阶梯下的元素均为零;

(iii) 每一个阶梯的拐角处元素值均为1;

(iv) 包含拐角元素1的每一列中的其余元素均为零

在其中可画出具有性质(i),(ii),(iii)和(iv)的阶梯形虚线的矩阵称为行阶梯形矩阵简称**阶梯形矩阵**.

现在,我们介绍如何求解线性方程组的一般方法,即所谓的**高斯消元法**(Gaussian elimination).

考虑给m个方程、n个未知量的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (*)$$

式(*)中这种类型的方程称为**线性方程**. 联立的线性方程称为**线性方程组**. 线性方程组(*)的解是一个n元有序实数组

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

它同时满足方程组中的所有方程. **线性方程组**(*)的**矩阵**是矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

求线性方程组所有解的步骤如下:

1. 写出方程组的矩阵;

2. 用行变换将矩阵化为行阶梯形矩阵;(最好依次按列从左至右进行.)

3. 写出阶梯形矩阵相应的方程组,不对应于拐角元素1的未知量,令其等于$c_1, c_2, \cdots$; 然后解出对应于拐角元素1的未知量,最后可写方程组的解.

用行变换化矩阵为阶梯形矩阵这一过程称为**行简化**.

附注 1　在行简化过程中，通常在作下一步行变换时，可用的行变换不只一个．恰当的选择有时会使运算十分简便．例如，在作例 2 的第二步变换中，我们是将第二行加到第一行得到

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(iii)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

换一种变换，我们可以将第一行乘以$\frac{1}{3}$，得到

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(i)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -2 & -4 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

这两种变换都可将第一行、第一列的元素化为 1．但是在这种情况下第一种选择更好些，因为它避免在矩阵中引入分数．在化简过程中的每一步，你最好稍作停顿，以便寻找合适的变换．

附注 2　每一个矩阵都能经过一系列行变换化成阶梯形矩阵．可以证明，最后得到的阶梯形矩阵由原矩阵唯一确定．因此，若以两种不同系列的行变换化所给的矩阵为阶梯形矩阵都将得到同一结果(当然假定计算正确)．

附注 3　高斯消元法的原理在于行变换是可逆的．用一系列相反的行变换，可将阶梯形矩阵化回原矩阵．这说明，不仅原方程组的每一个解是化简方程组的解，而且化简方程组的每一个解也是原方程组的解．换言之，这两个方程组具有同一解集合．

例 3　解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

首先，写出方程组的矩阵．然后，用行变换将矩阵化为阶梯形矩阵．最好是从第一列开始，每次只针对一列，由左到右逐列进行．在本例中，将看到标准的运算步骤：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(iii)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(ii)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(i)}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(iii)}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(iii)}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

现在写出对应于阶梯形矩阵的方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad -\frac{7}{2}x_4+\frac{1}{2}x_5=\frac{3}{2} \\ \quad x_2 \quad -\frac{1}{2}x_4-\frac{1}{2}x_5=-\frac{1}{2} \\ \qquad x_3+3x_4 \qquad\quad =1 \end{cases}$$

未知量 x_4 与 x_5 可以指定为任意实数．因此，令 $x_4=c_1$ 与 $x_5=c_2$．于是

$$\begin{cases} x_1=\frac{3}{2}+\frac{7}{2}c_1-\frac{1}{2}c_2 \\ x_2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{2}c_2 \\ x_3=1-3c_1 \\ x_4=c_1 \\ x_5=c_2 \end{cases}$$

从而所给方程组的解集合是所有形如

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{2}c_1-\frac{1}{2}c_2,\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{2}c_2,1-3c_1,c_1,c_2\right)$$

五元有序实数组的集合．其中 c_1、c_2 是两个任意实数．

我们已经见到有唯一解以及有无穷多个解的线性方程组的例子．自然会想到去找一个无解的线性方程组的例子．

例 4 解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

变换方程组矩阵如下:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 7 \\ -1 & 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(iii)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(iii)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(i)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(iii)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(iii)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

最后的矩阵相应的方程组是

$$\begin{cases} x_1 \quad + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$