

函数逼近:理论与数值方法

[德] G. Meinardus 著

赵根榕 译
赵 冰

高等教育出版社

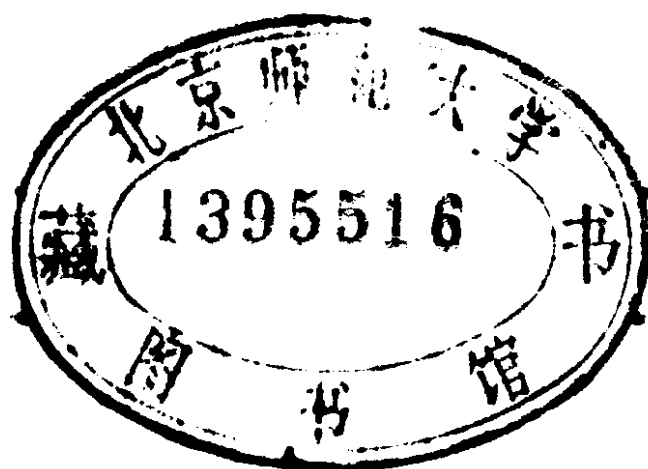
函数逼近：理论与数值方法

[德] G. Meinardus 著

赵根榕 译
赵 冰

7月109/12

教员阅览室(二)



高等教育出版社

内 容 提 要

本书分为两篇。第一篇讲线性逼近,包括一般线性逼近问题、线性 Чебышев 逼近、数值方法及多项式与有关函数的逼近;第二篇讲非线性逼近,包括非线性 Чебышев 逼近、分段逼近等。本书收集了逼近论最本质的结果,并且书中全部定理都有证明,对学习逼近论与数值方法的有关人员是一本较好的参考书。

函数逼近: 理论与数值方法

[德] G. Meinardus 著

赵根榕 译
赵 冰

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 7.875 字数 184,000

1986 年 7 月第 1 版 1986 年 7 月第 1 次印刷

印数 00,001—4,650

书号 13010·01115 定价 1.80 元

德文第一版序

逼近论有些部分能应用于数值问题，这些部分的迅猛发展只不过是最近几年的事。由于电子计算机的应用，求函数(在某种意义之下)的最佳逼近的思想受到相当大的重视，然而，实用问题所必要的一些理论基础仅散见于为数不多的几本书中。绝大部分理论与实用的研究只能在原始论文中获取。这规定了本书的目的：收集逼近论的最本质的结果，一方面使得有可能很快地介绍这一领域的现代发展；另一方面给 Чебышев 逼近问题的领域提供一定的完备性——但这绝不是说要搞成一个文献综述。材料的取舍根据其对应用来说是否重要这一主观的看法而定。这也适用于，例如，§3 的渐近研究，因为我认为：即使就数值逼近来说，至少也应当考虑能够预期达到怎样的渐近精度。本书几乎只限于一致逼近理论，因为它在实用上最为重要。

第一篇论述线性逼近。第三章包含目前必然会被认为是通向线性理论的捷径。多项式逼近的古典情形的细节 (§6) 知道的并不多，而且结果的处理也常常是麻烦的，所以我决定给以全面的解说。专设一章 (§7) 讲述线性逼近的数值方法，而在个别节次中，还包括非线性逼近的构造方法与理论。第二篇大部分跟我与 D. Schwedt 所进行的较新研究有关。在此，我们发展了能应用于各种数值问题的非线性逼近的理论。

除去少数例外，用正常字排印的定理都有证明，并且有一部分证明是新的。进一步研究的参考资料用小字排印。

遗憾的是，由于篇幅所限，未能完全考虑到逼近论的各个方面，其中包括，例如，所谓 L_p 逼近，Бернштейн 逼近问题(在实直

线上用某些整函数的逼近)与 J. L. Walsh 关于在复平面上逼近
的富有情趣的研究.

(致谢的话译略).

Günter Meinardus

1964 月 3 月于汉堡

英 文 版 序

这一英文版是 Larry Schumaker 博士按德文版的增订版翻译的. 除去许多小的补充、更正和少数新证明(例如, Jackson 定理的新证明)之外, 与第一版的详细区别是加进了在所谓正则 Haar 组的情形中的比较定理 (§ 6) 与分段逼近 (§ 11) 的新工作的讨论. (以下感谢的话略).

Günter Meinardus

1967 年 5 月

于 Glausthal-Zellerfeld

目 录

第一篇 线性逼近	1
§ 1 一般线性逼近问题	1
1.1 问题的提法, 存在定理	1
1.2 严格凸空间, Hilbert 空间	2
1.3 极大线性泛函	4
§ 2 稠密组	6
2.1 Banach 一般准则	6
2.2 Weierstrass 与 Müntz 逼近定理	7
2.3 复平面内的逼近定理	11
§ 3 线性 Чебышев 逼近通论	15
3.1 基础, Колмогоров 定理	15
3.2 Haar 唯一性定理, 线性泛函与交错组	18
3.3 进一步的唯一性结果	28
3.4 不变式	30
3.5 向量值函数	32
§ 4 特殊 Чебышев 逼近	33
4.1 Чебышев 组	33
4.2 Чебышев 多项式	36
4.3 函数 $(x-a)^{-1}$	38
4.4 Бернштейн 与 Ахизер 问题	41
4.5 Золотарев 问题	48
§ 5 估计三角逼近与多项式逼近中误差的大小	53
5.1 射影算子, 线性多项式算子	53
5.2 三角逼近与多项式逼近之间的关系	54
5.3 Fejér 算子	55

5.4	Корвин 算子	59
5.5	D. Jackson 定理	62
5.6	Бернштейн 定理与 Zygmund 定理	68
5.7	补充	76
§ 6	用多项式与有关函数的逼近	85
6.1	基础	85
6.2	$E_n(f)$ 的上界	91
6.3	$E_n(f)$ 的下界	98
6.4	逼近依赖于区间	102
6.5	正则 Haar 组	105
6.6	渐近结果	108
6.7	关于交错组的结果	121
§ 7	线性 Чебышев 逼近的数值方法	126
7.1	Remez 迭代法	126
7.2	初次逼近	140
7.3	直接法	146
7.4	离散化, 其他方法	149
第二篇	非线性逼近	156
§ 8	非线性 Чебышев 逼近通论	156
8.1	问题概要, Колмогоров 定理的推广	156
8.2	Haar 唯一性定理, 交错组	168
8.3	Rice 的研究	176
8.4	牛顿迭代法	178
8.5	H 集	182
§ 9	有理逼近	183
9.1	存在性, 不变式, Walsh 定理	183
9.2	交错组定理, 反常情形, 连续性, 例	190
9.3	渐近结果, 小区间	199
9.4	数值方法	202
§ 10	指数逼近	210
10.1	Rice 的结果	210

10.2 一个反常定理. 构造方法·····	213
§ 11 分段逼近·····	218
11.1 问题的陈述. 假设·····	218
11.2 Lawson 原则·····	219
11.3 等次多项式逼近·····	223
参考文献·····	224
索引·····	241
人名俄、英文拼写对照·····	244

第一篇 线性逼近

§1 一般线性逼近问题

1.1 问题的提法. 存在定理. 设 R 是元素 $f, g, \dots$ 的实数或复数域上的线性赋范空间, 而且 f 的范数用记号 $\|f\|$ 表示. 进而, 设 V 为 R 的有限维线性子空间. 一般线性逼近问题如下所述:

对于事先给定的 $f \in R$, 试求元素 $g \in V$, 使对于所有的 $h \in V$ 有

$$\|g - f\| \leq \|h - f\| \quad (1.1)$$

定理 1 对于任何已知的 $f \in R$, 恒存在一个 $g \in V$, 有性质 (1.1).

证明 (R. C. Buck[1]; H. H. Ahneger[1]第 18 页) 命

$$\rho_V(f) = \inf_{h \in V} \|h - f\|$$

则对所有满足 $\|h\| > 2\|f\|$ 的 h , 不等式

$$\|h - f\| > \|f\| \geq \rho_V(f)$$

成立. 因此只须考虑满足 $\|h\| \leq 2\|f\|$ 的所有 $h \in V$ 的集上的连续函数 $\|h - f\|$ 即可. 因为这个集是有限维空间 V 的闭有界子集, 故它是紧致的, 因此 $\|h - f\|$ 取得它的极小.

满足

$$\|g - f\| = \rho_V(f)$$

的元素 $g \in V$ 叫 f 关于 V 的**最佳逼近**. 显然, 最佳逼近的集是凸的. 上述存在定理已在更一般的假设之下, 由 G. Köthe[1, 第 347 页]所证明.

泛函 $\rho_V(f)$ 是半范数, 而且因为

$$|\rho_V(f_1) - \rho_V(f_2)| \leq \rho_V(f_1 - f_2) \leq \|f_1 - f_2\|$$

故它也是 f 的连续函数.

1.2 严格凸空间. Hilbert 空间. 依照 М. Крейн[1], 如果

$$\|f+g\| < 2, \text{ 当 } \|f\| = \|g\| = 1 \text{ 且 } f \neq g \text{ 时} \quad (1.2)$$

成立, 则空间 R 叫**严格凸的**(或**严格赋范的**). 这时下述唯一性定理成立:

定理 2 若 R 是严格凸的, 则对于每个 $f \in R$ 与每个有限维子空间 $V \subset R$ 恰有 f 关于 V 的一个最佳逼近.

请参阅 R. C. Buck[1]: Н. И. Ахиезер[1] 第 20 页; G. Köthe[1] 第 347 页.

证明 若 g_1 与 g_2 都是最佳逼近, $g_1 \neq g_2$, 则由 (1.2) 推得

$$\left\| \frac{1}{2}(g_1 + g_2) - f \right\| = \frac{1}{2} \|(g_1 - f) + (g_2 - f)\| < \rho_V(f)$$

与 $\rho_V(f)$ 的定义矛盾.

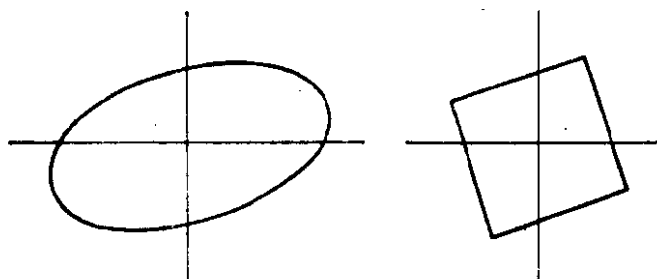


图 1 对应于二维严格凸与非严格凸范数的单位球体

定理 2 的逆定理也成立: 若 R 不是严格凸的, 则有某一个 $V \subset R$ 与 $f \in R$, 使得 f 关于 V 有多个最佳逼近. 关于这个结果的推广请参阅 G. Köthe[1].

Hilbert 空间与当 $1 < p < \infty$ 时的空间 L_p 及 l_p 为严格凸空间的例子见 G. Köthe[1]. 在其它空间, 例如在范数为

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx \quad (1.3)$$

的, 在区间 $[a, b]$ 上可积函数 $f(x)$ 的空间 $L_1[a, b]$ 中, 或在范数为

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad (1.4)$$

的, 在区间 $[a, b]$ 上连续函数 $f(x)$ 的空间 $C[a, b]$ 中存在定理与所论的特殊子空间 V (见 §3.2), 甚至常常与函数 f 本身的特殊性质有关 (见 §3.3).

若引进子空间 V 的基 $h_1, h_2, \dots, h_n$ 则可见

$$\|h-f\| = \left\| \sum_{v=1}^n \alpha_v h_v - f \right\| = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

是 (实或复) 数 α_v 的实值函数. 这个函数关于 α_v 为连续的. 但一般并不是处处可微的.

在内积为 (f, h) 的 Hilbert 空间中, 由平行四边形定律

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$$

可以直接推出严格凸性. 于是 f 关于 V 的最佳逼近 g 是 f 在 V 上的正投影, 即对于所有 $h \in V$

$$(g-f, h) = 0$$

这可以证明如下: 若存在一个 $h_0 \in V$, 使

$$(g-f, h_0) = \beta \neq 0$$

则显然

$$\tilde{g}_1 = g - \frac{\beta}{(h_0, h_0)} \cdot h_0$$

在 V 中, 而且

$$\|\tilde{g}_1 - f\|^2 = \|g - f\|^2 - \frac{|\beta|^2}{(h_0, h_0)} < \|g - f\|^2$$

但这与 g 是最佳逼近这一事实矛盾.

最佳逼近能由这种投影性质直接得到. 事实上, 若元素 $h_1, h_2, \dots, h_n$ 为 V 的正交基, 则

$$g = \sum_{v=1}^n (f, h_v) h_v$$

进而

$$\|f-g\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{v=1}^n |(f, h_v)|^2$$

若元素 $g_1, g_2, \dots, g_n$ 为 V 的一个不必是正交的基, 则

$$g = \sum_{v=1}^n \lambda_v g_v$$

其中 λ_v 可由线性方程组

$$\sum_{v=1}^n \lambda_v (g_v, g_\mu) = (f, g_\mu), \mu = 1, 2, \dots, n$$

确定. 于是

$$\|f-g\|^2 = (f, f) - (g, f) = (f, f) - \sum_{v=1}^n \lambda_v (g_v, f)$$

而且由这个关系连同上面 λ_v 的线性方程组推得

$$\|f-g\|^2 = \frac{D_{n+1}(f, g_1, g_2, \dots, g_n)}{D_n(g_1, g_2, \dots, g_n)} \quad (1.5)$$

其中 $D_m(z_1, z_2, \dots, z_m) = \det((z_\nu, z_\mu)); \nu, \mu = 1, 2, \dots, m$, 是元素组 $z_1, z_2, \dots, z_m$ 的 Gram 行列式.

1.3 极大线性泛函. 保证线性泛函可以延拓的 Hahn-Banach 定理(Л. А. Люстерник 与 В. И. Соболев [1] 第 173 页)在逼近论中也是非常重要的. 当研究 R 上满足

$$\left. \begin{array}{l} 1. L(h) = 0, \text{ 对于所有的 } h \in V, \\ 2. \|L\| = \sup_{\substack{h \in R \\ \|h\|=1}} |L(h)| \leq 1 \end{array} \right\} \quad (1.6)$$

的线性泛函 L 时得到量 $\rho_V(f)$ 的下界:

$$|L(f)| \leq \rho_V(f) \quad (1.7)$$

现在借助于 Hahn-Banach 定理便得到(见 R. C. Buck[1])

定理 3 命 R 为线性赋范空间, V 为 R 的线性子空间. 并且

命

$$\rho_V(f) = \inf_{h \in V} \|h - f\|$$

则对于每个 $f \in R$, 在 R 上存在具有性质(1.6)的线性泛函 L , 使

$$\rho_V(f) = L(f) \quad (1.8)$$

证明 可以假设

$$\rho_V(f) > 0$$

考察由 f 与 V 所张成的线性空间 V^* . 每个 $h \in V^*$ 有唯一的表示

$$h = \beta f + g$$

其中 $g \in V$. 现在

$$L_1(h) = \beta \rho_V(f)$$

是 V^* 上的线性泛函, 而且有性质

$$L_1(g) = 0 \text{ 对于 } g \in V \text{ 和 } L_1(f) = \rho_V(f)$$

进而, L_1 关于 V^* 的范数 $\|L_1\|$ 有值 1, 因为对于 $\beta \neq 0$, 关系

$$\|\beta f + g\| = |\beta| \cdot \|f + g/\beta\| \geq |\beta| \cdot \rho_V(f) = |L_1(\beta f + g)|$$

成立按 Hahn-Banach 定理, 在 R 上存在线性泛函 L 使

$$L(h) = L_1(h) \quad \text{对于所有的 } h \in V^*$$

且

$$\|L\| = \|L_1\|$$

证毕.

值得注意的是: 在定理 3 中, V 的维数并不要求是有限的.

当 $|L(f)| = \rho_V(f)$ 时, R 上具有性质(1.6)的线性泛函 L , 叫关于 f 的**极大泛函**. 逼近问题常常可用构造极大泛函的方法加以处理(对偶问题). 常常可以只就具有性质(1.6)的泛函类 $\mathcal{L}$ 的一个特殊子集来求极大泛函. 在 Hilbert 空间中, 除去绝对值为 1 的常因子外, 对于每个元素 f , 恰存在一极大泛函, 即

$$L_f(h) = L(h) \equiv \begin{cases} 0 & \text{对于 } f \in V \\ \frac{1}{\|g-f\|} (f-g, h) & \text{对于 } f \in V \end{cases}$$

其中 g 为 f 关于 V 的最佳逼近. 但一般由逼近问题的唯一解能给出多个本质上不同的极大泛函.

§ 2 稠 密 组

2.1 Banach 一般准则. 设 $V_n \subset R, n=1, 2, \dots$ 是 R 的线性子空间, 其中下标 n 表示 V_n 的维数, 并且对于所有的 n , 设 $V_n \subset V_{n+1}$. 设 M 为所有 V_n 的并, 置

$$\rho_n(f) = \rho_{V_n}(f)$$

若对于每个 $f \in R$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(f) = 0 \quad (2.1)$$

则称组 M 在 R 中是稠密的.

定理 4 (S. Banach [1]) 当且仅当 R 上每个在 M 为零的连续线性泛函恒等于零时, 组 M 在 R 中才是稠密的.

证明 (见 Н. И. Ахиезер [1] 第 60 页) 设 M 在 R 是稠密的, 且 L 为 R 上的一个连续线性泛函, 对于所有的 $h \in M$, 满足

$$L(h) = 0$$

那么对于每个给定的 $\varepsilon > 0$ 与 $f \in R$, 存在 $h \in M$, 使得

$$\|f - h\| < \varepsilon$$

于是

$$|L(f)| = |L(f - h)| \leq \|L\| \cdot \|f - h\| < \|L\| \varepsilon$$

所以 $L(f) = 0$.

逆定理可以由定理 3 直接推出. 事实上, 若 f 为 R 的元素, 且

$$\rho_M(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(f) = \beta > 0$$

则依定理 3, 存在连续线性泛函, 它在 M 上等于零, 且满足

$$L(f) = \beta$$

有许多关于特殊空间中特殊稠密组的定理. 其大部分证明需

要复杂的分析方法. 我们在此主要谈论的是一致逼近, 但大部分结果在别的空间也成立.

2.2 Weierstrass 与 Müntz 逼近定理. 我们需要 Коровкин 关于定义于实空间 $C[a, b]$, 而值域包含于空间 $C[a', b']$ 中的连续线性算子的一个引理. 这样的算子 $H(f, x) = H(f(t), x)$, 如果只要 f 与 g 属于 $C[a, b]$, 就由 $f(t) \geq g(t)$ 推出关系

$$H(f, x) \geq H(g, x), \text{ 对于 } x \in [a, b]$$

则叫做单调的.

定理 5 (П. П. Коровкин [1]) 命 $H_n(f, x)$, $n = 1, 2, \dots$ 是线性单调算子序列, 它们把实空间 $C[a, b]$ 映射到自身. 若对于 $\nu = 0, 1, 2$, 关系

$$\|H_n(t^\nu, x) - x^\nu\| = o(1), \quad \text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}$$

成立, 则对于每个函数 $f(t) \in C[a, b]$, 关系

$$\|H_n(f, x) - f(x)\| = o(1), \quad \text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}$$

成立.

证明 对于任何预先给定的 $\varepsilon > 0$, 和 t 与 x 在区间 $[a, b]$ 的任意值, 存在一个 $\delta > 0$, 使下列不等式成立:

$$-\frac{\varepsilon}{2} - \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 < f(t) - f(x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2$$

此处

$$M = \|f\|$$

于是由算子的单调性推得

$$|H_n(f, x) - f(x)H_n(1, x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}H_n(1, x) + \frac{2M}{\delta^2}H_n((t-x)^2, x)$$

因而

$$\|H_n(f, x) - f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left[\|f\| + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2}\|x\|^2 \right] \|H_n(1, x) - 1\|$$

$$+\frac{4M}{\delta^2}\|x\|\cdot\|H_n(t,x)-x\|+\frac{2M}{\delta^2}\|H_n(t^2,x)-x^2\|$$

$$<\varepsilon \quad \text{对于 } n>n_0(\varepsilon)$$

我们现在研究区间 $[0,1]$ 上的特别算子

$$B_n(f, x) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} f\left(\frac{\nu}{n}\right) x^\nu (1-x)^{n-\nu}, \quad n \geq 1 \quad (2.2)$$

(С. Н. Бернштейн[1])关系

$$B_n(1, x) = 1$$

$$B_n(t, x) = x$$

和

$$B_n(t^2, x) = x^2 + \frac{x-x^2}{n}$$

容易证明,此外,算子是单调的,因而依定理5,对任何 $f \in C[0,1]$, 推出

$$\|B_n(f, x) - f(x)\| = o(1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

因为算子 $B_n(f, x)$ 是次数最高为 n 的多项式,故(经过简短的变换,将区间 $[0,1]$ 变为任意的有限区间 $[a,b]$ 后)我们有

定理 6(K. Weierstrass[1]) 所有多项式的集在 $C[a, b]$ 中为稠密的.

在定理6中,显然能把 $C[a, b]$ 理解为实区间 $[a, b]$ 上的所有连续复值(不仅实值)函数的空间. Weierstrass 逼近定理有许多别证. 例如见 E. Borel[1]; D. Jackson[1], [2]; В. Л. Гончаров [1]; E. Landau[1]; H. Lebesgue[1]; O. Lerch[1]; A. Marchaud [1]; P. Montel[1]; J. L. Walsh[2]. 下面的定理叫 Weierstrass 第二定理:

定理 7 (K. Weierstrass[1]) 三角和的组

$$a_0 + \sum_{\nu=1}^n (a_\nu \cos \nu \varphi + b_\nu \sin \nu \varphi)$$