

HANSHU

BIJINFANGFA

赵元民 著

函数逼近方法

黑龙江科学技术出版社

函数逼近方法

赵元民 著

黑龙江科学技术出版社

一九八一年·哈尔滨

函数逼近方法

赵元民 著

黑龙江科学技术出版社出版

(哈尔滨市南岗区分部街28号)

黑龙江省教育厅印刷厂印刷 黑龙江省新华书店发行

开本 787×1092 毫米 1/32 · 印张 6 8/16 · 字数 120,000

1981年11月第1版 1981年11月第1次印刷

印数 1—5,100

书号: 13217·016

定价: 0.70元

出版说明

本书是为了推广科研成果而出版的一本应用数学专著。著者依据自己的研究成果，并借鉴前人有关函数逼近的理论和方法，系统地阐述了未知表达式的 N 元函数、导函数、积分、偏微分的数值解法。应用这一方法，一维问题只需要依据三至五个已知点即可给出任意幂次的函数、导数与积分的逼近式，把一个未知的过程变为已知的过程；多维问题只需依据不少于 3^N 个已知点便可给出实验区域内函数与微分的逼近式；对已知趋向的 N 元函数还可做到较长区间的外推。

本书通过许多实例，介绍了逼近公式的应用方法和步骤，系统地阐明了公式的推导过程与理论根据。对于解决工业、农业、医药卫生、工程设计、天文、气象、国防、科研等部门的某些数学问题有一定作用。

本书可作为科研、工程设计人员的参考书，亦可供高等院校师生、中学教师、数学爱好者阅读。

目 录

前 言.....	1
第一章 函数逼近方法的建立.....	3
§ 1.1 概念和意义.....	3
§ 1.2 逼近函数的使命.....	5
§ 1.3 插值公式的局限性.....	6
§ 1.4 一元函数逼近公式的推导.....	10
§ 1.5 误差分析和证明.....	16
§ 1.6 数值微分公式.....	32
§ 1.7 数值积分公式.....	37
§ 1.8 可分离变量的多元函数逼近公式.....	42
§ 1.9 一般 N 元函数的逼近公式.....	48
§ 1.10 一维和多维在逼近方面的关联.....	54
第二章 一元公式的用法.....	55
§ 2.1 一维问题中的函数逼近方法.....	55
§ 2.2 一维问题中的导数逼近方法.....	93
§ 2.3 数值积分方法.....	112
第三章 多元公式的用法.....	125
§ 3.1 二维问题中函数与偏微分逼近方法.....	125
§ 3.2 多维问题中函数与偏微分逼近方法.....	135
第四章 外推方法.....	159
§ 4.1 一元函数的外推.....	159

§ 4.2 多元函数的外推.....	171
§ 4.3 表函数的外推.....	185
§ 4.4 数理统计与函数逼近的联系.....	189

附 录:

本书所用符号一览.....	194
本书重要等式与公式一览.....	195
参考书目.....	199

前 言

此书写成之前，笔者曾去中国科学院应用数学研究所、复旦大学、黑龙江大学、哈尔滨工业大学、哈尔滨师范大学等单位讨论初稿，并在哈尔滨市数学学会组织的学术讨论会上多次讨论，得到了各位专家的指正。蒋尔雄教授、林坚冰教授、吴从炘教授及李之杰、裴定一老同志从理论方面给予许多指导，在此表示感谢。

本书主要提出了 N 元函数数值分布的定理和函数、导函数、偏导数、数值积分等方面的逼近公式。它们组成了一套 N 元函数逼近方法，可以对任意一个连续的过程给出近似的数学表达式，把未知规律的过程变成已知过程。以前的方法，只能根据较多的已知点，在较短的区间或区域内插值，这样的“插值”对于高次的一元函数及变元较多的多元函数收效不大。因此，这里所说的“逼近”和一般所谓的“插值”有所不同。

关于高次的一元函数，当已知点少时，用本书的公式可收到高精度的效果的道理是较明显的。因为本书的方法把函数 $f(x)$ 加上了 $(\frac{x}{x_0})$ 这一项，使得指数函数 $a(x)$ 较 $f(x)$ 的幂次大大降低，因而易于用低阶差商作逼近式的系数，以取得好效果。这样虽然增大了一点工作量，但并不影响它的优越性。

另外，公式中加进了 $(\frac{x}{x_0})$ 项之后，导出了权函数 $\alpha(x)$ ，这与前人单纯从 $f(x)$ 的角度变换坐标的方法并不相同。因为单纯地变换坐标无法解决上述问题。

本书提出的三个“ N 元函数数值分布性质”，能够如实地描述一元及多元函数数值分布之规律，并可依此得到有效的表达式，解出符合实际的数值。

因笔者水平有限，本书在论证上难免有不妥之处，望读者批评指正。

在推广和应用本书的逼近方法过程中，黑龙江省科协和哈尔滨市数学学会，以及高衍伟、苏风琴等同志曾给予很大帮助，在此表示感谢！

作 者

第一章 函数逼近方法的建立

§ 1.1. 概念和意义

函数逼近方法，就一元而言，就是如何依据由实验测得的函数 $f(x)$ 的若干已知数值，来建立近似函数 $F(x)$ ；就多元而言，就是如何依据函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 的若干已知数值来建立近似函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_N)$ ，并尽可能使近似函数有较高的精度。

这里把 $f(x)$ 和 $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 称为原函数，把 $F(x)$ 和 $F(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 称为逼近函数或逼近公式。在一般情况下，原函数是未知的，它或以列表函数表出，或以若干数值显示的图象表出。有时由于原函数的形式过于复杂，而用逼近函数代替它，但在逼近过程中也把它看做未知的，只把实验数值当作已知的，因实验数值本身存在着测试误差，给出的逼近函数存在着截断误差，在计算中还会产生舍入误差，所以逼近过程总是近似的。其近似程度叫做精度，表现在误差的界限上。如果是由理论导出的公式，而不是经验公式的话，那么逼近函数的误差界限应当能够预先估计出来。

广义地说，插值法(包括样条插值)、逼近法、曲线拟合法、回归方法、有限元法等都属于函数逼近之范畴；狭义地说，函数逼近只包括插值法与逼近法，以别于数理统计方法。狭义的函数逼近，要求已知数值精确，在逼近过程中不

考虑数值本身的测试误差，只考虑逼近函数在给出过程中的截断误差，对于可能产生的舍入误差也暂不计较。这是它与数理统计方法的主要区别。本书所提出的方法是狭义的函数逼近，它与插值法有着密切的联系。

只求解实验区内某些未知点的数值称插值；求解实验区内原函数的逼近函数，以解出任意点上的数值称函数逼近。二者解决的是同一性质的问题，其不同处只是程度和范围的差异。

对于未知表达式的 N 元函数或 N 个因素的物理、化学过程，因科研上或设计上的需要，常常依据实验数值给出经验方程。但这种经验方程由于没有充分的理论根据有时不可信。于是人们就以列表函数代替原方程或原过程，然后应用插值法求出所需要的点。当函数的性质或已知条件不适应插值法的效能时，就只能加密试验而别无它法。因此有必要导出新的公式解决这类问题。函数逼近公式是依据数学理论推导出来的，它不考虑被逼近过程的物理性质或化学性质，只依据物质普遍具有的量变规律给出近似公式，因而是有理论根据的公式，不是经验公式。这是人们认识和掌握物质运动的重要方法之一。

物质变化是无穷尽的，人所能彻底掌握的规律到任何时候也只能是一部分。但人们可能对它进行观测与实验，得出某范围内某条件下的结果。科学家准确地探索到一个过程的规律，往往要花费十几年或几十年的时光。我们不能等待到经过长期研究得出明确的结论之后再把这些过程应用于生产实践中去，于是摆在我们面前的任务是如何对未知的过程依

据为数不多的实验数值,用少量的近似方程给出近似表达式,以代替尚未寻出的规律,解决生产和科研中的数学问题。

§ 1.2. 逼近函数的使命

对于未知表达式的 N 元函数 $y=f(x_1, x_2, \dots, x_N)$, 当 $N=1$ 或把 $N-1$ 个自变量固定时,便是一元函数 $y=f(x)$ 。因一元函数逼近公式对多元函数的逼近起主要作用,同时在实际问题中常常用到它,所以如何提高一元逼近公式的精度是非常重要的,也是函数逼近方面的主要课题。

设 $y=f(x)$ 是区间 $[x_0, x_n]$ 内的连续函数; 由实验得出区间内 $n+1$ 个已知点 (x_0, y_0) 、 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 $\dots$ 、 (x_n, y_n) ; $F(x)$ 通过所有已知点, 满足 $F(x_i)=f(x_i)$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$)。

在未知点上虽然 $F(x)$ 近似 $f(x)$, 但存在误差 R , 把误差写出一个方程的形式便是 $R=R(x)$ 。

我们把 $[x_0, x_n]$ 称为逼近区间; $x_n - x_{n-1} = h$, 称为步长; $R(x)$ 称为误差公式或误差表达式。

误差公式表示用 $F(x)$ 逼近 $f(x)$ 时, 由理论证明了的截断误差情况。截断误差有两种表示方式

$$R(x) = f(x) - F(x);$$

$$R^*(x) = \frac{f(x) - F(x)}{f(x)}.$$

前者叫做绝对误差, 后者叫做相对误差。

如果逼近函数只能给出绝对误差表达式而不能给出相对误差表达式, 在理论上是不完善的。其次, 一个逼近函数的

精度，如果用它的误差公式来估算截断误差，只能证明在很短的区间内或只能当步长很小时才能够有效地逼近原函数，那么这个逼近函数也是不完善的。因为它不能完成如下使命：

- 1) 控制相对误差界限，以保证精度；
- 2) 以少量的已知点来逼近原函数；
- 3) 以少量的逼近式近似代替原函数；
- 4) 对于任意幂次的 $f(x)$ 都能有效地逼近，做到理论与实践的统一。

已有的插值法虽然多种多样，但都没有摆脱一个藩篱——用步长及其乘方次数 h^{n+m} 、 h^{k^*} 做估计绝对误差的主要依据，误差的数量级当然以 $O(h^{n+m})$ 、 $O(h^{k^*})$ 为标准，并依此来衡量逼近式的精度。这就要求步长 h 越小越好，或把 $[x_0, x_n]$ 分成很多子区间，而且无法控制相对误差。因而他们未能完成上述使命。新的样条插值也不例外，虽然它的精度较其它插值法高，但须已知样点上的导数或样点上的导数高度精确这一条件。当子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 两端点的导数未知或用一般数值微分公式求出的导数不精确时，同样不能对任意幂次的 $f(x)$ 高精度逼近，这里并不否定在准确的边界条件下样条方法的优越性。

§ 1.3. 插值公式的局限性

在未导出新的逼近公式之前，自然要沿用前人的插值公式，如均差插值公式、牛顿前插公式、牛顿后插公式、拉格朗日插值公式、贝塞尔插值公式等等。而这些公式尽管形式不

同，大体上误差项都离不开 h^{n+1} 与 $f^{[n+1]}(\xi)$ 。即它们的基本理论大体一致。因此分析它们的误差情况时，找出一种有代表性的公式——均差插值多项式来分析就可以了。

设 $f(x)$ 有 $n+2$ 个点上数值已知，而且 $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1}$ ，它们的步长相等不等都可。其公式形式为

$$f(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x-x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + f(x_0, x_1, \cdots, x_n)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) + R_n(x). \quad (1.3.1)$$

$$\text{其中 } R_n(x) = \frac{f^{[n+1]}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n). \quad (1.3.2)$$

上式之 ξ 在 x_0, x_n, x 中最小值与最大值之间，它随 x 而变化。把 $R_n(x)$ 去掉即为逼近式 $P_n(x)$ 。即

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad P_n(x) \doteq f(x).$$

(1.3.2) 中 $(x-x_i) (i=0, 1, \cdots, n)$ 相当于 h ，因此 $R_n(x)$ 的数量级相当于 $O(h^{n+1})$ 。

应用洛尔定理可以证出

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \frac{f^{[n]}(\xi)}{n!},$$

以及

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) = \frac{f^{[n+1]}(\xi)}{(n+1)!}.$$

当把未知点 x 考虑进去时，就有

$$f(x, x_0, x_1, \cdots, x_n) \doteq \frac{f^{[n+1]}(\xi)}{(n+1)!}.$$

于是 $f^{[n+1]}(\xi) = f(x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1})(n+1)!$

$$= f(x, x_0, x_1, \dots, x_n)(n+1)! \quad (1.3.3)$$

由此可知对未知的 $f(x)$ 进行逼近时，要大体估出 $P_n(x)$ 的误差，须计算 $n+1$ 阶差商才可。当步长相等时则须计算 $n+1$ 阶差分。差分与差商的关系，换算如下：

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)! h^{n+1}},$$

$$f^{[n+1]}(\xi) = \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)! h^{n+1}} (n+1)! = \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}} \quad (1.3.4)$$

由上面结果并据差分、差商的性质，可得结论：

1) $f_1(x)$ 为线性函数，有 $f_1(x_0, x_1, x_2) = 0$, $\Delta^2 y_0 = 0$ 。
由 (1.3.3) 与 (1.3.4) 可知 $f_1^{[2]}(\xi) = 0$ 。代入 (1.3.2) 得 $R_1(x) = 0$ 。因此 $P_1(x) = f_1(x)$ ，可以做到高精度逼近。

2) $f_2(x)$ 为 2 次函数，有 $f_2(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$, $\Delta^3 y_0 = 0$ ，由 (1.3.3) 与 (1.3.4) 得 $f_2^{[3]}(\xi) = 0$ 。代入 (1.3.2) 得 $R_2(x) = 0$ 。因此 $P_2(x) = f_2(x)$ ，可以做到高精度逼近。

3) $f_n(x)$ 为 n 次函数时，有 $f_n(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = 0$, $\Delta^{n+1} y_0 = 0$ ，由 (1.3.3) 与 (1.3.4) 得 $f^{[n+1]}(\xi) = 0$ 。代入 (1.3.2) 得 $R_n(x) = 0$ 。因此 $P_n(x) = f_n(x)$ ，可以做到高精度逼近。即 $f_n(x)$ ($n \geq 10$) 或类似这样的函数 $f(x)$ ，至少须有 $n+1$ 个已知点方能做到高精度逼近。

据此结论，可推知：若 $f_n(x)$ 没有 $n+1$ 个已知点 (n 是自变量的最高次数)，就不可能高精度逼近；当 $f_n(x)$ ($n =$

1000, 是自变量的最高次数) 是极高幂次的函数或类似这样的函数 $f(x)$, 理论上是须组织 1001 个点的近似函数方可对它逼近。然而 $P_{1000}(x)$ 是无法写出的, 即使写出也不符合实际, 不可能逼近 $f_{1000}(x)$ 。因此前人的插值法有严重的弊病, 不仅不能逼近高幂次、已知点少的 $f(x)$, 而且虽然已知点充分多也无法逼近极高幂次的函数。其理论与实际有矛盾。

其次, 从误差公式 (1.3.2) 中可明显看出:

1) 要使 $R_n(x)$ 最小, 必须使

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_n} |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \text{ 最小, 才可以保}$$

证 $O(h^{n+1})$ 量级有实际意义。当 $x_n - x_{n-1} = h < 1$, $O(h^{n+1})$ 有意义; 当 $x_n - x_{n-1} = h > 1$, 则 $O(h^{n+1})$ 无意义。因有很多函数 $f^{[n+1]}(x)$ 或 $f^{[n+1]}(\xi)$ 的值较大。故步长较大时, $P_n(x)$ 失效。

2) 只能控制绝对误差, 不能保证逼近函数 $P_n(x)$ 精度的可靠性。当 $1 \leq f_n(x) \leq 10$, $R_n(x) \leq 0.1$; $0 \leq f_n(x) \leq 1$, $R_n(x) \leq 0.1$; $0 \leq f_n(x) \leq 0.1$, $R_n(x) \leq 0.1$, $f_n(x)$ 未知的情况下就很难相信逼近函数的精度。如能控制相对误差就不会有此毛病。

综上所述, 前人公式的局限性有五:

- ① 已知点少不能逼近非线性函数;
- ② 步长大不能逼近非线性函数;
- ③ 即使已知点多也不能逼近极高幂次的函数;
- ④ 不能控制相对误差;
- ⑤ 由逼近函数给出的数值导数不精确。

但也有它的两个优点：

①当已知点够用时可以逼近线性函数与低幂次的非线性函数；

②计算时较简便。

为了使函数逼近方法臻于完善，有必要导出新的公式与其它公式配合使用。

§ 1.4. 一元函数逼近公式的推导

推导前的一个思路是：设想 $f(x)$ 幂次很高，当然并不一定是幂函数或降幂的多项式，它可能很复杂，但在逼近区间陡度很大而且已知点较少；为了集中力量做到高精度逼近，把逼近区间的 $f(x)$ 看成是第 I 象限的。这并不影响公式的推导，因为许多实际问题是 I 象限的函数，同时通过坐标轴的平移任何象限的曲线都可转到 I 象限内或同一象限内。

另一个思路是：把高幂次的 $f(x)$ 化为低幂次的函数才能做到用少量的已知点来高精度地逼近它。但模仿前人变换坐标的方法并不能适合于任意的函数，更不能控制相对误差。首先从简单的高幂次函数来寻找这一途径——

1) 设 $f(x) = kx^m$, ($m \geq 100$)

$\therefore y_0 = kx_0^m, y_i = kx_i^m \quad (i=0, 1, 2, \dots, n),$

$$\frac{y_0}{y_i} = \frac{kx_0^m}{kx_i^m}, \quad y_i = y_0 \left(\frac{x_i}{x_0} \right)^m,$$

$$\therefore f(x) = y_0 \left(\frac{x}{x_0} \right)^m.$$

若 指数不是常数时，则给我们以新的思路。

2) 设 $f(x) = kx^m + b(x)$, ($m \geq 100$)

$$y_0 = kx_0^m + b(x_0), \quad y_i = kx_i^m + b(x_i) \quad (i=0, 1, 2, \dots, n),$$

此时方程的指数是一个变量,但在已知点上是已知的数值.即

令 $y_i = y_0 \left(\frac{x_i}{x_0} \right)^{\alpha(x_i)}$, 则有

$$\alpha(x_i) = \lg \frac{y_i}{y_0} / \lg \frac{x_i}{x_0}.$$

于是在 x_i ($i=1, 2, \dots, n$) 点上不难求出 $\alpha(x_i)$ 值. 在未知点上给出一个指数函数

$$\alpha(x) = \lg \frac{y}{y_0} / \lg \frac{x}{x_0},$$

把原来的函数看做

$$f(x) = y_0 \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\alpha(x)}.$$

经考察, $\alpha(x)$ 确实具有较 $f(x)$ 降幂的性能. 尽管 $f(x)$ 的幂次极高, 陡度极大, 通过 $\left(\frac{x}{x_0} \right)$ 的作用也会转为低幂次的函数 $\alpha(x)$. 在这些思路引导下进行了公式的推导.

首先给出公式的条件:

(1) $f(x)$ 在 $[x_0, x_1]$ 连续, 有界;

(2) $f(x)$ 有连续的导函数 $f^{[1]}(x)$ 、 $f^{[2]}(x)$ 、 $f^{[3]}(x)$,

在上述区间有界;

(3) $x \in [x_1, x_2]$, $x \in (x_0, x_1)$;

(4) $x_0 \neq 0$, $f(x_0) \neq 0$, $\frac{x}{x_0} > 0$, $\frac{f(x)}{f(x_0)} > 0$, $|x_1 -$