数学

习题及解答

福州市教师进修学院　福州市数学会　编

新编高中数理化复习参考书

SHULIHUA

天津科学技术出版社

新编高中数理化复习参考书

数 学

习题及解答

（上）

福州市教师进修学院
福 州 市 数 学 会 编

天津科学技术出版社

新编高中数理化复习参考书

数　学

习题及解答

（上）

福州市教师进修学院
福　州　市　数　学　会　编

*

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道124号

天津新华印刷二厂印刷

天津市新华书店发行

*

开本787×1092毫米 1/32 印张 9 7/8 字数 209,000

一九八〇年十二月第一版

一九八〇年十二月第一次印刷

印数：1—278,000

统一书号：13212·26 定价：0.81 元

前　言

为了提高中学学生数理化基础知识水平，适应四个现代化的需要，我们根据教育部制定的中学教学大纲和全国统编教材的精神，在总结教学经验和分析学生掌握知识情况的基础上，编写了这套《新编高中数理化复习参考书》。其中包括《数学》、《物理》（上、下册）、《化学》、《数学习题及解答》（上、下册）、《物理习题及解答》（上、下册）、《化学习题及解答》等九册。

这套书着眼于帮助读者切实掌握数理化基础知识，增强分析和解决问题的能力，在编写上特别注意到学科内容的系统性，和内在联系，概括出简明的复习要点；同时，精选一定数量的典型例题和习题，在例题和习题的解答上，注意引导学生掌握正确的分析方法和解题途径，便于读者打开思路，开阔眼界，收到举一反三、融会贯通的效果。本套书可供应届高中毕业生和知识青年准备升学复习之用，也可供中学教师教学及各年级学生的复习参考之用。

本书是配合数学分册的习题解集。习题分（一）、（二）两类，便于读者从易到难地深入学习。因篇幅关系，本书对第一类基本练习题没有给出解答，只对第二类习题、附录的综合题等作出解答；并一般只给出一种解法或证法。

本书由池伯鼎、周志文、林振铨、郭仰嵩、魏长庚、任寿彬、陈金华、倪木森、高玉株、陈敏贤、林宗炘、郭道

平、吴大钟、李必成、林玉润等同志编写和审阅。

本书在定稿前，虽经反复讨论、修改，但限于我们的水平，缺点和错误在所难免，希望广大读者批评指正。

福州市教师进修学院

福 州 市 数 学 会

一九八〇年一月

目　录

第一章 数 与 式

习 题

(一)

1. 在数轴上表示适合下列式子的实数x：

(1) $1\leqslant x<4$；　　(2) $-5<x\leqslant 0$；

(3) $|x|=2$；　　(4) $1\leqslant|x|<4$。

2. 已知$|a|=2$，$|b|=5$，求$|a+b|$的值。

3. 当x取何值时，代数式$\dfrac{4x^2-1}{2x^2-x-1}$的值是0？是1？无意义？

4. 不解方程，说明下列方程无实数解：

(1) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x}=0$；

(2) $|x+1|+\sqrt{x-2}=2$；

5. 计算：

(1) $1-\left\{\dfrac{1}{2}-\left[\dfrac{1}{3}-\left(\dfrac{1}{4}-x\right)\right]\right\}$；

(2) $3\div\{[(5-x)-3x]-3x\}\times(5-6x)$；

(3) $(a-b)(a^2+ab+b^2)+3ab(b-a)-(a-b)^3$；

(4) $(a-b+1)^2-(a+b)^2+2(1-a)(b-1)$；

(5) $(3x^2-y)(3x^2+y)(9x^4+y^2)$；

(6) $(3a-b+2c)(3a+b-2c)+(b-2c)^2$。

6. 计算：

(1) $\dfrac{3x^2-11x-4}{x^2+2x-3} \div \dfrac{x^2-16}{x^2+6x+9} \times \dfrac{x+4}{3x+1}$；

(2) $\left[\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)\div(a+b)+a\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)\right]\div\dfrac{1+a}{b}$；

(3) $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \div \dfrac{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{ab}}$；

(4) $1-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{x}}}$.

7. 分解因式：

(1) $x^{2n+1}y-x^{2n-1}y$；

(2) $16x^2-y^2-8x+1$；

(3) $x(x+4)+(x+1)(x-6)$；

(4) x^4+4y^4；

(5) $a^{m+1}-\dfrac{2}{3}a^m+\dfrac{1}{9}a^{m-1}$；

(6) $x^3-y-x+y^3$；

(7) $x^{m+2}y^{m-2}-5x^{m+1}y^{m-1}+6x^my^m$.

8. 计算：

(1) $2\sqrt{25a}-3\sqrt{a^2b}+5\sqrt{36a}-2\sqrt{a^2b}$；

(2) $5\sqrt{x^3y}-2y\sqrt{xy}-6\sqrt{xy}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

$$+\sqrt{\frac{x}{y}}\quad (x<0,\ y<0);$$

(3) $b\sqrt{\dfrac{1}{a-b}}-\dfrac{1}{a}\sqrt{a^3-a^2b}+\dfrac{1}{b}\sqrt{ab^2-b^3}$

$$-b\sqrt{\frac{4a}{b^2}-\frac{4}{b}}\quad (a>b>0).$$

9．计算：

(1) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$;

(2) $(a^2-b)\div(a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})$;

(3) $\left[\left(x^{\frac{1}{m-n}}\right)^{m-\frac{n^2}{m}}\right]^{\frac{n}{m+n}}$;

(4) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}\div\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)-a^{\frac{2}{3}}$;

(5) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+b^{-1}-2a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{4}}}$.

10．计算：

(1) $\sqrt{81^{0.5\log_3 7}}$;

(2) $\log_2 6\cdot\lg\dfrac{1}{8}+\lg\dfrac{27}{125}$;

(3) $\lg 12.5-\lg\dfrac{5}{8}+\lg\sin 30^\circ$;

(4) $\log_{2\sqrt[3]{2}} 32\sqrt[7]{4}$.

11．求证：$\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n}\log_a b$（$a>0$，$a\neq1$，$b>0$，$n\neq0$）．

12．计算：$\sqrt[3]{\sqrt{7}-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{15+4\sqrt{14}}$．

13．把$3x^2-6x-5$写成$a(x-2)^2+b(x-2)+c$的形式（即求出a、b、c的值）．

14．求出下列恒等式中a、b、c的值：

（1）$\dfrac{3x-4}{x^2-3x+2}\equiv\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}$；

（2）$\dfrac{1}{x^3+x}\equiv\dfrac{a}{x}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$．

15．已知$\dfrac{2}{x}=\dfrac{3}{y}=\dfrac{7}{z}$，求$\dfrac{x+2y+2z}{2x-y+3z}$的值．

16．已知$\lg2=0.3010$，不查表求20^{10}是几位数．

17．已知$\lg2=0.3010$，不查表求0.05^{10}第一个非零数字前面有几个零（包括小数点前面的一个零）．

18．已知实数x、y满足$y=\sqrt[6]{6x-2}+\sqrt{1-3x}+3$，求$x^y$．

19．已知：$x+y=-2$，$x^3+y^3=-14$，求xy与x^2+y的值．

20．已知：$a=\sqrt{2}-\sqrt{7}$，$b=\sqrt{2}+\sqrt{7}$，求$a^4+b^4-a^2b^2$的值．

（二）

1．求证：任意一个正整数与它的数字顺序倒排后（如317倒排后为713）所得的数之差一定是9的倍数．

2. 已知a、b、c为不等于0的实数，若$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$，则

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$.反之亦然．试证之．

3. 已知$x+y+z=6$，$x^2+y^2+z^2=14$，$xyz=6$，求：

(1) $xy+yz+zx$；(2) $x^4+y^4+z^4$.

4. 已知$x=\sqrt{2+\sqrt{3}}$，$y=\sqrt{2-\sqrt{3}}$，求$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$的值．

5. 在实数范围内分解因式：

(1) $6x^2-7xy-3y^2-x+7y-2$；

(2) $(x+y)^3+2xy(1-x-y)-1$；

(3) $2x^3-x^2-12$；

(4) x^8+x^4-2；

(5) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-120$；

(6) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$；

(7) $(1+a)^2(1+b^2)-(1+a^2)(1+b)^2$；

(8) $3x^4+5x^3-16x^2+5x+3$.

6. 化简：$2+\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}-1}-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+1}$，并求当$x=\frac{1}{4}$时代数式的值．

7. 求证：

(1) $\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{10}$；

(2) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

8．求适合于式子$\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}=5$的实数$x$．

9．已知$2a^2-5a+2>0$，化简：$2\sqrt{a^2-4a+4}+|2a-1|$．

10．已知$a^x-a^{-x}=3(a>0)$，求$\dfrac{a^{4x}-a^{-4x}}{a^x+a^{-x}}$的值．

11．计算：$\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2-\log_8 3}}\times\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{3}}\times$

$$(3\div\frac{1}{2})^2.$$

12．计算：$\lg5\cdot\log_{\sqrt{10}}20+(\lg2^{\sqrt{2}})^2-3^{2\log_3 2-1}$．

13．已知$\log_6 7=a$，$\log_3 4=b$．求$\log_{14}21$．

14．(1)已知$\lg7=0.8451$，$\lg x=2\times(-2.8451)$，求x．

(2)已知$\lg1.69=0.2279$，$\lg x=\dfrac{1}{2}\times(-1.7721)$，求$x$．

15．已知$\lg25.12=1.4$，求$\sqrt[6]{0.0002512}$的值．

16．已知$\lg0.784=a$，$\lg175=b$，求$\lg2$，$\lg7$．

17．已知两实数满足$a^2b^2+a^2+b^2+1=4ab$，求a、b的值．

18．求证：$\dfrac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}}+\dfrac{1}{1+x^{b-c}+x^{b-a}}$

$$+\frac{1}{1+x^{c-a}+x^{c-b}}=1.$$

19．已知$abc=1$，求证：

(1) $\dfrac{1}{ab+a+1}+\dfrac{1}{bc+b+1}+\dfrac{1}{ca+c+1}=1$；

(2) $\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{c}{ca+c+1}=1$.

20. m取何值时$(x-1)(x+3)(x-4)(x-8)+m$是一个完全平方式？

21. (1) 分解因式：$a^3+b^3+c^3-3abc$.

(2) 已知 $a+b+c=0$，求证 $a^3+b^3+c^3=3abc$.

(3) 已知 $a^3+b^3+c^3=3abc$，且a、b、c不全相等，

求证：$a+b+c=0$.

(4) 已知 $a+b+c=0$，且$abc\neq0$，

求 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$ 的值.

22. 已知 $x=y+z=2^{\frac{2}{3}}$，求$x^3+2y^3+2z^3+6xyz$的值.

23. 已知$\dfrac{a}{c}=\sin\theta$，$\dfrac{b}{c}=\cos\theta$ $\left(c>0,\ 0<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$(c+b)^{c-b}=(c-b)^{c+b}=a^a$，

求证：$\lg^2 a=\lg(c+b)\lg(c-b)$.

24. 求证：对于任意一个正整数，若它的奇位上数字的和与偶位上数字的和之差能被11整除，则这个数必能被11整除.

25. 已知 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$，求证：

(1) a、b、c中一定有两个数为相反数；

(2) $\dfrac{1}{a^{2n+1}}+\dfrac{1}{b^{2n+1}}+\dfrac{1}{c^{2n+1}}=\dfrac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}$

（n为任意整数）。

26．已知a、b、c、d都是正数，且$a^{\lg 2}=b^{\lg 5}=c^{\frac{1}{2}}$，求证 $\log_c d$是$\log_a d$与$\log_b d$的等差中项．

27．已知$\dfrac{a}{b+c}=x$，$\dfrac{b}{c+a}=y$，$\dfrac{c}{a+b}=z(a+b+c\neq 0)$，

求证：$\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{y}{1+y}+\dfrac{z}{1+z}=1$．

解　　答

1．求证：任意一个正整数与它的数字次序倒排后（如317倒排后为713）所得的数之差一定是9的倍数．

〔证明〕 设正整数N各位数字从左到右为$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}$，$a_n$．那么

$$N=a_1\times 10^{n-1}+a_2\times 10^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\times 10+a_n.$$

将其数字次序倒排后所得的数记为N'，那么

$$N'=a_n\times 10^{n-1}+a_{n-1}\times 10^{n-2}+\cdots+a_2\times 10+a_1.$$

$$N-N'=a_1\times(10^{n-1}-1)+a_2\times(10^{n-2}-10)+\cdots$$
$$+a_{n-1}(10-10^{n-2})+a_n\times(1-10^{n-1}). \qquad (1)$$

下面证明当p、q为整数时，10^p-10^q是9的倍数．

若$p=q$，结论显然成立；

若$p>q$，则

$$10^p-10^q=10^q(10^{p-q}-1)$$
$$=10^q\times\underbrace{99\cdots9}_{p-q\text{个}},$$

故10^p-10^q是9的倍数；

若$p<q$，则类似可证得此结论．

由上述结论知，(1)式右边各项均为9的倍数，故$N-N'$是9的倍数．

2．已知a，b，c为不等于0的实数，若$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$，则$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$，反之亦然，试证之．

〔证明〕(1)若$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$，则有$\frac{ab+bc+ca}{abc}=0$．

$\therefore\quad ab+bc+ca=0$．

$$\therefore\quad (a+b+c)^2=a^2+b^3+c^2+2ab+2bc+2ca$$
$$=a^2+b^2+c^2.$$

(2) 若$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$，

由 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$得

$$ab+bc+ca=0.$$

$\because\quad a$，b，c均不等于0，把上式两边同除以abc得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0.$$

3．已知$x+y+z=6$，$x^2+y^2+z^2=14$，$xyz=6$，求：

(1) $xy+yz+zx$；

(2) $x^4+y^4+z^4$．

〔解〕

$$\text{已知}\begin{cases} x+y+z=6, & (1)\\ x^2+y^2+z^2=14 & (2)\\ xyz=6 & (3)\end{cases}$$

(1) 式平方得 $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=36$，

把(2)式代入上式得

$$xy+yz+zx=11. \qquad (4)$$

(2) 式平方得

$$x^4+y^4+z^4+2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2=196. \qquad (5)$$

(4) 式平方得

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2x^2yz+2y^2zx+2z^2yx=121.$$

即 $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)=121.$

把(1)、(3)代入上式得 $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=49.$

$\therefore \quad x^4+y^4+z^4=196-2\times 49=98.$

4. 已知 $x=\sqrt{2+\sqrt{3}}$， $y=\sqrt{2-\sqrt{3}}$，

求 $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$的值.

〔解〕 $x=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$

同法，得 $y=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$

$\therefore \quad x+y=\sqrt{6}$，$x-y=\sqrt{2}$，$xy=1$.

故 $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}=\dfrac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$

5. 在实数范围内分解因式：

(1) $6x^2-7xy-3y^2-x+7y-2$；

〔解〕 原式 $=6x^2-(7y+1)x-(3y^2-7y+2)$

$=6x^2-(7y+1)x-(3y-1)(y-2)$

$=(3x+y-2)(2x-3y+1).$

(2) $(x+y)^3+2xy(1-x-y)-1$；

〔解〕 原式 $=[(x+y)^3-1]+2xy(1-x-y)$

$=(x+y-1)[(x+y)^2+x+y+1]$