北京大学地球物理系
傅淑芳　朱仁益　编著

地球物理反演问题

地震出版社

地球物理反演问题

北京大学地球物理系
傅淑芳　朱仁益　编著

地震出版社
1998

内 容 提 要

本书是固体地球物理专业硕士研究生教材。主要讲授广义线性反演方法，BG 线性反演理论，高斯分布和非高斯分布的线性反演问题，计算机层析成像方法原理及地震学实例等。

本书可供高等学校有关专业讲授反演课程之用。还可供地球物理专业及相关的地质、冶金、煤矿以及石油、天然气勘探等专业技术人员自学和参考。

地球物理反演问题

北京大学地球物理系
傅淑芳 朱仁益 编著

责任编辑：姚家榴
责任校对：张晓梅

*

地震出版社出版发行
北京民族学院南路 9 号
北京地大彩印厂印刷
全国各地新华书店经售

*

850×1168 1/32 8.625 印张 231 千字
1998 年 7 月第一版 1998 年 7 月第一次印刷
印数 001－600
ISBN 7-5028-1519-8/P·933
(1976) 定价：13.00 元

前　言

本书是作者在北京大学固体地球物理专业讲授的硕士研究生专业课的基础上编写的。

自从 1967 年 Backus-Gilbert 地球物理反演方法与理论论述发表、1984 年 A. M. Dziewonski 和 D. L. Anderson 关于下地幔及核幔边界的层析成像的成果发表之后，地球物理反演问题的研究就蓬勃地开展起来了。又随着近十来年的数字观测技术的发展，观测资料大大丰富、精度日益提高，这又促使反演问题研究的深入。特别是关于地震层析成像技术，无论在国际上和国内地球物理学界，都有了突出的进展。为使人才培养适应这一发展的需要，我们在向国内同行学习的基础上，引进国外先进教材，自 1987 年以来，开设了地球物理学中的反演问题的课程。该课程主要内容为线性反演理论，并结合地震学问题作算法程序实习。在多次教学实践之后，我们编写了这本教材。

大家知道，在反演问题中，始终认为反演问题的研究依赖于正演问题的确定性。这也就引出了反演问题的局限性与多解性。正因为如此，反问题的研究内容正在或有待进一步发展。本书作为基础教材，在地球物理反演理论中只是沧海一粟而已。

由于作者水平所限，书中难免有不妥与错误之处，敬请读者提出宝贵意见。

编著者

1997. 5

于北京大学承泽园

目　　录

第一章 正演问题和反演问题的概述

正演问题一般是属于数学物理方程的问题，即解适合于一定附加条件的二阶偏微分方程问题。例如，已知初条件求固定端点的弦的振动，已知介质参数求平面波的传播问题，都属于这类问题。推广之，可以说正演问题是按事物的一般原理(或说模型)以及相关的条件(初条件、边条件)来预测事物的结果。而这些事物的结果往往是可以由观测而得到的。那么，就有所谓反演问题，即处理与上述正演内容相反的问题。具体说来就是由结果及某些一般原理(或模型)出发去确定表征问题特性的参数(或称模型参数)。可看出反演问题是相对于正演问题而存在的。

地球物理学是把地球作为研究对象的一门学科。地球物理学中的反演问题就是研究利用地球物理的观测数据去反推描述地球物理模型特征的理论与方法。这些研究内容正在发展之中。本章主要阐述关于反演问题的概念。

§1 反演问题的一般原理及实例

现实的客观世界中，许多物理问题的特征可从多种的观测资料中来认识它们。这样，反演问题可以概括为：处理多样的观测资料，将它们作数学组编，从而推断出反映物理世界内在特征的某些有用信息。例如，基于用地表或地壳浅层的地球物理观测资料来研究地球内部构造，这就是典型的反演问题。目前最深的地球物理钻井仅约 11km 深，故对于地球本体的直接观测只限于深度极小的浅层，那么，用反演理论来解决地球内部构造的特征就是唯一的方法了。

如果说正演问题作的是由因及果的工作，这可概括为公式程

序：模型参数→模型→数据的预测(prediction of data)。那么，反演问题作的是由果推因(或说由因反推果)的工作，概括的公式程序为：数据→模型→模型参数的估算值(estimates of model parameters)。

下面举一些实例来说明它。

1. 直线拟合问题

测量随深度线性增加的地温值。在给定深度 z 处的地温为 T，且 $T(z)=a+bz$，设有 N 个观测值，组成数据矢量 $\boldsymbol{d}=(T_1,T_2,\cdots,T_n)^{\mathrm{T}}$，求问题的两个模型参数 a,b，组成模型参数矢量 $\boldsymbol{m}=(a,b)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{d}$、$\boldsymbol{m}$ 中的上标 T 表示转置。那么，

$$\begin{aligned} T_1 &= a + bz_1 \\ T_2 &= a + bz_2 \\ &\vdots \\ T_N &= a + bz_N \end{aligned} \tag{1.1}$$

也可写成矩阵方程

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & z_N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

或

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{m} \tag{1.3}$$

式中 $\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & z_N \end{bmatrix}$ 为数据核矩阵，其中 $z_i(i=1,2,\cdots,N)$ 为与问题的几何特征有关的辅助参数。

这个反问题的方程(模型)是线性的，故为最简单的直线拟合问题。

2. 声波层析成像问题

一正方形墙由 16 块方砖砌成。要用声波来测定墙的弹性特征。

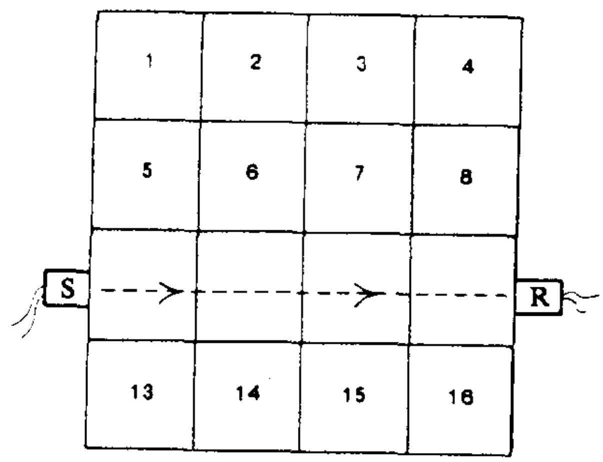

图 1.1　声波层析装置

S. 发射源；R. 接收器

设墙中每一块砖都由各不相同的均匀材料作成。每块砖的宽度与厚度均为 h(图 1.1)。将声波源 S 及接收器 R 放置在墙的两边，它们同时在墙的左右边及上下边移动 4 次，声波射线如图中虚线所示。声波在每块砖中的走时与砖的宽度或厚度成正比例，比例系数为砖的慢度 $s_i(i=1,2,\cdots,16)$。因共有 8 个观测走时值 $t_i(i=1,2,\cdots,8)$，现需求每块砖的慢度值 s_i。按图 1.1 的排列布局，可有

$$
\begin{aligned}
&\text{第 1 行}: t_1 = hs_1 + hs_2 + hs_3 + hs_4 \\
&\text{第 2 行}: t_2 = hs_5 + hs_6 + hs_7 + hs_8 \\
&\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1.4) \\
&\text{第 4 例}: t_8 = hs_4 + hs_8 + hs_{12} + hs_{16}
\end{aligned}
$$

或写成矩阵方程

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_8 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ \cdots\cdots \\ 0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{16} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

式中 h 为辅助常数。

解得方程(1.5)的 s_i，就可知各块方砖的声波传播速度 $v_i(=1/s_i)$，由此推出整个墙的弹性特征。这也是简单的线性反演问题。

3. 地震波衰减问题

研究表明，在衰减介质中，沿给定射线的地震波走时

$$t^* = \int_S \frac{\mathrm{d}S}{Qv} \tag{1.6}$$

式中 Q 为衰减介质的品质因数，v 为波速，$\mathrm{d}S$ 为射线路径元。

若有衰减扰动 δQ^{-1}，那么所引起的走时扰动为 δt^*，并有

$$\delta t^* = \int_S \delta Q^{-1} \frac{\mathrm{d}S}{v} = \int_S \delta Q^{-1} \mathrm{d}t \tag{1.7}$$

式中 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}S/v$ 为沿射线路径的走时元。此 δt^* 可由地震波观测振幅的衰减测量出。

类似于声波层析的考虑，将介质划分为 M 块，第 i 块($i=1,2,\cdots,M$)的扰动为$(\delta Q^{-1})_i$，如此，将模型离散化，则对于第 j 条射线的衰减走时扰动为

$$\delta t_j^* = \sum_{i=1}^{M} \Delta t_{ij} (\delta Q^{-1})_i \tag{1.8}$$

式中 Δt_{ij}为第 j 条射线(到达第 j 个台站)穿过第 i 块的走时，当 $j=1,2,\cdots,N$ 时取得 N 个观测值，组成数据矢量 $\boldsymbol{d}=(\delta t_1^*,\delta t_2^*,\cdots,\delta t_N^*)^{\mathrm{T}}$，而待求的每块的衰减扰动就组成模型参数矢量 $\boldsymbol{m}=(\delta Q_1^{-1},\delta Q_2^{-1},\cdots,\delta Q_M^{-1})^{\mathrm{T}}$，那么，方程(1.8)写成矩阵方程为

$$
\begin{pmatrix} \delta t_1^* \\ \delta t_2^* \\ \vdots \\ \delta t_N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta t_{11} & \Delta t_{12} & \cdots & \Delta t_{1N} \\ \Delta t_{21} & \Delta t_{22} & \cdots & \Delta t_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta t_{M1} & \Delta t_{M2} & \cdots & \Delta t_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta Q_1^{-1} \\ \delta Q_2^{-1} \\ \vdots \\ \delta Q_M^{-1} \end{pmatrix} \tag{1.9}
$$

上述为关于 Q 值扰动的线性反演问题。应该注意到，若要得到每块的 Q^{-1}值，还需要给出一个合适的初始 Q 值模型。

4. 地震波走时反演问题

对于球对称地球介质，地震波速度 v 随径向坐标 r 而变，在速度变化率$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}<\frac{v}{r}$的条件下，地震射线方程为 $p=\frac{r\sin i}{v}$。在射线顶点(图 1.2)处，有

$$
p = r_P/v(r_P) \tag{1.10}
$$

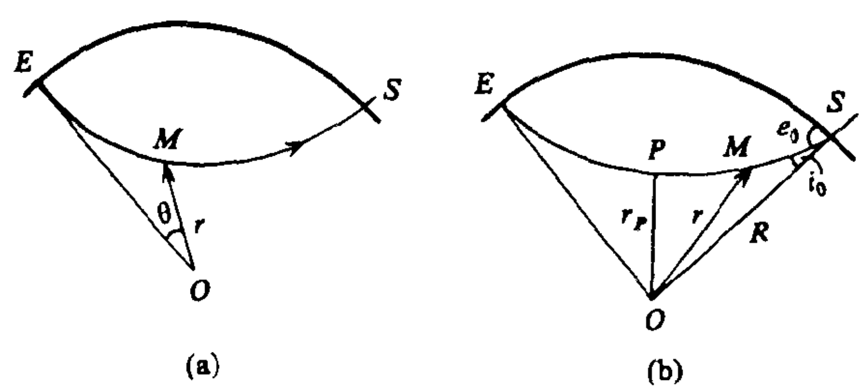

图 1.2　球对称介质中的地震射线

在地表，观测到的地震波走时 t 为震中距 θ 的函数，可用射线参数 p 表示为

$$
p = \mathrm{d}t/\mathrm{d}\theta \tag{1.11}
$$

对于一条给定的射线，已知震中距中 θ_1，走时为 $t(\theta_1)$，即由观测已知 $p(\theta_1)$，令此条射线的顶点半径 $r_P=r_1$，运用 Hergloz-Wiechert 公式

$$
\ln\left(\frac{R}{r_1}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\theta_1}\mathrm{arch}\,\frac{p(\theta)}{p(\theta_1)}\mathrm{d}\theta \tag{1.12}
$$

求出 r_1，即可由(1.10)式得到径向坐标 r_1 处的地震波速度$v(r_1)$。

设有 N 个测量值 $t(\theta_i)$，因而有 N 个 $p(\theta_i)(i=1,2,\cdots,N)$，用式(1.12)求出 N 个 r_i，即

$$\begin{aligned} r_1 &= p(\theta_1)v(r_1) \\ r_2 &= p(\theta_2)v(r_2) \\ &\vdots \\ r_N &= p(\theta_N)v(r_N) \end{aligned} \tag{1.13}$$

或写成 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{Gm}$ 形式，则 $\boldsymbol{d}=(r_1,r_2,\cdots,r_N)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{m}=(v(r_1),v(r_2),\cdots,v(r_N))^{\mathrm{T}}$，而数据核

$$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix} p(\theta_1) & & & 0 \\ & p(\theta_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p(\theta_N) \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

这是最早引入的地球物理线性反演问题。

值得提出的是，射线路径是由介质中的传播速度决定的，第 i 条射线的观测走时参数方程为

$$t_i = 2\int_{r_P}^{R} r^{-2}\eta^3(r)(\eta^2(r) - p^2)^{-\frac{1}{2}}v(r)\mathrm{d}r \tag{1.15}$$

式中 $\eta(r)=r/v$，若记 $G(r,\eta)=2r^{-2}\eta^3(r)(\eta^2(r)-p^2)^{-\frac{1}{2}}$，则有

$$t_i = \int_{r_P}^{R} G_i(r,\eta(r))v(r)\mathrm{d}r \tag{1.16}$$

此为关于 $v(r)$的非线性模型。H-W 公式的作用是将非线性问题化为适定的线性问题来解。

§2 反演问题的概念及公式

反演问题的主要内容有三方面，其一是解的适定问题，包括解的存在性、唯一性及稳定性。其二是反演问题的求解方法。其三是反演问题的解的评价。

在地球物理资料的反演中，解的存在性已被大量事实所证实。

它也是对所研究的问题及其附加条件的正确性的一种检验。在理论上，解的存在性和唯一性，与反演问题的数学确定性有关；而解的稳定性则与反演问题的物理确定性以及求解方法对观测数据的处理状况有关。

在数学上，我们研究的问题总是对实际情况作简化使其一般化。那么，就要从量的方面来研究解的存在性。论证其存在性有时也是提供解法的过程。对于选定的模型和已知条件，若解存在，那么它是否是唯一解？若不是唯一解，为解决其唯一性，通常应加上附加的约束条件，或增加观测数据，或二者兼而有之。观测数据常是有误差的，且与测量的状况有关。解的稳定性就是研究当反演问题中的数据稍有变化时其解是否会发生大的变化？若数据的微小变化所引起的解在定义域中的变化也是微小的，则认为解的值连续依赖于数据，问题的解是稳定的。而若此时解在定义域中的变化很大且不规则，则称问题的解是不稳定的，即为病态。

在处理反演问题中，通常我们更关心的是求解方法。由于实际问题的复杂性，有时尽管作过解的存在性与唯一性的验证，但并不等于就有了求解的方法。且在实际应用时，也不强求要先解决适定性才能求解。许多问题都是通过反复的实践与演变，才能建立起比较完整的理论。所以，反演问题研究中最大量的工作是研究求解的方法。

研究解的评价的一系列准则及折衷原则是反演理论的又一不可分割的内容。它在反演理论中有特别重要的意义。没有给出解的评价的反演理论是不完全的，且它不同于一般正演问题的误差分析，而是在反演理论中提取真实解信息的重要工具。

在反演理论的探讨中，一般从模型及资料的描述开始，大致有三种主要观点。第一种观点是把数据和模型参数作为随机变量来处理。那么确定的是它们所服从的概率分布。自然地导致对解的误差分析及可信度检验。第二种观点把问题看作由一些确定的参数来决定的模型，则反演方法是求取这些模型参数的估算值及

其误差，而尽量不涉及概率分布本身。当然，这些解估值常常是其概率分布的某些数字期望值。这部分内容也称为离散反演理论。第三种观点视模型本身为连续函数，形成一套连续反演理论和方法。在地球物理反演理论中有著名的 Backus-Gilbert 反演方法。若把连续函数用有限个离散参数来近似，则这部分理论的某些概念在前两个观点中也可得到应用。

在对数据进行描述中，从前述多个实例中可看出，如某个实验得到 N 个的测量数据，可将这 N 个数据表示成一个 N 维向量 $\boldsymbol{d}$。类似地，对于模型参数也可用一个 M 维向量 $\boldsymbol{m}$ 表示。则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d} &= (d_1, d_2, \cdots, d_N)^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{m} &= (m_1, m_2, \cdots, m_M)^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{1.17}$$

式中上角标表示转置。

对于给定的反演问题，模型参数和数据以某种方式联系起来。数学上将它们表示为各式各样的函数关系。

设向量函数 $\boldsymbol{f}=(f_1, f_2, \cdots, f_L)^{\mathrm{T}}$，则反演问题的最一般公式为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{m}) = 0 \tag{1.18}$$

这种泛函关系式称为模型，或说是模型的数学公式。

若函数 $\boldsymbol{f}$ 是对变量的线性函数，则方程(1.18)可写成矩阵方程

$$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix}\boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{m}\end{pmatrix} = 0 \tag{1.19}$$

式中 $\boldsymbol{f}$ 是一个 $L\times(M+N)$ 阶矩阵。

在许多情况下，有可能将 $\boldsymbol{d}$ 和 $\boldsymbol{m}$ 分开，且 $L=N$，则式(1.18)可写成

$$\boldsymbol{d} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{m}) = 0 \tag{1.20}$$

当函数 $\boldsymbol{g}$ 也是线性的，则有

$$\boldsymbol{d} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{m} = 0 \tag{1.21}$$

式中 $\boldsymbol{G}$ 为 $N\times M$ 阶矩阵。相当于(1.19)式中的 $\boldsymbol{F}$ 是一个分块对角

矩阵。

$$F=\begin{pmatrix} -I & O \\ O & G \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

显线性方程(1.21)是反演问题的最简单的表示形式，是离散反演理论的基础模型，其求解方法称为线性反演方法。

对于连续模型，则两个连续函数 $d(x)$和 $m(x)$的关系可用积分方程表示为

$$d(x)=\int G(x,\xi)m(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{1.23}$$

式中 $G(x,\xi)$是积分核函数，或称为 Green 函数。它的形式决定线性反演问题的性质及解的特征。

模型的选择与资料状况有关。我们只能期望从资料（数据）中提取与模型有关的信息并据此“还原”模型。不顾及资料的可能性，例如关于精度、分辨尺度等而选定的模型，就会使反演问题无解或不稳定。同时，模型应尽可能接近真实物理问题，即要求模型有一定的精确性，且对数据的依赖是稳定的，并能保证可由经济实用的算法来求解。

在实际实施中，应注意到这些要求之间往往不协调，例如精确性与实用性有时就存在着矛盾，我们不得不在选择模型时在它们之间折衷。

正确的模型是求解反问题的基础。模型的好坏主要在于它对观测资料的吻合程度。就方法和资料而言，观测资料是第一位的，信息的缺乏不可能通过任何的数学方法来补救。当然，也应强调不能把模型与现实混为一谈。随着观测资料的积累与精度的提高，要不断寻求建立新的模型，以进行反演问题的深化研究。

§3 反演问题的数学适定性讨论

反演问题中，对于容许的数据 $\boldsymbol{d}$ 的每一个集合，问题的解 $\boldsymbol{m}$ 存在且唯一，且解连续依赖于 $\boldsymbol{d}$，这时，线性偏微分方程问题称为

适定问题，或说其解是适定的（well or properly posed problem）。部分不满足或全不满足上述条件的问题便称作不适定问题（ill or improperly posed problems）。

在实际的反演问题中，观测数据存在误差。在实际使用的计算机中，数的位数也是有限的，其指数传播的误差就可造成算法的不稳定性。如此诸多原因的每一个方面，都造成问题的实际物理内容的确定存在性与相应数学问题的不适定性之间的明显的矛盾。为使问题得以解决，只有对问题的解加上适当的附加条件，使问题成为适定的。例如当按照 Herglotz-Wiechert 公式，利用走时资料研究地球内部的地震波速度分布 $v(r)$时，把实际地球模型简化为各向同性的完全弹性的球对称的地球模型，并附加上速度随深度单调增加且 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}r<v/r$ 的条件，显然，我们所归结出的问题只是近似地反映了所研究的对象，而不能认为两者是等同的。因此，完全有必要从量的角度研究解的存在性。现在，我们就明白了，不能强求反演问题的精确解，而应去寻求那种满足方程但近似满足定解条件，或近似满足方程但精确满足定解条件，或两者都近似满足的解。很明显，此时的解不是唯一的。于是，在数学上面临的问题是在‘条件适定’（conditionally well posed）概念下求解不适定问题。

为说明解的非唯一性，让我们来考虑零向量和零空间的概念。当线性反问题 $\boldsymbol{Gm}=\boldsymbol{d}$ 有两个解 $\boldsymbol{m}_1$ 和 $\boldsymbol{m}_2$，即其解是非唯一的，则有

$$\boldsymbol{Gm}_1=\boldsymbol{d},\quad \boldsymbol{Gm}_2=\boldsymbol{d} \tag{1.24}$$

两个方程相减，得

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{m}_1-\boldsymbol{m}_2)=0 \tag{1.25}$$

因为假定这两个解是截然不同的，所以它们的差 $\boldsymbol{m}^{\mathrm{null}}=\boldsymbol{m}_1-\boldsymbol{m}_2$ 是非零的，而称矢量 $\boldsymbol{m}^{\mathrm{null}}$为零矢量。而由零矢量组成的空间称为零空间。可看出，任何具有零矢量的线性反演问题的解都是非唯一的。如果 $\boldsymbol{m}^{\mathrm{par}}$（par 是 particular 的缩写，这里表示特解）是 $\boldsymbol{Gm}=\boldsymbol{d}$ 的