建 筑 管 理 现 代 化 丛 书

线性规划及其在建筑管理中的应用

官 世 燊　编

中 国 建 筑 工 业 出 版 社

编 者 的 话

线性规划是运筹学一个最重要的分支，它有丰富的内容，完整的理论，有效的计算方法和计算机程序，在现代建筑管理中已成为得力的工具，应用十分广泛。本书是线性规划的入门书。

为使具有中等文化程度的管理干部和其他人员也能掌握线性规划的基础知识，本书采用从具体实例入手、然后引出有关概念、原理和计算方法的表述方式，对内容不作数学上的严密表达和论证，而尽可能地考虑内容的系统性，叙述的通俗性，注意把线性规划理论与建筑管理的实际问题结合起来。

限于编者的水平和经验，书中的不周之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编者　官世燊

《建筑管理现代化》丛书

编辑委员会

出　版　说　明

《建筑管理现代化》丛书开始和读者见面了。

我们出版这套丛书的目的，主要不在于向读者介绍传统的管理知识，以提高建筑企业当前的管理水平；而是着眼于未来，把国内外建筑企业管理方面的先进理论、方法和经验及现代管理科学的新成就奉献给建筑业的广大职工，以期起到启迪思路、开扩眼界、洋为中用的作用，在未来的一段较长时间内，促进我国建筑企业经营管理的改革和逐步实现管理现代化。

出版这套丛书，也是为了适应建筑业在职干部进修的需要。当前，从我国四化建设的要求考虑，对在职干部进行继续教育的重要性和迫切性日益突出。有鉴于此，城乡建设环境保护部曾委托同济大学、重庆建筑工程学院和哈尔滨建筑工程学院从一九八一年开始举办了建筑企业经理、干部、工程师等不同类型的进修班。以上述三院校的任课教师为主（并有其他院校教师参加），在教学实践的基础上编写的这套丛书，可作为这些进修班的教材或主要教学参考书，并推荐作为建筑企业在职干部的自学必读。

这套丛书计划选题三十种左右，二、三年内出齐。

企业管理是一门思想性、理论性、技术性都很强的科学。我国实现建筑企业管理现代化，还要经历漫长道路的探索。本丛书在介绍西方现代管理的理论和方法时，虽然注意了结合我国国情，运用马克思主义理论加以鉴别和取舍，但书中所涉及的观点和内容选材是否适当，能否满足广大读者

的要求，还有待于大家多提出批评和改进意见。

城乡建设环境保护部干部局
中 国 建 筑 工 业 出 版 社
1986年6月

目 录

一、线性规划的数学模型

线性规划(Linear Programming)是运筹学(Operations Research)一个最重要的分支。许多人认为线性规划是20世纪中期最重要的科学进展之一。美国国际商用机器公司1970年在关于计算机用途的研究报告中指出，在计算机上进行的科学计算中，估计有25%用到了线性规划及其有关的方法。

线性规划问题的实际背景可以归结为资源分配问题，即人们如何把有限的资源有效地分配到既定的活动上去，以取得最大成果（如利润最大或成本最小等）。资源一般指劳动力、物资、机器和资金等。在建筑管理中，也涉及大量资源的分配问题。因而，对于从事建筑业的管理人员和技术人员来说，掌握线性规划这一现代化管理的工具和方法，无疑是非常必要的。

应用线性规划解决实际问题时，首先是要根据问题所给的条件和要求，用数学表达式建立相应的数学模型，然后用一定的方法求解。本节通过几个简单的例子说明建立线性规划模型的方法，进而引出线性规划的数学定义。

（一） 建立线性规划数学模型举例

【例1】 某混凝土预制品厂有一条流水线，它生产A和B两种规格的预制板。预制板在成型机上生产后送入蒸汽养护池中养护，然后出池堆放。流水线只白天一班生产，包括养护时间在内，生产周期为一天（24小时）。已知最大班产

量、每立方米预制板占用蒸汽养护池的面积（平方米）和每立方米预制板的利润如表1-1所示。养护池能给A和B两种规格预制板堆放的面积为24平方米。问每班生产多少立方米的A、B预制板才能使每天的利润达到最大？

表1-1

项目 \ 预制板	A	B
最大产量（m^3/班）	6	4
占用面积（m^2/m^3）	2	4
利　润（元/m^3）	60	40

这个例子是一个生产计划安排问题。建立数学模型时，首先要定义问题中待决策的变量——决策变量的意义。根据本例的情况，决策变量应为每班生产A、B预制板的立方米数，并分别记为x_1和x_2。

其次把问题所要达到的目标表示成决策变量的函数，这个函数称为目标函数。本例的目标函数是每天的利润，其值记为z，它的表达式是：

$$z = 60x_1 + 40x_2$$

目的是要使每天的利润达最大，也就是要使目标函数达最大，并简记成（“最大”用英文缩写“max”表示）如下形式：

$$\max z = 60x_1 + 40x_2$$

最后根据问题的要求和各种限制条件，列出问题的各个约束条件。

对于本例，由于决策变量x_1和x_2分别表示每班生产A、B预制板的立方米数，它们不能超过最大的班产量，因此有约束条件：

$$x_1 \leqslant 6$$
$$x_2 \leqslant 4$$

养护池能给 A、B 预制板堆放的面积只有24平方米，这表示有约束条件：

$$2x_1 + 4x_2 \leqslant 24$$

上述三个约束条件都是决策变量 x_1 和 x_2 的函数表达式，称为函数约束条件。此外，根据决策变量 x_1 和 x_2 的实际意义，显然它们不可能为负数，因此还有另一类约束条件——非负约束条件，即：

$$x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0$$

为清楚起见，把本例的数学模型完整地重列如下：

$$\max z = 60x_1 + 40x_2$$

约束于

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &\leqslant 6 \\ x_2 &\leqslant 4 \\ 2x_1 + 4x_2 &\leqslant 24 \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

由于在目标函数和函数约束条件中的决策变量 x_1 和 x_2 都是一次方（线性的），这个数学模型称为线性规划模型，或称线性规划问题。

【例2】 某建筑工地正进入浇捣设备基础的混凝土阶段，需要24小时连续施工。混凝土由搅拌站集中搅拌，用混凝土运输车运到现场。为了合理地调配运送混凝土的汽车，工地领导决定把24小时分为 6 个时间段，每个时间段为 4 小时。根据施工进度和混凝土需要量的测算，每个时间段至少需要的汽车数如表 1 - 2 所示。每辆汽车在时间段开始时上班，连续工作 8 小时，问如何安排上班的汽车，既满足需要又使

一天（24小时）上班的汽车总数最少？

表1-2

时间段起止时间	汽车至少需要量
2～6	4
6～10	8
10～14	10
14～18	7
18～22	12
22～2	4

这个例子是一个生产调度问题。建立这个问题的数学模型时，首先确定决策变量的意义。设表1-2所列各时间段依次称为第1时间段、第2时间段、……、第6时间段；时间段开始时上班的汽车数依次为x_1、x_2、……、x_6。因此，一天（24小时）上班的汽车总数为$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_6$，即目标函数为：

$$z=x_1+x_2+\cdots\cdots+x_6$$

目的要使目标函数值最小（“最小”用英文缩写“min”表示）。

其次根据各个时间段汽车至少需要量列出相应的约束条件。对于第1时间段，运行的汽车包括在第1、6时间段开始时上班的汽车，其数为x_1+x_6，它至少需4辆。这样就得约束条件：

$$x_1+x_6\geqslant 4$$

对于第2时间段，运行的汽车包括在第1、2时间段开始时上班的汽车，于是有约束条件：

$$x_1+x_2\geqslant 8$$

对于其余时间段的约束条件可类似地得到。各时间段汽车运

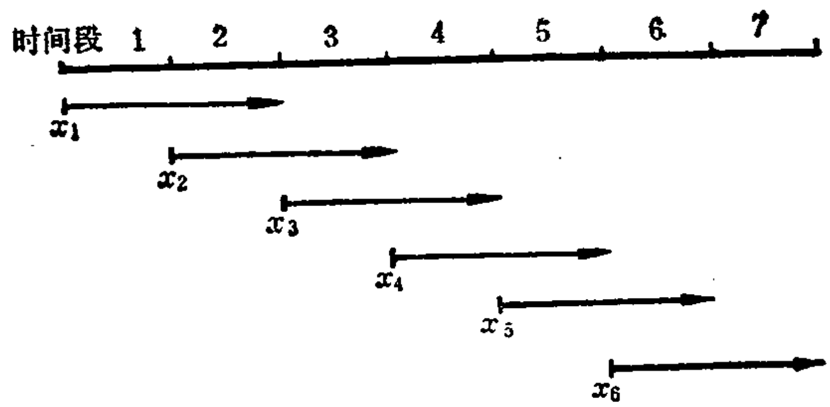

图 1-1

行情况见图1-1。

再考虑决策变量的非负条件，即可把此问题的线性规划模型完整地表达如下：

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

约束于

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + x_6 &\geqslant 4 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad &\geqslant 8 \\
x_2 + x_3 \qquad\qquad &\geqslant 10 \\
x_3 + x_4 \qquad &\geqslant 7 \\
x_4 + x_5 &\geqslant 12 \\
x_5 + x_6 &\geqslant 4
\end{aligned}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots\cdots, 6$$

【例3】 某材料供应站有 3 个仓库，它们给 4 个工地供应一种建筑材料。3 个仓库的供应量各为35、50和40吨，4 个工地的需求量各为45、20、30和30吨。各仓库与 4 个工地之间的距离（单位：公里）列于表1-3内。问材料供应站应采取怎样的运输方案才能使总的运输量最小？

表1-3

仓库＼工地	1	2	3	4	供应量
1	8	6	10	9	35
2	9	12	13	7	50
3	14	9	16	5	40
需求量	45	20	30	30	总量＝125

这个例子是一个运输问题，寻求使总运输量最小的最优运输方案，实际是要确定3个仓库各运输多少吨材料给4个工地最经济。

这个运输问题的决策变量定义如下：设仓库1供应工地1的材料量为x_{11}吨，供应工地2的材料量为x_{12}吨，依次类推，具体见表1-4所示。

表1-4

仓库＼工地	1	2	3	4	供应量
1	8 x_{11}	6 x_{12}	10 x_{13}	9 x_{14}	35
2	9 x_{21}	12 x_{22}	13 x_{23}	7 x_{24}	50
3	14 x_{31}	9 x_{32}	16 x_{33}	5 x_{34}	40
需求量	45	20	30	30	125

问题要达到的目标是运输量（吨公里）最小，也就是要使目标函数达到最小，即：

$$\min z = 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} + 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} + 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34}$$

由于每一仓库供应4个工地的总量应等于该仓库的供应量，所以有约束条件：

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 35$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 50$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 40$$

这实际上把表1-4中的每一行的未知数累加起来等于相应行的供应量。

类似地，每一工地由3个仓库得到的材料总量应等于该工地的需求量，即表1-4中每一列未知数之和应等于该列的需求量，于是有约束条件：

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 45$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30$$

此外，各仓库运往4个工地的材料数量不可能是负数，即有非负的约束条件：

$$x_{ij} \geqslant 0\ (i = 1,2,3;\ \ j = 1,2,3,4)$$

以上各式构成了这个运输问题的数学模型。

建立线性规划数学模型，是用线性规划解决实际问题的重要步骤。一般来说，建立实际问题的数学模型不是一件容易的事。要掌握建立数学模型的方法或技巧，必须有对欲解决的实际问题的深刻理解，以及多练习勤思考。通过以上三个简单例子，只是想说明建立线性规划数学模型的一般步骤

（即根据问题性质、条件和要求等，确定决策变量、目标函数和约束条件），并使读者初步了解线性规划在实际中的应用。

（二） 线性规划的数学定义

由上述三个例子可以看到，一个线性规划可以是求目标函数达最大（max）或最小（min），约束条件可以是“≤”或“=”或“≥”类型，而决策变量可以是非负（有时可以不受正负号限制）。因此，线性规划的一般数学定义通常表述为如下形式：

$$\max/\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

约束于

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n \leqslant (\text{或} = \text{或} \geqslant) b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n \leqslant (\text{或} = \text{或} \geqslant) b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n \leqslant (\text{或} = \text{或} \geqslant) b_m$$

$$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n \geqslant 0$$

<m, n 为正整数

以上形式还可简记成如下形式：

$$\max/\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

约束于

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (\text{或} = \text{或} \geqslant) b_i$$

$$x_j \geqslant 0$$

$$j = 1, 2, \cdots\cdots, n; \quad i = 1, 2, \cdots\cdots m$$

在线性规划一般定义中，目标函数是求最大值，约束条件是“$\leqslant$”型，决策变量有非负要求，线性规划模型变为：

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_nx_n$$

约束于

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\
&x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n \geqslant 0
\end{aligned}$$

这个形式称为线性规划的典则形式（例 1 的模型就属这种形式）。它在线性规划的理论和计算中有特殊的意义。

一般说来，求解线性方程组比求解线性不等式组要容易得多，因此在求解线性规划模型时，通常总是把不是等式的函数约束条件用适当的方法化为等式。如果在模型中函数约束条件都为等式(如例 3 那样)，即数学模型具有如下形式：

$$\max/\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_nx_n$$

约束于

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_n \\
&x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n \geqslant 0
\end{aligned}$$

则称这个形式为线性规划的标准形式，其中 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为非负的常数。

在应用下文将要介绍的线性规划求解方法——单纯形法

时，首先要求把各种类型的线性规划模型化为上述的标准形式。化标准形式的方法举例如下：

对于不等式约束条件可以通过在不等式左边增添（加或减）一个非负变量而化为等式，这些新的变量称为松弛变量。例如对于例1的三个约束条件，分别在不等式左边加上一个非负的松弛变量 s_1，s_2 和 s_3 后，模型就变为如下的标准形式：

$$\max z = 60x_1 + 40x_2$$

约束于

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad + s_1 \quad\quad\quad &= 6 \\ x_2 \quad\quad + s_2 \quad &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 \quad\quad\quad + s_3 &= 24 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

对于例2的六个约束条件，分别在不等式左边减去一个非负的松弛变量后也能化为等式，如对第一个函数约束条件有：

$$x_1 + x_6 - s_1 = 4$$

如果函数约束条件的右边常数 b_i 是负的，那么就用（-1）去乘不等式的两边，然后增添松弛变量化为等式。例如在某一模型中有约束条件：

$$2x_1 + 5x_2 \geqslant -7$$

不等式两边乘（-1）后得

$$-2x_1 - 5x_2 \leqslant 7$$

这个不等式加上松弛变量 $s_1 \geqslant 0$ 后就化为等式：

$$-2x_1 - 5x_2 + s_1 = 7$$

如果模型中出现没有正负号限制的决策变量（这种变量称为自由变量），则可用两个非负的变量之差来代替。例如决策变量 x_1 没有非负要求，则可引入两个非负变量 u_1 和 v_1，