中学数学手册

李忠映
张　森
编

下集

云南人民出版社

中学数学手册

下 册

李忠映　张　森　编

云南人民出版社

责任编辑：何学惠
封面设计：俸贵德

中学数学手册

（上、下册）

李忠映　张　森　编

*

云南人民出版社出版
（昆明市书林街100号）
云南新华印刷二厂印刷　云南省新华书店发行

*

开本：787×1092 1/32　印张：15.125　字数：320,000
1980年3月第一版　1980年3月第一次印刷
印数：1—250,000
统一书号：7116·704　　定价：1·25元

下 册 目 录

第十三章　微积分初步

一　函数与极限

1.常量与变量　在某些条件下，保持同一确定数值的量叫做常量，能取不同数值的量叫变量.

例如圆周长与圆的直径的比以π表示，它的近似值为3.1416；一切三角形的内角和都是180°等等，都是常量. 至于变量就更不胜枚举了. 如大气的压力，空气的温度，火车的速度等等都是变量.

有时候一个量在某一条件下可以看作是常量，在另外的条件下又可看作是变量. 如在地球表面上同一点的重力加速度是常量，但在地球表面的不同点来测量，则是随地点的纬度而变化的变量.

2.函数

（1）**函数的定义**　如果对于变量x的每一个可能取的值，变量y都有一个确定的值与它对应，那么变量y就叫做变量x的函数. 变量x叫做自变量，而y叫做函数或因变量. 记为：

$$y=f(x),\quad y=F(x),\quad y=\varphi(x)\text{等等}.$$

如　$f(x)=x^2+\sqrt{3x+10}$，

当$x=a$　及$x=2$时，函数值为：

$$f(a)=a^2+\sqrt{3a+10};$$

$$f(2)=2^2+\sqrt{3\cdot 2+10}=8.$$

（2）**函数的定义域** 对于某一个函数y来说，自变量x必须有某些指定的可能的值才使它有意义．这一指定的可能的值的全体叫做函数y的定义域．

函数定义域以区间表示，满足不等式

$$a<x<b$$

的所有x的值叫做开区间，以记号（a，b）表示．满足不等式

$$a\leqslant x\leqslant b$$

的所有x的值叫做闭区间，以记号$[a,b]$表示．不论开区间或闭区间，a叫做区间的左端点，b叫做右端点．开区间不包含它的端点，闭区间包含它的两个端点．

若自变量x取值范围是任意实数，则x满足不等式

$$-\infty<x<+\infty,$$

或者说，它取区间（$-\infty$，$+\infty$）的值．

例 $y=x^2$的定义域是区间（$-\infty$，$+\infty$）．

$y=arcsinx$的定义域是闭区间$[-1,1]$．

$y=\sqrt{x^2-1}$的定义域是$(-\infty,-1]$和$[1,+\infty)$．

（3）**函数的几种特性**

1°函数的单值性与多值性 若自变量x取定义域内一定值时，函数只有一个确定的值与之对应，这种函数叫做单值函数，否则就是多值函数．

例如 $y=x^3$，$y=sinx$，$y=log_a x$

是单值函数，而在$y^2=x$中，y是x的多值（双值）函数．

2°函数的奇偶性 在函数$y=f(x)$中，当x改变符号时，函数值也改变符号，即$f(-x)=-f(x)$，$f(x)$叫做奇函

数；若x改变符号时，函数值不变，即$f(-x)=f(x)$，$f(x)$叫做偶函数.

偶函数的图形对称于y轴．因为$f(-x)=f(x)$，所以若$A[x,f(x)]$是图形上的点，则和它对称的点$A'[-x,f(x)]$也在图形上（图167）.

奇函数的图形对称于原点，因为$f(-x)=-f(x)$，所以若$A(x,f(x))$在图形上，则点$A''(-x,-f(x))$也在图形上（图168）.

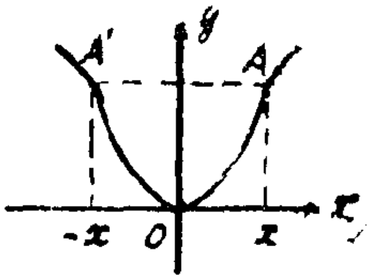

图 167

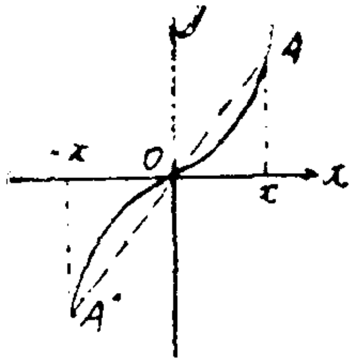

图 168

例 函数$y=\cos x$及$y=x^2$都是偶函数.

函数$y=\sin x$及$y=x^3$都是奇函数.

函数$y=\sin x+\cos x$既非奇函数也非偶函数.

注：本章中三角函数的自变量以弧度为单位.

3° 函数的单调增减性　若函数$y=f(x)$在区间内随x的增加而增加，即设x_1，x_2是区间(a,b)内任意两点，而$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数在区间(a,b)内为单调增加．若$x_1<x_2$时，有$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数在区间(a,b)内为单调减少，单调增加或单调减少的函数统称单调函数.

例 1　函数$y=x^2$在区间$[0,+\infty)$上是单调增加而在区

间（$-\infty$, 0］上则是单调减少的．$y=x^2$在区间$(-\infty, +\infty)$上不是单调函数（图169）.

例 2　函数$y=x^3$在区间$(-\infty, +\infty)$上是单调增加函数（图170）.

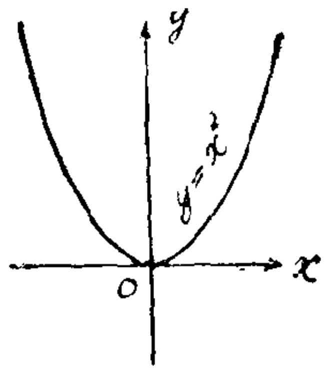

图　169

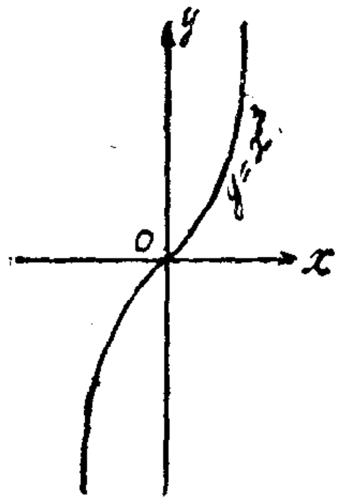

图　170

（4）反函数概念

在函数　$y=f(x)$中，　　　　　　　　（1）

将y当作自变量，x当作函数，则由（1）所确定的函数

$$x=\varphi(y) \qquad (2)$$

叫做函数$f(x)$的反函数，$f(x)$叫做原函数．在（2）中y是自变量，而x是函数．但通常把x当作自变量，y当作函数，因此在（2）中将x改为y，而y改为x，则得（1）的反函数为

$$y=\varphi(x). \qquad (3)$$

例　设原函数为（相当于（1））

$$y=ax+b, \qquad y=x^n.$$

则其反函数为（相当于(2)）

$$x=\frac{y-b}{a}, \qquad x=\sqrt[n]{y},$$

于是，其反函数为（相当于(3)）

$$y=\frac{x-b}{a}, \qquad y=\sqrt[n]{x}.$$

反函数$y=\varphi(x)$的图形与原函数$y=f(x)$的图形对称于直线$y=x$.

函数$y=ax+b$及其反函数$y=\dfrac{x-b}{a}$的图形如图171.

$y=x^3$及其反函数$y=\sqrt[3]{x}$的图形如图172.

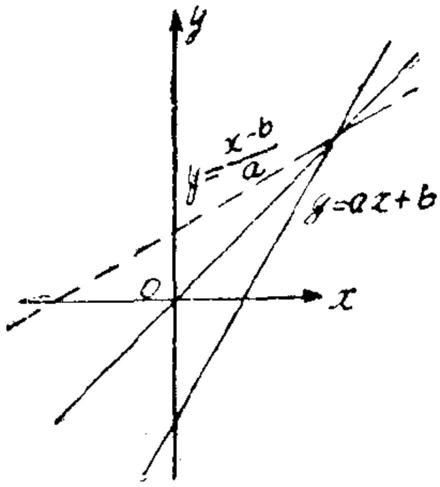

图 171

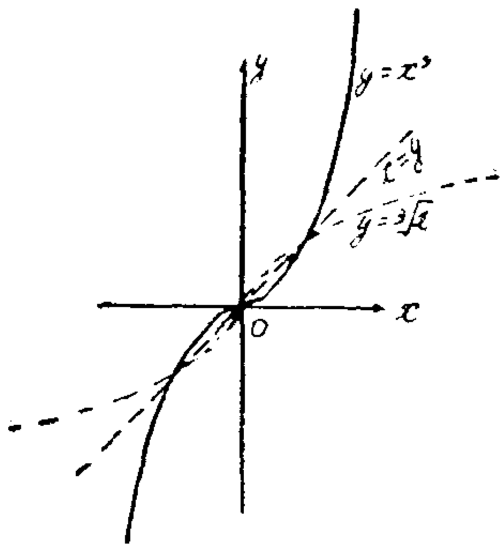

图 172

（5）基本函数的图形

1° 幂函数　　$y=x^n$（n为实数）

图169、图170分别是$y=x^2$，$y=x^3$的图形.

2° 指数函数$y=a^x$（$a\neq 1$且为正数）.

图173表$y=2^x$和$y=2^{-x}$的图形.

3° 对数函数,图174表示$y=\log_2 x$和$y=\log_{\frac{1}{2}} x$的图形.

4° 三角函数和反三角函数的图形参看第十章三角函数.

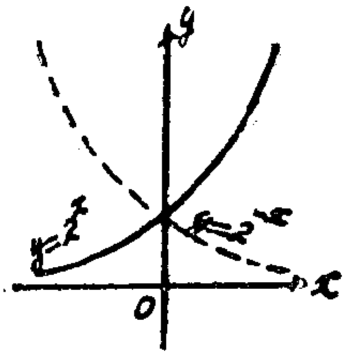

图 173

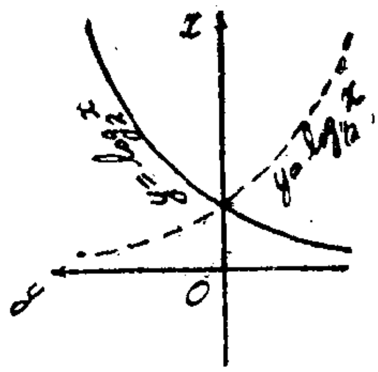

图 174

3.数列的极限和函数的极限

（1）数列的极限

定义 给了一个数列$\{y_n\}$：

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,$$

如果当n无限增大时，y_n趋近于某一个定数A，就说数列$\{y_n\}$当$n\to\infty$时（"$\to$"读成"趋于"），以A为极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \quad 或 y_n\to A\ (n\to\infty).$$

换句话说，当n充分大时，$|y_n - A|$可以任意小。

例如，数列$\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right\}$，即

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\cdots,(-1)^{n+1}\frac{1}{n},\cdots \quad (1)$$

当$n\to\infty$时，以0为极限，因为当n无限增大时，

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0\right| = \frac{1}{n}$$

可以任意小.

比如说，要想

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0\right| = \frac{1}{n} < 0.1,$$

只须 $n>\frac{1}{0.1}=10$；要想

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<0.01,$$

只须 $n>\frac{1}{0.01}=100$.

例1 数列趋于极限值的方式是多种多样的. 如当$n\to\infty$时，数列

$$0.3, 0.33, 0.333, \cdots, 0.\overbrace{33\cdots3}^{n\text{个}}, \cdots$$

$$0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \cdots, \frac{n+(-1)^n}{n}, \cdots$$

都有极限，极限分别是$\frac{1}{3}$，1.

例2 并不是任何数列都有极限，例如数列

$$1, -1, 1, -1, \cdots$$

当n增大时，它交错地取两个值，一个是1，一个是-1，它既不趋于1又不趋于-1，即不趋近于一个定数，因此没有极限.

数列 $1, 4, 9, 16, \cdots, n^2, \cdots$

随n增大，y_n不断增大，不和任何一个定数接近，也说没有极限.

（2）函数的极限

定义1 设函数$f(x)$在x_0附近有定义（但在x_0可以没有定义）. 如果当$x\to x_0$（但始终不等于x_0）时，$f(x)$趋近于定数A，就说函数$f(x)$当$x\to x_0$时以A为极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 f(x)\to A \quad (x\to x_0).$$

如果当 x 从x_0的右侧(即大于x_0)趋近于x_0时，$f(x)$趋近于定数A，就说函数$f(x)$以A为右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A, \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to x_0+0).$$

类似地可定义左极限，

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A, \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to x_0-0).$$

定义2 如果当$|x|$无限增大时，$f(x)$趋近于定数A,就说函数$f(x)$当$x\to\infty$时以A为极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to\infty).$$

此定义中若所考虑的x值是正的,记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A,$$

若所考虑的x值是负的， 记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A.$$

例1 函数$f(x)=1+x^2$,当x自任何一方趋近于0时，$f(x)$的对应值都趋近于1.

例2 因为$|(2x+1)-5|=2|x-2|$，所以当$x\to 2$时，$2x+1$以5为极限，即

$$\lim_{x\to 2}(2x+1)=5.$$

在这里，函数$f(x)=2x+1$在点$x=2$处有定义，并且当$x\to 2$时，$f(x)$的极限恰好是$f(x)$在$x=2$的值：

$$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2).$$

例 3 函数$f(x)=x\cdot \sin\frac{1}{x}$在点$x=0$没有定义，但极限

$\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot \sin\frac{1}{x})$ 存在.

$\because \quad \left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1, \qquad \therefore \quad \left|x\cdot \sin\frac{1}{x}\right|\leqslant |x|.$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\left(x\cdot \sin\frac{1}{x}\right)=0.$$

例 4 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2.$

这里，函数在$x=1$时没有定义.但

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1,$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

（3）无穷小与无穷大、阶的比较

1° **无穷小量的概念** 若函数$f(x)$当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时极限为零，这时函数$f(x)$叫做当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的无穷小量，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，（或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$）.

若函数$f(x)$以定数A为极限，即$f(x)-A$以0为极限.可见函数$f(x)$以定数A为极限与$f(x)-A$为无穷小是一回事，记作$\alpha=f(x)-A$

则 $f(x)=A+\alpha$ （α为无穷小量）.

无穷小量并不是一个很小很小的常数，而是一个趋近于0的变量.

2° **无穷小量的简单性质**

有界变量　设y是一个变量，假如在它的变化过程中所取得的值都小于一个正数M，即

$$|y|<M,$$

y就叫做有界变量.

有限个无穷小量的代数和也是无穷小量.

有界变量和无穷小量的乘积还是无穷小量.

3° **无穷大量的概念**　若函数$f(x)$当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时，$f(x)$的绝对值可以大于预先指定的任何很大的正数M，这时函数$f(x)$叫做当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的无穷大量，

记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \quad (\text{或} \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty).$$

注意：无穷大量也是一个变量．切不能把很大的数与无穷大量混为一谈．“无穷大”三个字是描述变量的变化状态的．

例 1　　$y=\dfrac{1}{x-2}$，

当x趋近于2时（当$x=2$时，变量y没有意义），y的绝对值可以大于任何一个正数．因此当$x\to 2$时，$\dfrac{1}{x-2}$是无穷大量.

例 2　$y=x^2+1$，　当x无限增大时，y的绝对值可以

大过任何一个正数．因此$y=x^2+1$，当x无限增大时是一个无穷大量．

4° 无穷大量与无穷小量之间的关系

如果$f(x)$是无穷大量，那么$\frac{1}{f(x)}$是无穷小量．

如果$f(x)$是无穷小量，且$f(x)\neq 0$，那么$\frac{1}{f(x)}$是无穷大量．

5° 无穷小量的阶 若α，β是两个无穷小量，那么

当$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$时，就说$\beta$是比$\alpha$较高阶的无穷小量；

当$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$时，就说$\beta$是比$\alpha$较低阶的无穷小量；

当$\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$时，就说$\beta$是与$\alpha$同阶的无穷小量；

当$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$时，就说$\alpha$，$\beta$是等价的，记作$\alpha\sim\beta$；

当$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0$时，$k>0$，就说$\beta$是关于$\alpha$的$k$阶无穷小量．

例如：因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{x}=0$，所以当$x\to 0$时$3x^2$是比$x$较高阶的无穷小量．

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\infty$，所以当$n\to\infty$时$\frac{1}{n}$是比$\frac{1}{n^2}$较低阶的无

穷小量。

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$，所以当$x\to 3$时$x-3$与x^2-9是同阶无穷小量.

4.极限存在法则

（1）若$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$　$(n=1,2,3,\cdots)$，且

$$\lim_{n\to\infty}y_n=a,\qquad \lim_{n\to\infty}z_n=a,$$

则数列x_n的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

（2）对于点x_0的某一邻域内的一切x（点x_0本身可以除外），或绝对值大于某一正数的一切x有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$$

成立，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A$，　$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$，

则　$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$存在，且等于$A$.

5.极限的基本定理

（1）　$\lim C=C$，　（C为常数）.

（2）　有限个函数代数和的极限等于各函数的极限的代数和.

$$\lim[f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)]=\lim f_1(x)+\lim f_2(x)+\lim f_3(x).$$

（3）有限个函数乘积的极限等于各函数极限的乘积.

$$\lim[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)]=\lim f_1(x)\cdot\lim f_2(x)\cdot\lim f_3(x).$$

（4）常数因子可以提到极限符号外，

$$\lim C\cdot f(x)=C\cdot\lim f(x).$$

（5）$\lim(x^m)=(\lim x)^m$；$\lim\sqrt[m]{x}=\sqrt[m]{\lim x}$.

（6）两个函数商的极限等于极限的商，若分母的极限不等于0，

$$\lim\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)}，若\lim f_2(x)\neq 0.$$

6.几个重要极限

（1） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$，

或 $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$； $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$.

e是一个无理数，其值为$e\approx 2.71828$.

（2） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

证明，设圆O半径为1，圆心角$x=\angle DOA=\angle BOD$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$，点$A$和$B$是切点（图175），则$\sin x=|AC|$，

$x=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$，　$tgx=|AD|$.

$\because$　$|AB|<\overset{\frown}{AB}<|AD|+|BD|$，

$\therefore$　$2\sin x<2x<2tgx$，除以$2\sin x$，

有

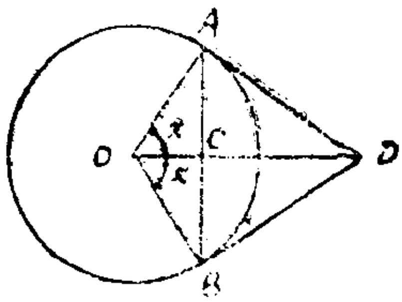

图 175