现代物理学丛书

数学物理中的

同调论

王继春 著

科学出版社

内 容 简 介

本书系统介绍：1.在 De Rham 上同调基础上发展起来的相关同调微分式、泛同调微分式及 p 形式的分类等；2.算子同调论、微分算子同调论、非线性同调论；3.同调微分式及同调算子在物理问题中的应用.

本书深入浅出、言简意赅、涉及面广，适合理工科大学数学、物理及有关专业的高年级学生和研究生阅读，也可供有关研究人员参考.

现代物理学丛书

数学物理中的

同调论

王继春 著

责任编辑 张邦固

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1991年3月第一版 开本：850×1168 1/32

1991年3月第一次印刷 印张：5 1/8

印数：0001—1 800 字数：131 000

ISBN 7-03-002201-7/O · 414

定价：5.00 元

序　　言

本书的主要内容是根据作者多年来为大学高年级学生所开选修课和为研究生讲课的讲义以及学术会议上的报告、学术刊物上的论文整理而成的．听者的热情和专家们的鼓励促使作者去完成这个很有意义的工作．

为了阅读的方便，本书首先简明扼要地讲述了集合论和拓扑学(限于连续拓扑)中的主要概念；然后重点讨论了可微分流形上的(外)微分式，De Rham 上同调和拓广的 De Rham 同调论，相关同调论和泛同调论；并以同调论为框架模式，构造出物理学中线性模型系统的运动方程．特别是，本书分析了如下的逻辑进程：

群→同调群→同调矩阵表示→矩阵同调→算子(矩阵)同调；

平直空间是弯曲空间的极限→ d 是 D 的极限→ d 和 D 之间有确定的关系；

1 微分式(余切向量)→切向量→线性微分算子；→

微分式同调论；→ 微分算子同调论

在这基础上，作者提出了算子同调论．从而，把同调论推广到算子领域．由于 D 是非线性微分算子，所以算子同调实质上就是非线性同调．从此，同调论由线性领域推广到非线性领域．进而，用同调型微分算子构造出一类可以和杨-Mills 方程作对比分析的非线性运动方程．它扎根于有重要意义的、为众多学者所关注的算子代数和杨-Mills 方程相交叉的领域． 这一工作引起了国内外许多学者的注意．

本书深入浅出、言简意赅、涉及面广，适合理工科的数学专业、物理类专业及相近专业的高年级学生和研究生阅读，也可供从事有关科学技术和理论研究的工作者参考．

线性同调论应用于物理学的浪潮方兴未艾，非线性同调论尚在起步阶段，这都是困难而有意义的工作． 愿这本书能起到抛砖

引玉的作用。

本书可能有不少缺点和错误，祈请读者批评指正。

作　者

1989 年 12 月

目　　录

第一章　集合与拓扑……………………………………… 1

1.1　集合论基本概念要点和符号的含义 ……………… 1

1.2　邻域　连续与拓扑 ………………………………… 3

1.3　邻域与开集　开集与拓扑　闭集 ………………… 6

1.4　紧致性 ……………………………………………… 9

1.5　乘积空间及其性质 ………………………………… 12

第二章　微分流形………………………………………… 15

2.1　平面与球面　局部坐标系 ………………………… 15

2.2　微分流形的定义 …………………………………… 19

2.3　微分流形的例子 …………………………………… 21

2.4　微分流形的性质 …………………………………… 25

2.5　可微分映射及其性质 ……………………………… 27

2.6　向量场　流形上的切向量和切空间 ……………… 32

2.7　映射的微分 ………………………………………… 36

2.8　Riemann 流形 ……………………………………… 43

第三章　流形上的微分式………………………………… 49

3.1　向量空间及其对偶空间 …………………………… 49

3.2　Grassmann 代数 …………………………………… 52

3.3　流形上的微分式 …………………………………… 57

3.4　微分式的外微分及余微分运算及其性质 ………… 65

3.5　微分式与矢量场的内积 …………………………… 70

3.6　微分式的 Lie 导数 ………………………………… 73

3.7　Poincare 引理及其逆　微分式的可积性 ………… 77

3.8　微分式和 Stokes 公式间的内在联系……………… 80

第四章 同调论 ········ 85
4.1 一维同调群 ········ 85
4.2 p维同调群 ········ 90
4.3 De Rham 上同调 ········ 93
4.4 De Rham 定理 ········ 100
4.5 Hodge 定理 ········ 103
第五章 同调论的扩展及其应用 ········ 113
5.1 扩大的 De Rham 上同调 相关同调 泛同调 ··· 113
5.2 非线性同调论微分算子同调论 ········ 119
5.3 同调论在数学物理中的应用 ········ 124
5.4 外微分式与▽算子 ········ 151
参考文献 ········ 156

第一章　集合与拓扑

1.1　集合论基本概念要点和符号的含义

本书中我们将用到集合论中的一些常用概念和符号．现先将它们介绍如下．

集合——系指一组确定的、彼此相异的对象的全体．常用大写的X表示一个集合．

元素——集合X中的一个成员．用小写x表示．于是，$x \in X$表示x是X的一个元素．

子集合——若B与X都是集合，且$B \subset X$（读作：B包含于X中），则B的每个元素都是X的一个元素．从而称B是X的一个子集合．

点集合——若我们讨论的对象或是直线、或是平面、或是三维及高维空间的子集（记为$X \subset R^n$或$X \subset C^n$，R表示实空间，C表示复空间，n表示空间维数），则常把X的元素叫做点，并称X为点集合．

交集——若$A \subset X$，$B \subset X$，且A与B有公共元素，则公共元素的全体称为A与B的交集．记为$A \cap B$．

并集——用$A \cup B$标记．它由A的元素和B的元素的全体构成．

空集——不含任何元素的集合．用$\varnothing$表示．例如集合

$$\{x \mid x \in R,\ x^2 + 1 = 0\} = \varnothing,$$

因为$x^2 + 1 = 0$无实数解．（$\{\cdots \mid \cdots\}$总用来表示一个集合，竖线左边写集合的元素，右边写元素应满足的条件．）值得注意

$$\{x \mid x^2 = 0\} = \{0\} \neq \varnothing,$$

因为它由一个元素0组成．“$\varnothing$”是任何集合的子集．若

$$A \cap B = \varnothing,$$

则称 A 与 B 没有公共元素.

补集——若 $B\subset X$，则 $X-B$ 表示在 X 中但不在 B 中的点的全体. B 与 $X-B$ 互为补集.

映射——又称为函数，它由三个要素组成：一个集合 X，一个集合 Y，一个规则 f，对于 X 中的每一个元素，f 指定 Y 中的一个元素与之对应，记为 $f: X\to Y$. 简言之，f 是从 X 到 Y 的一个映射(函数). X 称为 f 的定义域，Y 称作 f 的值域. 或者称对于定义域中的每一个 x，存在值域中的一个 y 与之对应，记为

$$y=f(x),\ \forall x\in X,\ \exists y\in Y.$$

当 $Y=f(X)$ 时，即对于所有的 x，全体 $f(x)$ 正好是 Y 时，则称 f 是从 X 到 Y **上** (onto) 的一个映射(函数)，亦称是从 X 到 Y 的一个**满映射**(满函数). 还称，点 $y=f(x)$ 是 x 的象，点 x 是象 y 的源. 对应地称，f 使源集合 X 有一象集合 Y 与之对应，记为

$$Y=f(X)=\{f(x)\,|\,\forall x\in X\}.$$

我们限定，给定一点 x，恰好只有一个象点 $y=f(x)\in Y$，这时，称 f 为单值函数(映射). 值得指出，给定一 $y\in Y$，并未要求一定存在一点 $x\in X$ 或只有一点 $x\in X$，这意味着，象位可以空着，或多个源对应一个象. 比如，大人抱着小孩坐一个位置是可以的，但是，即使有空位，一个人也不能占多于一个的位置. 这归因于我们只限于讨论单值函数. 若既是单源、单值的，又是满的映射，则称 f 是从 X 到 Y 的**一对一映射**. 一对一映射又称为**同构映射**，多对一映射称为**同态**.

逆映射——若 $f: X\to Y$ 是一对一的(包括 1—1 内或者 1—1 满)，并且，对于每一点 $y\in Y$，只有一点 $x\in X$ 使 $f(x)=y$ 成立. 则可定义从 Y 到 X 的映射，称为 f 的逆映射，记为

$$f^{-1}: Y\to X.$$

径向投影——投影是一种重要的映射. 现讨论径向投影

$$f: R^3|_0\to S^2$$

($|_0$表示删去 O 点)，此处的 S^2 是 R^3 中的以 O 为球心的一个球面. f 使 R^3 中的通过 O 点的任一直线 L 映为 S^2 上的一个点，不通过

O 点的任一直线 L 映为 S^2 上的一段圆弧.

若是有 $f: X \to Y$ 与 $A \subset X$, 则 $f(A)$ 是 Y 的子集,即

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A \subset X\} \subset Y.$$

若是有 $f: X \to Y$ 与 $B \subset Y$, 则对应于 $y = f(x) \in B$ 的那些点 x 形成 X 的一个子集 $\{x \mid f(x) \in B \subset Y\} \subset X$, 该子集称为在 f 下的 B 的反象,记为 $f^{-1}(B)$.

复合映射——若有两个具有传递性的映射. $f: X \to Y$ 与 $g: Y \to Z$, 则可复合成一个新映射 $gf: X \to Z$, 即 $\forall x \in X$, gf 指定 Z 中的一个元素 $z = g(f(x))$ 与之对应. (参见图 1-1)

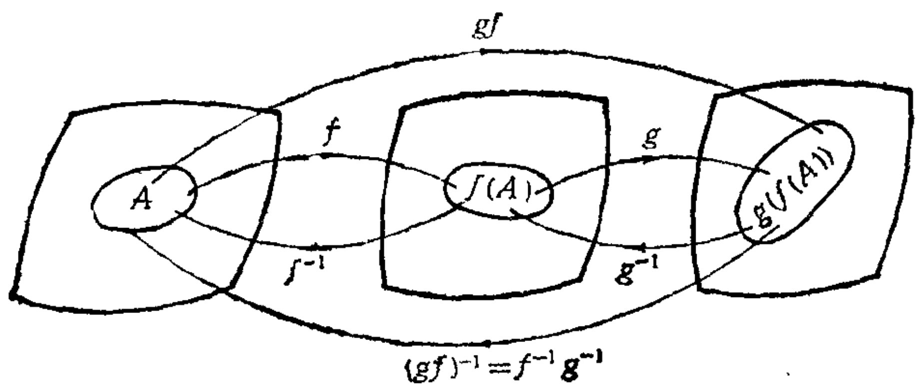

图 1-1

复合逆映射——是复合映射 gf 的逆 $(gf)^{-1}$. 由图 1-1 可见, $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$ 成立(若 f^{-1}, g^{-1} 分别存在).

恒等映射——若 $\forall x \in X$ 有映射 $f: X \to X$ 都使得 $f(x) = x$, 则称该 f 为恒等映射.

1.2 邻域 连续与拓扑

在这一节,我们将讨论一些较为抽象的概念. 我们先从邻域与连续的概念说起,然后,以邻域作"砖瓦"来构造抽象的拓扑空间(限连续拓扑). 并使得空间的定义满足如下两个要求:

(1) 内含足够丰富,能荷载足够多的信息,可将多种不同的对象包括进来作为空间;

(2) 使得两个空间之间的映射 (限连续映射) 的连续性可定义.

在拓扑(限连续拓扑)学(随后将定义拓扑)中，特别注意连续映射(连续函数)，或简称映射. 连续的确切定义要用到邻域概念.

邻域——令 $X\subset E^n$(E^n 表示 n 维欧几里得空间)，$x\in X$，r 为一正实数，则 X 中与 x 相距小于 r 的（不含等于 r 的边界上的点)所有点的集合称为 X 中点 x 的以 r 为半径的邻域，用 $N(x, r, X)$表示。当 X 明确无误时，简记为 $N(x, r)$. 邻域概念是“开区间”概念的推广.

为了易于理解拓扑学中关于连续的定义，我们先来回顾一下微积分学中关于连续的定义，设有函数 $y=f(x)$，若对于任意一 $\varepsilon>0$，总可找到(存在)一个 $\delta>0$，使得当 $|x'-x|<\delta$ 时，有 $|f(x')-f(x)|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 x 处连续. 用邻域的语言说就是，对于每一个 $\varepsilon>0$，总存在一个 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得 x 的 δ 邻域的 f 象包含在象 $f(x)=y$ 的 ε 邻域之中，即

$$f(N(x, \delta, X))\subset N(f(x), \varepsilon, Y),$$

则称 f 在 x 处连续. 于是我们有

连续——设有 $f: X\subset E^m\to Y\subset E^n$ 及 $x\in X$. 若对 $f(x)=y$ 在 Y 中的每一个 ε 邻域 $N(y=f(x), \varepsilon, Y)$，总存在 X 中的 x 的某一个 δ 邻域 $N(x, \delta, X)$，并且 $f(N(x, \delta, X))$ 包含于 $f(x)$ 的邻域之中，则称 f 在 x 处连续. 简言之，若源的邻域象包含于(该源的)象的邻域之中，则称映射 f 在源所在处连续. 若 f 在 X 中的每一点处连续，则称 f 在 X 中连续. 为正确理解此定义，我们指出，若欲证明映射在某点不连续，只需要指出，对于某一个$\varepsilon>0$，不存在 δ 即可(举一反例即可否定).若欲证明连续，则必须对每个可能选的 ε，显示出 δ 为 ε 的一个函数 $\delta(\varepsilon)$. 即对于点 x 存在一组邻域.

现在，我们来讨论拓扑空间. 空间每一点有一组邻域这件事不仅可引出连续映射的适当定义，还可引出拓扑空间的适当定义.不过，我们希望一方面保留领域概念，另一方面又要避开对距离概念的依赖. 这在于，拓扑变换虽保持点的相邻关系不变，但并不要求保持距离不变(“橡皮变形”). 当避开距离概念之后，被定义的

空间所受的限制会更少，可荷载的信息会更多.

透过对 $N\subset E^n$ 的分析，抛弃距离概念之后，邻域概念还有更本质的内容.

公理 设有一个集合 X，$\forall x\in X$，选定了以 X 的子集为成员的非空的子集组，这每个子集又正好是 x 的一个邻域，则这个非空组就是 x 点的一组邻域. 邻域满足如下四条公理：

1. x 在它自己的每个邻域里(连续性要求)；

2. x 的任意两个邻域的交集仍是 x 的一个邻域(邻域可收缩，但不能收缩成孤立点)；

3. 若有 $N(x, X)$，则 N 的内点的集合 $\mathring{N}(x, X)$ 也是 x 的邻域(即邻域可适当收缩，但收缩后仍是邻域.)

4. 若 $N(x, X)\subset U\subset X$，则 U 也是 x 的邻域(邻域可扩大).

$\forall x\in X$，配备满足上述四条公理的一组邻域，就叫做关于集合 X 给出了一个拓扑结构. 配备了拓扑结构的集合，叫做拓扑空间. 简言之，集合 X 与其每一点的邻域组一起构成拓扑空间.

现在，我们用拓扑的语言来叙述连续映射、同胚映射的定义. 设有 X 与 Y 是满足上述四条公理的拓扑空间，于是有

连续——若有 $f: X\to Y$，且 $\forall x\in X$ 以及 $y=f(x)$ 在 Y 内的任意邻域 N，有集合 $f^{-1}(N)$ 为点 x 在 X 内的邻域，则称 $f: X\to Y$ 连续. 不难明白，下述两种关系等价：

$$f(N(x, \delta, X))\subset N(f(x), \varepsilon, Y)$$

$$\Longleftrightarrow N(x, X)\subset f^{-1}(N(f(x), Y)).$$

这是帮助我们理解并记忆基本概念的重要关系式. 这个关系式说明的是，若 Y 的每个邻域的反象是 X 的一个邻域，则映射连续. 以后，我们讨论的映射都只限于连续映射.

同胚——若有 $f: X\to Y$ 连续且是一对一满的，又有 f^{-1} 存在且连续，则称这种 f 为同胚映射. 并称 X 拓扑等价于 Y，或称 X 同胚于 Y.

1.3 邻域与开集 开集与拓扑 闭集

开集概念是讨论拓扑空间的最好工具.

开集——令 $U\subset X\subset E^n$, 若 $\forall x\in U$, U 包含了X中x的某个邻域,即 $N(x,\delta,X)\subset U$, 则称子集U为X的开集. 注意, 在 $N(x,\delta,X)$ 中,虽用了δ, 但距离概念只作桥梁,并没有把它包含于开集概念之中.

定理 1.3.1 空集$\varnothing$是X的一个开集.

空集$\varnothing$本身可以是开的,也可以是闭的. (闭集定义为开集的补集. 参见后面关于闭集的定义.)

定理 1.3.2 X自身是X的一个开集.

证 根据邻域的定义, $\forall x\in X$ 和 $\forall\delta>0$ 有 $N(x,\delta,X)\subset X$, 于是,根据开集的定义, X是开集.

因为$\varnothing$与X互为对偶集,所以若$\varnothing$是开集,则X是闭集; 若X是开集,则$\varnothing$是闭集. 所以, $\varnothing$与X是既开又闭的.

定理 1.3.3 若U与V都是X的开集, 则$U\cap V$也是 X 的开集. X的有限个(无限地作交将导致孤立点)开集的交集也是X的一个开集.

证 令 $x\in U\cap V$.因为 $x\in U$ 且U是开集,故必有一个$\delta>0$, 使 $N(x,\delta,X)\subset U$; 同时, 因为 $x\in V$, 且V是开集, 故必有一 $\delta'>0$, 使 $N(x,\delta',X)\subset V$. 用δ_s表示δ, δ'中较小的一个,则有 $N(x,\delta_s,X)$ 在U与V中,故在$U\cap V$中, 所以$U\cap V$是开集. 若有k个开集, 则令 $x\in U_1\cap\cdots\cap U_k$, 于是有 $\delta_i>0(i=1,2,\cdots,k)$, 使得有 $N(x,\delta_i,X)\subset U_i$. 取$\delta_i$中最小的作$\delta_s$, 则有 $N(x,\delta_s,X)$ 在交集中.

定理 1.3.4 X的任意(有限或无限) 多个开集的并集是X的一个开集.

证 令A表示多个开集的并集 $A=\sum\limits_i\cup U_i$. 若 $x\in A$, 则A中必存在一个 U_i 包含 x. 因 U_i 是开集, 故必有一 $\delta>0$, 使

得 $N(x, \delta, X) \subset U_i$，根据并集定义有 $U_i \subset A$，故有 $N(x, \delta, X) \subset A$，根据开集定义，$A$是开集.

综上所述，开集全体包括，每一个邻域、任意有限个开集的交集、任意多个开集的并集、X自身和空集，共五大类.

在认识开集以后，我们用开集来定义拓扑空间.

定义——设有一个集合 X，以及有由X的开子集构成的一个非空子集组. 若该非空组的开子集满足以下要求：

(1) 有限多个开集的交集是开集；

(2) 任意多个开集的并集是开集；

(3) X自身与空集是开集；

则称给集合X配备了一个拓扑结构，简称配备了一个拓扑.配备了拓扑结构的集合叫做拓扑空间. 从开集的定义和用开集来定义拓扑空间可见，拓扑空间中不要求有距离的概念.

拓扑基——设集合X上有了一个拓扑，并且，这个拓扑有这样一组开集A，它们使得X的任意一个开集可以写成A中成员的并集，则开集组A叫做这个拓扑的一组拓扑基. 这概念很有用.

下面，我们简要地介绍一下闭集.

定义——令B是X的一个子集. 如果B在X中的补集$X-B$是X的一个开集，则子集B叫做X的闭集. X中的B和$X-B$是互为补集的，子集间的这种对应关系叫做X中的子集的**对偶性**. 所以，开集和闭集是一对**对偶概念**，两者是互为**对偶的集合**. 对偶概念很重要，将给我们带来极大方便，用的很广.

在下述定理中的运算称为对偶运算.

定理 1.3.5 A与B的并集的补集是A的补集和B的补集的交集：$X-(A\cup B)=(X-A)\cap(X-B)$.

例如，由图 1-2 可见

$X-A=B\cup C\cup D\cup F$,

$X-B=A\cup C\cup D\cup F$,

$(X-A)\cap(X-B)=C\cup D\cup F=X-(A\cup B)$.

定理 1.3.6 $X-(A\cap B)=(X-A)\cup(X-B)$.

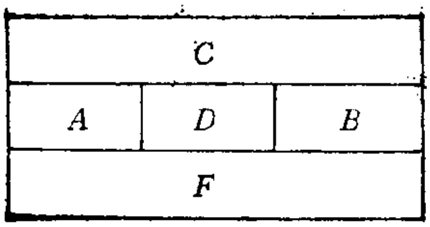

图 1-2

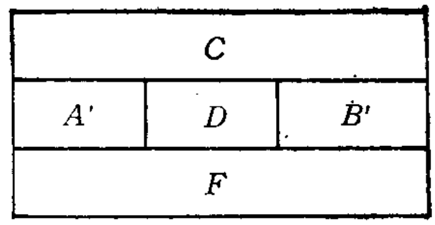

图 1-3

例如，设 $A = A' \cup D$，$B = B' \cup D$，则有(见图 1-3)

$$A \cap B = D, \quad X - A = B' \cup C \cup F,$$
$$X - B = A' \cup C \cup F,$$

于是有

$$(X - A) \cup (X - B) = A' \cup B' \cup C \cup F = X - D$$
$$= X - (A \cap B) .$$

定理 1.3.5 和定理 1.3.6 的更一般证明可参阅有关的拓扑学专著.

利用对偶性和对偶运算可以证明关于闭集的下述定理（证明略）:

定理 1.3.7 若 A 与 B 都是 X 的闭集，则并集 $A \cup B$ 是 X 的一个闭集，X 的任意有限个闭集的并集是 X 的一个闭集.

定理 1.3.8 X 的任意多个闭集的交集是 X 的一个闭集.

定理 1.3.9 空集 $\varnothing$ 和 X 自身，既是 X 的开集，又是 X 的闭集.

仿照用开集定义拓扑空间的模式，不难用闭集来定义拓扑空间(留给读者).

下面用开集和闭集来讨论映射的连续性.

定理 1.3.10 若 Y 的每个开集的反象是 X 的一个开集，则 f 连续.

证 设 V 是 Y 的任意一个开集，且 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集. 在 X 中取一点 $x \in X$，并令 $\varepsilon > 0$，则 $N(f(x), \varepsilon, Y)$ 是 Y 中的一个开集，并且，它的反象 $f^{-1}(N(f(x), \varepsilon, Y))$ 是 X 的一个开集. 记 $U = f^{-1}(N(f(x), \varepsilon, Y))$，则有 $x \in U$，且有某邻域 $N(x, \delta, X) \subset U$. 于是有

$$f(N(x,\delta,X))\subset f(U)=f(f^{-1}(N(f(x),\varepsilon,Y)))$$

即有 $f(N(x,\delta,X))\subset N(f(x),\varepsilon,Y)$. 这符合用邻域表述的关于映射 f 连续的定义. 故得证.

定理 1.3.11 若 Y 的每个闭集的反象是 X 的一个闭集, 则 f 连续.

证 设 $Y-A$ 是 Y 的闭集,则 $f^{-1}(Y-A)$ 是 X 的闭集. 于是, A 是 Y 中的开集, 其反象 $f^{-1}(A)$ 是 X 中的开集. 根据定理 1.3.10, f 连续.

定理 1.3.12 若 $f: X\rightarrow Y$ 和 $g: Y\rightarrow Z$ 都是连续映射, 则它们的复合映射 $gf: X\rightarrow Z$ 也是连续映射.

证 设 A 是 Z 的一个开集,则因 g 连续,所以 A 的反象 $g^{-1}(A)$ 是 Y 中的开集, 又因 f 连续, 所以反象 $f^{-1}(g^{-1}(A))$ 是 X 中的开集. 利用已知的关系(见 1.1 的最后一段): $(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$, 则有, 反象 $f^{-1}(g^{-1}(A))=(gf)^{-1}A$ 是 X 中的开集, 所以 (gf) 连续.

1.4 紧致性

本节的重点内容是紧致性, 同时本节还会提到另外几个重要的拓扑不变性概念.

R^n 内的有界(指集合 X 包含于一个以原点为中心, 半径为有限的球内)闭子集有特殊的重要性. 这由于: (1) 若 X 有界且闭, 则象集 $f(X)=\{f(x)\mid f: X\rightarrow R^n, f \text{ 连续}\}$也是有界且闭的;(2) 集合的有界且闭性质等价于一个与度量无关的纯粹拓扑的性质, 即紧致性. 说清 (1)、(2) 两点是本节的中心内容. 为定义紧致性,先讨论覆盖与真子覆盖. 设 X 为 R^n 内的一个拓扑空间, C 代表 X 的一组开集 $C=C(U_1, U_2,\cdots,U_i,\cdots)$, 且开集组成员的并集 $\cup U_i=X$. 这样的一组开集叫做 X 的一个开覆盖. 若 C' 是 C 的一个成员个数有限的子组, 且 $\cup U'_j=X$ (U'_j 代表 C' 中成员),则 C' 叫做 C 的有限真子覆盖, 或称 C' 是 X 的有限真子覆盖。例如, 取 X 为单位闭区间 $[0, 1]$, 且 $[0, 1]$ 的如下的一组子

集可作为

$$C = C\left[0,1/10\right);\ \cdots,\left(\frac{1}{n+2},\ \frac{1}{n}\right)(n\in Z);,\cdots,\left(\frac{1}{3},1\right],$$

这个开覆盖是无穷的. 显然,比如取如下有限个

$$\left[0,1/10\right);\ \cdots,\left(\frac{1}{n+2},\ \frac{1}{n}\right)(2\leqslant n\leqslant 9);\cdots,\left(\frac{1}{3},\ 1\right]$$

就足以覆盖 [0, 1]. 即 [0, 1] 的开覆盖 C 包含了一个成员个数有限的真子覆盖. 然而,若取 X 为平面, 取 C 表示半径为 1, 中心为整数坐标点的开圆全体,构成平面的一个开覆盖. 但是,若我们从 C 中抛弃任一开圆 A, 则剩下的开圆组不足以覆盖平面, 因为 A 的中心盖不上. 正反二例引导我们作出如下定义:

紧致——若拓扑空间 X 的任何一个开覆盖 C 包含 X 的一个有限真子覆盖 C', 则称 X 是紧致的(其逆亦真).

从上述讨论看到,"紧致"和"有限真子覆盖"需要以有界集、闭集为前提. 对于无界集和开集尚无紧致定义. 为讨论中心内容,先介绍如下定理,而不作证明.

Housdorff 空间——若空间中的任意两点有不相交的邻域,则称这个空间为可分离的空间,即 Housdorff 空间.

定理 1.4.1 若 A 是 Housdorff 空间 X 的紧致子集, 并且,取 $x\in X-A$, 则 x 有邻域 $N(x, X-A)\subset X-A$, 且与 A 不相交, 从而 $(X-A)$ 是开集(开集定义),所以 Housdorff 空间的紧致子集 A 是闭集.

定理 1.4.2 实数轴上的闭区间是紧致的.

在给出紧致性的定义时, 曾说明 [0, 1] 区间有有限真子覆盖. 现不难相信 R^1 上的任意一闭区间有有限真子覆盖,即不难相信 R^1 上的闭区间紧致.

推论 任何 n 维闭盒子紧致.

定理 1.4.3 紧致空间的闭子集是紧致的.

定理 1.4.4 R^n 内的紧致子集是有界闭集.

证 令 A 为 R^n 内的紧致子集,则按定理 1.4.1, A 是闭集; 现

在，以原点为中心，半径为整数的开球构成 R^n 的一组开覆盖[1]. 因此，由于A紧致，故A必包含在有限多个这样的球所构成的开覆盖内. 即存在整数I，使A包含在以原点为中心、I为半径的球内，亦即A有界(有界定义).

定理 1.4.5 R^n 的每个有界闭集是紧致的.

证 令A在 R^n 中有界且闭. 则必有一个点 $a\in R^n$ 与一个数 $r>0$，构成一个球，使得 $A\subset N(a, r)$ (根据有界定义). 不难想像，以这个球为背景可以作一个边长为 $2r$ 的 n 维闭盒子 B 包含这个球，即 $B\supset N(a, r)$，于是 $B\supset A$. 即A也是B的闭子集. 由于B的闭集族就是B自身与 R^n 的闭集族的交集族，所以得到结论，A是紧致空间B(n维紧致盒子)的闭子集. 根据定理 1.4.3，A是紧致的.

由理定 1.4.4 和 1.4.5 可知，有界且闭和紧致是等价的

有界闭集 $\Longleftrightarrow$ 紧致集.

定理 1.4.6 如果X是一个紧致空间，而且，$f\colon X\to Y$ 是连续的，则象 $f(X)$ 是紧致的. 简言之，紧致空间的连续象是紧致的.

证 假若已知X紧致，f是 1—1 满映射. 又设C是Y的任一开覆盖. 若 $O\in C$，则因f连续，所以 $f^{-1}(O)$ 是开集. 因此有：$\{f^{-1}(O)|O\in C\}\equiv D$ 是X的一个开覆盖. 由于X紧致，故D必有一个有限子覆盖，例如有

$$X=f^{-1}(O_1)\cup f^{-1}(O_2)\cup\cdots\cup f^{-1}(O_k).$$

因为f是 1—1 满射，所以有 $f(f^{-1}(O_i))=O_i(1\leqslant i\leqslant k)$. 于是有

$$f(X)=Y=O_1\cup O_2\cup\cdots\cup O_k.$$

即是说，开集 $O_1, O_2, \cdots, O_k$ 的并构成包含于C的Y的一个有限子覆盖. 根据紧致定义得，Y是紧致的. 现在我们可以给拓扑性质和拓扑学下一个定义了.

---

1) 高维空间的覆盖就是填充的意思.