

# 微积分学教程

下 册

罗亚平

王 现

编

藏 书



南京大学出版社

1988·南京

## 内 容 提 要

本书是根据国家教委拟定的计算机科学系“数学分析”纲要，并参照综合性大学物理学专业“高等数学”和数学专业“数学分析”大纲编写的。全书分上下两册，下册包括空间解析几何、多元函数微积分的主要内容；

本书叙述深入浅出，有较多的例题，可供综合性大学及高等师范院校计算机科学系，应用数学系及物理类专业的基础教材，也可供科技工作者及社会青年参考。

## 微 积 分 学 教 程

下 册

罗亚平 王 现 编

\*

南京大学出版社出版

(南京大学校内)

江苏省新华书店发行 武进村前印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 14.875 字数 386 千

1988年4月第1版

1988年4月第1次印刷

印数 1-3500

\*

ISBN 7-305-00126-0/0.9

O·9

定价：2.95元

701183/13

# 目 录

## 第九章 空间解析几何与矢量运算

- § 9.1 空间直角坐标系 ..... ( 1 )
  - 1. 空间直角坐标系(1) 2. 两点间的距离(3)
- § 9.2 向量及其加、减、数乘运算 ..... ( 5 )
  - 1. 向量的概念(5) 2. 向量的加减法(6) 3. 向量与数的乘法(7)
- § 9.3 向量的坐标表示 ..... ( 9 )
  - 1. 向量在轴上的投影(9) 2. 向量的坐标(11) 3. 模与方向余弦(14)
- § 9.4 向量的数量积、向量积、混合积 ..... ( 16 )
  - 1. 数量积(16) 2. 向量积(20) 3. 混合积(24)
- § 9.5 平面 ..... ( 29 )
  - 1. 平面方程(29) 2. 特殊位置的平面方程(31) 3. 点到平面的距离(33) 4. 平面的相互位置(34)
- § 9.6 直线 ..... ( 37 )
  - 1. 直线的方程(37) 2. 直线与平面间的关系(40) 3. 直线间的关系(42) 4. 距离(43) 5. 交于一直线的平面束(46)
- § 9.7 曲面与曲线 ..... ( 51 )
  - 1. 曲面、曲线的方程(51) 2. 柱面(53), 3. 旋转面(55)
  - 4. 锥面(58) 5. 曲线和曲面的参数方程(59)
- § 9.8 二次曲面 ..... ( 65 )
  - 1. 直角坐标变换(65) 2. 实二次曲面的标准方程(68) 3. 图形(70)
- § 9.9 向量函数的微分与积分 ..... ( 78 )
  - 1. 向量函数及其微分法(78) 2. 向量函数的导数的物理意义和几何意义(82) 3. 向量函数的不定积分与定积分(84)

## 第十章 多元函数

- § 10.1  $n$ 维欧几里德空间  $R^n$ 内点集的一些初步知识……( 88 )
1.  $n$ 维欧几里德空间  $R^n$ (88) 2.  $R^n$ 内点集的一些基本概念(90)
- § 10.2 多元函数的概念……( 96 )
1. 实例(96) 2. 二元函数(97) 3.  $n$ 元函数的定义(100)
4. 复合函数(102)
- § 10.3 多元函数的极限……( 104 )
1. 点列的极限(104) \*2. 两个基本引理(105) 3. 重极限(106)
4. 方向极限(111) 5. 累次极限(114)
- § 10.4 多元函数的连续性……( 118 )
1. 定义(119) 2. 性质和运算法则(119) 3. 附注和例子(119)
4. 闭域上连续函数的性质(121)

## 第十一章 多元函数微分学

- § 11.1 偏导数……( 124 )
1. 偏导数(124) 2. 复合函数微分法(128) 3. 曲面的切平面与法线(133)
- § 11.2 全微分……( 138 )
1. 全微分(138) 2. 全微分的几何意义(142) 3. 全微分在近似计算中的应用(143)
- § 11.3 方向导数与梯度……( 147 )
1. 方向导数(147) 2. 梯度(149)
- § 11.4 齐次函数与欧拉定理……( 151 )
- § 11.5 高阶偏导数……( 154 )
- § 11.6 二元函数的泰勒公式……( 162 )
- § 11.7 二元函数的极值……( 167 )
1. 极值的概念(167) 2. 极值的一个判别法(169) 3. 最大值与最小值(173) 4. 最小二乘法(176)

## 第十二章 隐函数

- § 12.1 由一个方程所确定的隐函数……………(183)
1. 存在性定理(183) 2. 可微性定理(187) 3. 例子(189)
- § 12.2 由方程组所确定的隐函数……………(194)
1. 含一个自变量两个未知函数的情形(194) 2. 含 $n$ 个自变量 $m$ 个未知函数的情形(203) 3. 反函数的存在性与可微性(205)
- § 12.3 条件极值——拉格朗日乘法……………(210)
- § 12.4 雅可比行列式 函数的相关性……………(218)
1. 雅可比矩阵(218) 2. 雅可比行列式的某些性质(220)
3. 函数的相关性(224)

## 第十三章 广义积分与含参变量的积分

- § 13.1 无穷区间上的积分……………(233)
1. 收敛与发散的定义(233) 2. 被积函数非负时的敛散性判别法(237) 3. 一般被积函数的情况(250)
- § 13.2 无界函数的积分……………(245)
1. 收敛与发散的定义(245) 2. 敛散性判别法(250)
- § 13.3 含参变量的定积分……………(258)
- § 13.4 含参变量的广义积分 一致收敛性……………(269)
1. 无穷积分一致收敛的定义与 $M$ 判别法(269) 2. 一致收敛的广义积分的性质(272) 3. 计算积分例(276)
- § 13.5  $\Gamma$ 函数与 $B$ 函数……………(281)
1.  $\Gamma$ 函数(281) 2.  $B$ 函数(283) 3. 计算积分例(286)
- § 13.6 斯突林公式……………(292)

## 第十四章 重积分

- § 14.1 二重积分的概念和性质……………(295)
1. 引入二重积分的两个典型问题(295) 2. 二重积分的定义

与可积函数(297) 3.二重积分的性质(300)

§ 14.2 在直角坐标系中二重积分的计算……………( 303 )

§ 14.3 二重积分的换元法……………( 316 )

1. 在极坐标系中二重积分的计算(316) 2. 二重积分的换元公式(321)

§ 14.4 三重积分的概念及计算……………( 326 )

1. 三重积分的概念(326) 2. 直角坐标系中三重积分的计算(327)

§ 14.5 三重积分的换元法……………( 332 )

1. 一般换元公式(332) 2. 柱面坐标变换(333) 3. 球面坐标变换(335) 4 例(338)

§ 14.6 应用……………( 342 )

1. 曲面的面积(342) 2. 质量中心(345) 3. 转动惯量(349)

## 第十五章 曲线积分 曲面积分

§ 15.1 曲线积分的概念及计算……………( 353 )

1. 例子(353) 2. 第一型(对弧长的)曲线积分(355) 3. 第二型(对坐标的)曲线积分(359) 4. 两类曲线积分之间的联系(364)  
5. 空间曲线积分(365)

§ 15.2 格林公式……………( 370 )

§ 15.3 平面上曲线积分与路线无关的条件……………( 377 )

§ 15.4 曲面积分的概念及计算……………( 385 )

1. 流量问题(385) 2. 第一型(对面积的)曲面积分(387)  
3. 第二型(对坐标的)曲面积分(391) 4. 两类曲面积分之间的联系(397)

§ 15.5 高斯公式……………( 399 )

§ 15.6 斯托克斯公式 空间曲线积分与路线无关的条件……………( 408 )

1. 斯托克斯公式(408) 2. 空间曲线积分与路线无关的条件(412)

§ 15.7 场论初步.....	( 417 )
1. 数量场与向量场(417) 2. 等值面与梯度(418)	
3. 散度(419) 4. 环量与旋度(422) 5. 向量微分算子(426)	
* § 15.8 在正交曲线坐标系中 $\nabla U$ , $\nabla \cdot A$ , $\nabla \times A$ 和 $\Delta U$ 的表示式.....	( 432 )
复习题三.....	( 440 )
习题答案与提示.....	( 447 )

# 第九章 空间解析几何 与矢量运算

## § 9.1 空间直角坐标系

### 1. 空间直角坐标系

在平面上建立直角坐标系后，平面上的点与一对有序的数建立了1—1对应，于是平面上一点的位置由它的坐标 $(x, y)$ 完全确定。为了确定日常空间一点的位置，我们来建立空间的直角坐标系。取一定点 $O$ ，过 $O$ 点作三条相互垂直的轴 $Ox, Oy, Oz$ ，再取一

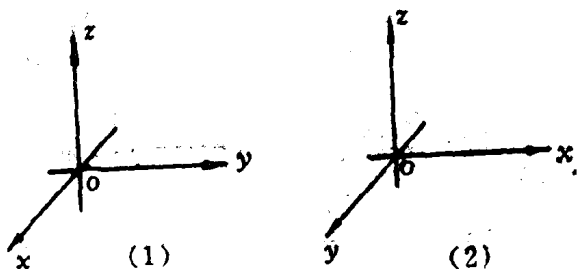


图 9.1

量长单位，这样就建立了空间一个直角坐标系，如图9.1示。 $O$ 点叫做坐标原点，三条轴依次叫做 $x$ 轴、 $y$ 轴和 $z$ 轴，统称坐标轴。三轴的取向有图9.1示的两种可能，图9.1(1)称为右手系，图9.1(2)称为左手系，通常都采用右手系，且把 $x$ 轴、 $y$ 轴画在水平面上， $z$ 轴竖立向上。

在空间建立了直角坐标系后，对空间的任一点 $M$ ，过点 $M$ 作



三个平面分别垂直于 $x$ 轴、 $y$ 轴和 $z$ 轴，它们与坐标轴的交点依次为 $A, B, C$ ，见图9.2。设点 $A$ 在 $x$ 轴上的坐标为 $x$ ，点 $B$ 在 $y$ 轴上的坐标为 $y$ ，点 $C$ 在 $z$ 轴上的坐标为 $z$ ，则点 $M$ 与三个有序的实数 $(x, y, z)$ 建立1—1对应，我们称 $(x, y, z)$ 为点 $M$ 的坐标。

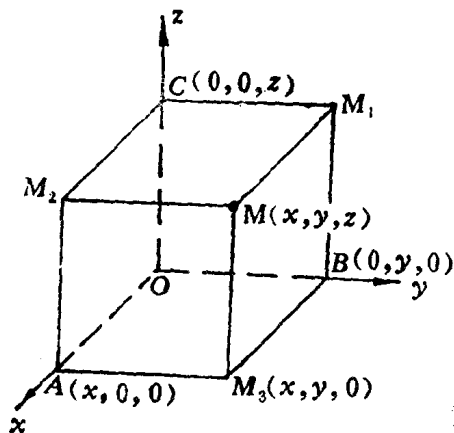


图 9.2

三个坐标轴两两可确定一个平面， $x$ 轴和 $y$ 轴确定的平面叫做 $xy$ 平面， $y$ 轴与 $z$ 轴确定的平面叫做 $yz$ 平面， $x$ 轴和 $z$ 轴确定的平面叫做 $xz$ 平面，这三个互相垂直的平面统称为坐标面。三个坐标面把整个空间分成8个区域，每个区域称为一个卦限，其编号按平面上四个象限的次序，在 $z > 0$ 部分依次为一、二、三、四，在 $z < 0$ 部分依次为五、六、七、八。如第一卦限内点的坐标符号为 $(+, +, +)$ ，第五卦限内点的坐标符号为 $(+, +, -)$ ，等等。

在 $xy$ 平面上的点 $M_3$ ，它的 $z$ 坐标为0，所以， $M_3$ 的坐标是 $(x, y, 0)$ ；同样，在 $yz$ 平面上点的坐标是 $(0, y, z)$ ，在 $xz$ 平面上点的坐标是 $(x, 0, z)$ 。对 $x$ 轴上的点 $A$ ，它的 $y$ 坐标和 $z$ 坐标都是0，所以点 $A$ 的坐标是 $(x, 0, 0)$ ；同样， $y$ 轴上点的坐标是 $(0, y, 0)$ ， $z$ 轴上点的坐标是 $(0, 0, z)$ 。而原点 $O$ 的坐标是 $(0, 0, 0)$ 。在图9.2上，直

线  $MM_3$  平行于  $z$  轴，与  $xy$  平面垂直，所以直线  $MM_3$  上的点只有  $z$  坐标不同， $x, y$  坐标是相同的；同样，平行于  $y$  轴的直线上的点只有  $y$  坐标不同，平行于  $x$  轴的直线上的点只有  $x$  坐标不同。而垂直于  $x$  轴的平面（平行于  $yz$  平面）上的点的  $x$  坐标都相同，如图 9.2 上点  $A, M_3, M, M_2$  的  $x$  坐标都相同；垂直于  $y$  轴的平面上的点的  $y$  坐标都相同，垂直于  $z$  轴的平面上的点的  $z$  坐标都相同。

给定了坐标  $(x, y, z)$  要找点  $M$ ，一般可以先在  $xy$  平面上找出坐标为  $(x, y)$  的点  $M_3$ ，过  $M_3$  作  $xy$  平面的垂线，再在其上找出坐标为  $z$  的点  $M$ 。

## 2. 两点间的距离

给定空间任意两点  $P(x_1, y_1, z_1), Q(x_2, y_2, z_2)$ ，我们要求这两点间的距离  $|PQ|$  的坐标表示式。过  $P, Q$  分别作垂直于坐标轴的平面，这六个平面围成一个以  $PQ$  为对角线的长方体（如图 9.3 示），则有

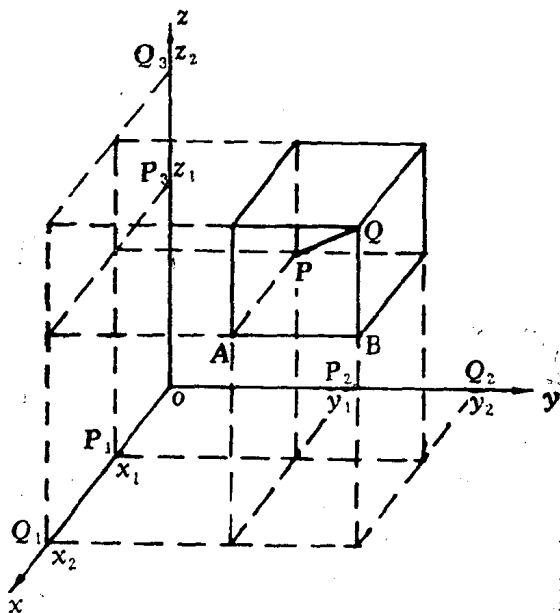


图 9.3

$$|PQ|^2 = |PB|^2 + |BQ|^2 = |PA|^2 + |AB|^2 + |BQ|^2$$

而

$$|PA| = |P_1Q_1| = |x_2 - x_1|$$

$$|AB| = |P_2Q_2| = |y_2 - y_1|$$

$$|BQ| = |P_3Q_3| = |z_2 - z_1|$$

故可得到两点间的距离公式：

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

特别，点 $M(x, y, z)$ 与坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

**例** 已知 $A(4, 1, 7)$ ， $B(-3, 5, 0)$ ，在 $y$ 轴上求一点 $M$ 使得 $|MA| = |MB|$ 。

**解** 因点 $M$ 在 $y$ 轴上，设其坐标为 $M(0, y, 0)$ ，则由距离公式有

$$16 + (y - 1)^2 + 49 = 9 + (y - 5)^2$$

可解得 $y = -4$ ，故所求的点为 $M(0, -4, 0)$ 。

### 习 题 9-1

1. 在空间直角坐标系中，定出下列点的位置：

$$A(1, 2, 1), \quad B(1, 2, -1), \quad C(-1, 2, -1),$$

$$D(1, 0, 1), \quad E(1, -2, 1), \quad F(-1, -2, 1).$$

2. 分别求点 $M(-3, 4, 5)$ 到原点、 $y$ 轴和 $yz$ 平面的距离。

3. 在 $yz$ 平面上，求与三个点 $A(3, 1, 2)$ ， $B(4, -2, -2)$ ， $C(0, 5, 1)$ 等距离的点。

4. 如果 $abc \neq 0$ ，有多少空间的点满足条件：

$$|x| = a, \quad |y| = b, \quad |z| = c?$$

5. 求证以点 $A(3, 1, 0)$ ， $B(2, 3, 2)$ ， $C(1, 2, 1)$ 为顶点的三角形是直角三角形。

6. 求证 $(-4, 0, 2)$ ， $(-1, 3\sqrt{3}, 2)$ ， $(2, 0, 2)$ ， $(-1, \sqrt{3}, 2 + 2\sqrt{6})$

是一个正四面体的顶点，并求这个四面体的外接球心。

7. 满足下述条件

$$|x| \leq a, |y| < b, |z| < c$$

的点位于空间何处？

## § 9:2 向量及其加、减、数乘运算

### 1. 向量的概念

在研究物理学实际问题时，常会遇到一类既有大小、又有方向的量，如力、位移、速度、加速度、力矩、电场强度、磁场强度等等，这类量叫做**向量**（也叫**矢量**）。另外还有一类只有数值大小而无方向的量，如质量、时间、长度、面积、密度、温度、能量等等，这类量叫做**数量**。向量通常用一有向线段表示，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向。以  $A$  为起点， $B$  为终点的向量记作  $\overrightarrow{AB}$ ，也可用上面加箭头的字母来表示，例如  $\overrightarrow{F}$ ， $\overrightarrow{V}$ ， $\overrightarrow{a}$ ， $\overrightarrow{L}$  等等。为排印方便，书中常用黑体字母表示，如  $\mathbf{F}$ ， $\mathbf{V}$  等等。向量的大小叫做向量的模，记作  $|\overrightarrow{AB}|$ ， $|\mathbf{F}|$ ， $|\mathbf{a}|$  等等。

在实际问题中遇到的向量，有时与起点有关，有时与起点无关，在数学上只讨论与起点无关的向量（所谓自由向量），即只考虑向量的大小和方向，[不考虑它的起点在何处，可任意作平行移动。因此，平移后能完全重合的向量都认为是相等的，所以很自然地定义两个向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  相等为：它们的模相等，方向相同。记作  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 。

模为0的向量叫做**零向量**，记作  $\mathbf{0}$ （有时就写成0），零向量的方向可看作是任意的。

模为1的向量叫做**单位向量**。与非零向量  $\mathbf{a}$  同方向的单位长

向量记作 $\boldsymbol{a}$ 。

给定一向量 $\boldsymbol{a}$ ，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$ 。

## 2: 向量的加减法

在力学中，求两力的合力用平行四边形法则(见图9.4(1))，在物理中出现的向量都用这个方法合成或分解。因此，我们用这个平行四边形法则来定义向量的加法运算。如图9.4(2)，向量

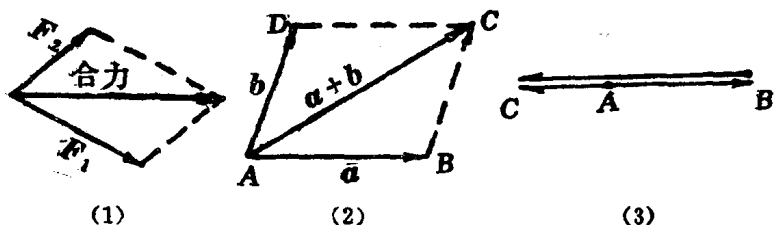


图 9.4

$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$ ， $\vec{AC}$  称为向量  $\vec{AB}$  与  $\vec{AD}$  的和。又因为向量  $\vec{BC} = \vec{AD}$ ，因此  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ ，也就是说，若要求两个向量  $\boldsymbol{a}$ ， $\boldsymbol{b}$  的和  $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ ，只要先作  $\vec{AB} = \boldsymbol{a}$ ，再以其终点  $B$  作为  $\boldsymbol{b}$  的起点作向量  $\vec{BC} = \boldsymbol{b}$ ，则连接  $\boldsymbol{a}$  的起点  $A$  与  $\boldsymbol{b}$  的终点  $C$  的向量  $\vec{AC}$  即是和  $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ ，这种法则叫做向量加法的三角形法则，当两个向量平行时，用这个法则求和也适用，如图9.4(3)。从图9.4可明显看出，这两个求和法则是一回事。

由图9.5,9.6可见，向量的加法满足以下运算规律：

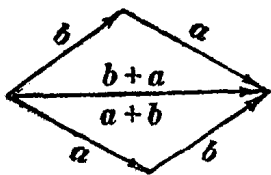


图 9.5

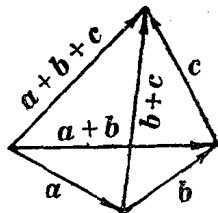


图 9.6

(1) 交换律

$$a + b = b + a$$

(2) 结合律

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$$

根据零向量、负向量的定义及加法运算规律，立即可得

$$a + 0 = 0 + a = a, \quad a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

关于两向量的减法，我们规定  $a$  与  $b$  的差  $a - b$  为：

$$a - b = a + (-b)$$

向量的差的作图法为， $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$ 。

注意，以上加法可推广到求任意有限个向量的和。给定  $n$  个向量  $a_1, \dots, a_n$ ，从  $A_0$  出发作折线  $A_0A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n$ ，使  $\vec{A_0A_1} = a_1$ ， $\vec{A_1A_2} = a_2$ ， $\dots$ ， $\vec{A_{n-1}A_n} = a_n$ ，则向量  $\vec{A_0A_n} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。如图 9.7。

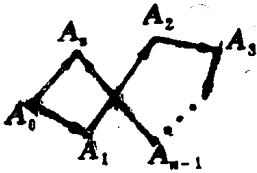


图 9.7

根据向量加法的三角形法则可得向量长度的三角不等式：

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

且等号只有当  $a, b$  中一个为零向量或者两者同向时成立。这个不等式可推广到有限个向量，有：

$$|a_1 + \dots + a_n| \leq |a_1| + \dots + |a_n|$$

### 3. 向量与数的乘法(简称数乘)

设  $a$  是一向量， $\lambda$  是一实数，我们定义  $a$  与  $\lambda$  的乘积  $\lambda a$  为一向量，其大小为  $|\lambda| |a|$ ，方向与  $a$  平行，当  $\lambda > 0$  时与  $a$  同向，当  $\lambda < 0$  时与  $a$  反向。见图 9.8。特别

$$1 \cdot a = a, \quad (-1) \cdot a = -a$$

而当  $\lambda = 0$  或  $a = 0$  时， $\lambda a$  为零向量。

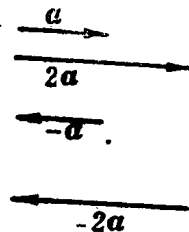


图 9.8

显然，数乘满足以下运算规律：

(1) 结合律

$$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a = \mu(\lambda a)$$

(2) 分配律

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$$

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b \text{ (见图9.9)}$$

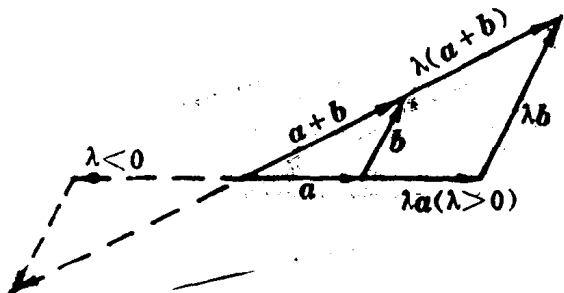


图 9.9

由定义可推出以下结论：

(1) 两个非零向量  $a$ ,  $b$  平行(记作  $a \parallel b$ ) 必有关系式：

$$b = \lambda a \quad (\lambda \text{ 为非零实数})$$

事实上，若  $b \parallel a$ ，或  $\lambda$  使  $|\lambda| = \frac{|b|}{|a|}$ ， $\lambda$  的正负号依  $b$  与  $a$  同向或反向而定，因此有  $b = \lambda a$ ；反而，若  $b = \lambda a$ ，因  $\lambda a \parallel a$ ，所以  $b \parallel a$ 。

(2) 对非零向量  $a$ ，有

$$a = |a|a^0 \text{ 或 } a^0 = \frac{a}{|a|}$$

例 已知两个不平行的非零向量  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ ,  $|\vec{OA}| = a$ ,  $|\vec{OB}| = b$ . 求证：向量  $\vec{OC} = b\vec{OA} + a\vec{OB}$  平分这两个向量的夹角  $\angle AOB$ .

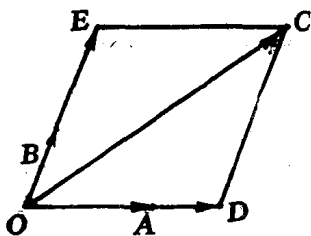


图 9.10

证 如图9.10, 作  $\vec{OD} = b\vec{OA}$ ,  $\vec{OE} = a\vec{OB}$ , 则  $|\vec{OD}| = b|\vec{OA}| = ba$ ,  $|\vec{OE}| = a|\vec{OB}| = ab$ , 所以  $|\vec{OD}| = |\vec{OE}|$ .

又  $\vec{OC} = b\vec{OA} + a\vec{OB} = \vec{OD} + \vec{OE}$ , 所以  $OC$  是平行四边形  $ODCE$  的对角线, 而  $|\vec{OD}| = |\vec{OE}|$ , 因此, 四边形  $ODCE$  是菱形, 因为菱形的对角线平分顶角, 所以  $OC$  平分  $\angle DOE$ , 即  $\vec{OC}$  平分  $\angle AOB$ .

## 习 题 9-2

1. 已知平行四边形  $ABCD$  的对角线为  $\vec{AC} = \vec{a}$ ,  $\vec{BD} = \vec{b}$ , 求  $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{DA}$ ;
2. 设  $\vec{AM} = \vec{MB}$ , 证明: 对任一点  $O$ ,  $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$ ,
3. 用向量运算证明: 对角线相互平分的四边形是平行四边形,  
用向量运算证明: 任意三角形的三中线相交于一点, 且此点位于离顶点  $\frac{2}{3}$  中线长处.
5. 设  $M$  是三角形  $ABC$  的垂心, 证明对任一点  $O$ ,  $\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$ ,
6. 三个向量有公共的起点  $O$ , 并分别以三角形  $ABC$  的顶点为终点, 证明  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$   
的充要条件是:  $O$  点是三角形中线的交点,
7. 设  $A, B, C, D$  是四面体的顶点,  $M, N$  分别是边  $AB, CD$  的中点, 证明:  $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC})$ .

## § 9:3 向量的坐标表示

### 1. 向量在轴上的投影

#### (1) 两个方向的夹角

我们先来定义空间两个向量  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角  $\theta$ : 把两个向量平移到同一个起点  $O$ , 如图9.11所示,  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ , 则  $\theta = \angle AOB$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , 通常把  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角记作  $(\vec{a}, \vec{b})$  或  $(\vec{b}, \vec{a})$ .

空间向量与轴的夹角及两轴(不管是否相交)的夹角也如此定



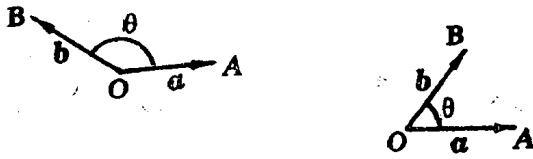


图 9.11

义，即是两个方向的夹角。

(2) 向量  $\vec{AB}$  在轴  $u$  上的投影

过  $A, B$  各作轴  $u$  的垂线  $AA_1, BB_1$ , 垂足为  $A_1, B_1$ , 向量  $\vec{A_1B_1}$  的数值  $A_1B_1$  叫做  $\vec{AB}$  在轴  $u$  上的投影, 记作  $\text{Prj}_u \vec{AB}$ . 值  $A_1B_1$  是这样的数, 其大小为长度  $|A_1B_1|$ , 其符号当  $\vec{A_1B_1}$  与轴  $u$  正向相同时取

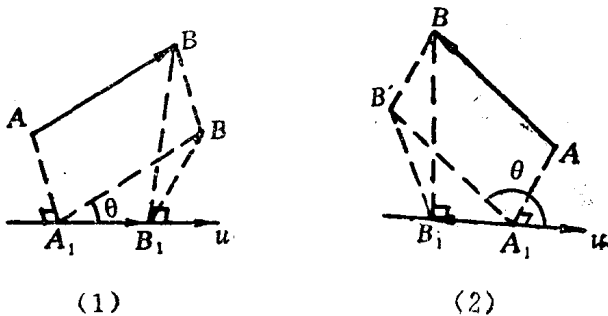


图 9.12

正, 相反时取负。因此, 由图 9.12 可见, 若以  $\theta$  表示  $\vec{AB}$  与轴  $u$  的夹角, 则有

$$A_1B_1 = |A_1B'| \cos\theta = |\vec{AB}| \cos\theta$$

即

$$\text{Prj}_u \vec{AB} = |\vec{AB}| \cos\theta \quad (9.1)$$

对任意两个向量也有类似结果