微积分学教程

下册

罗亚平　王现　编

南京大学出版社

1988·南京

内 容 提 要

本书是根据国家教委拟定的计算机科学系"数学分析"纲要，并参照综合性大学物理学专业"高等数学"和数学专业"数学分析"大纲编写的．全书分上下两册，下册包括空间解析几何、多元函数微积分的主要内容．

本书叙述深入浅出，有较多的例题，可供综合性大学及高等师范院校计算机科学系，应用数学系及物理类专业的基础教材，也可供科技工作者及社会青年参考．

微积分学教程

下　册

罗亚平　王　现　编

*

南京大学出版社出版

（南京大学校内）

江苏省新华书店发行　　武进村前印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32　印张 14.875　字数 386 千

1988 年 4 月第 1 版　　1988 年 4 月第 1 次印刷

印数 1-3500

*

ISBN 7-305-00126-0/O.9

O·9　　定价：2.95元

目　　录

第九章　空间解析几何与矢量运算

第十章　多元函数

第十一章　多元函数微分学

第十二章 隐函数

第十三章 广义积分与含参变量的积分

第十四章 重积分

第十五章 曲线积分 曲面积分

第九章 空间解析几何与矢量运算

§9.1空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系

在平面上建立直角坐标系后，平面上的点与一对有序的数建立了1—1对应，于是平面上一点的位置由它的坐标(x, y)完全确定。为了确定日常空间一点的位置，我们来建立空间的直角坐标系。取一定点O，过O点作三条相互垂直的轴Ox，Oy，Oz，再取一

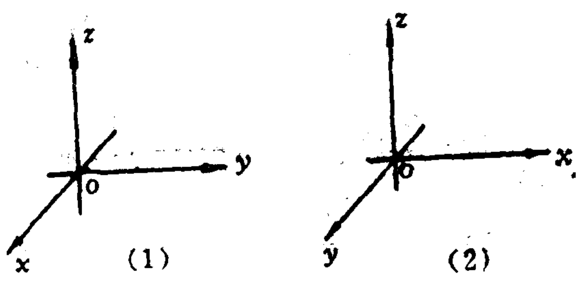


图 9.1

量长单位，这样就建立了空间一个直角坐标系，如图9.1示。O点叫做坐标**原点**，三条轴依次叫做x轴、y轴和z轴，统称**坐标轴**。三轴的取向有图9.1示的两种可能，图9.1(1)称为右手系，图9.1(2)称为左手系，通常都采用右手系，且把x轴、y轴画在水平面上，z轴竖立向上。

在空间建立了直角坐标系后，对空间的任一点M，过点M作

三个平面分别垂直于x轴、y轴和z轴，它们与坐标轴的交点依次为A,B,C，见图9.2。设点A在x轴上的坐标为x，点B在y轴上的坐标为y，点C在z轴上的坐称为z，则点M与三个有序的实数(x,y,z)建立1—1对应，我们称(x,y,z)为**点M的坐标**。

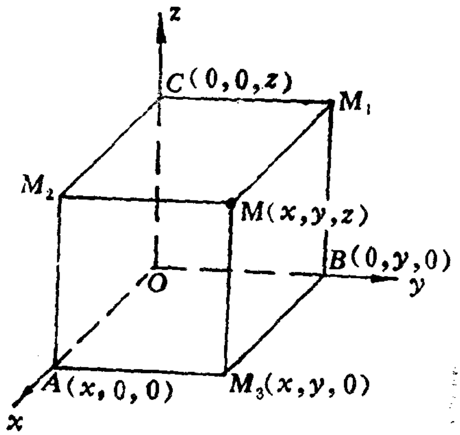


图 9.2

三个坐标轴两两可确定一个平面，x轴和y轴确定的平面叫做xy平面，y轴与z轴确定的平面叫做yz平面，x轴和z轴确定的平面叫做xz平面，这三个互相垂直的平面统称为**坐标面**。三个坐标面把整个空间分成8个区域，每个区域称为一个卦限，其编号按平面上四个象限的次序，在$z>0$部分依次为一、二、三、四，在$z<0$部分依次为五、六、七、八。如第一卦限内点的坐标符号为$(+,+,+)$，第五卦限内点的坐标符号为$(+,+,-)$，等等。

在xy平面上的点M_3，它的z坐标为0，所以，M_3的坐标是$(x,y,0)$；同样，在yz平面上点的坐标是$(0,y,z)$，在xz平面上点的坐标是$(x,0,z)$。对x轴上的点A，它的y坐标和z坐标都是0，所以点A的坐标是$(x,0,0)$；同样，y轴上点的坐标是$(0,y,0)$，z轴上点的坐标是$(0,0,z)$。而原点O的坐标是$(0,0,0)$。在图9.2上，直

线 MM_3平行于z轴，与 xy 平面垂直，所以直线 MM_3上的点只有z坐称不同，x,y坐标是相同的；同样，平行于y轴的直线上的点只有y坐标不同，平行于x轴的直线上的点只有x坐标不同。而垂直于x轴的平面(平行于yz平面)上的点的x坐标都相同，如图9.2上点 A,M_3, M,M_2 的x坐标都相同；垂直于y轴的平面上的点的y坐标都相同，垂直于z轴的平面上的点的z坐标都相同。

给定了坐标(x,y,z)要找点 M，一般可以先在xy平面上找出坐标为(x,y)的点 M_3，过 M_3作xy平面的垂线，再在其上找出坐标为z的点 M。

2. 两点间的距离

给定空间任意两点 $P(x_1,y_1,z_1)$，$Q(x_2,y_2,z_2)$，我们要求这两点间的距离 $|PQ|$ 的坐标表示式。过P,Q分别作垂直于坐标轴的平面，这六个平面围成一个以PQ为对角线的长方体（如图9.3示），则有

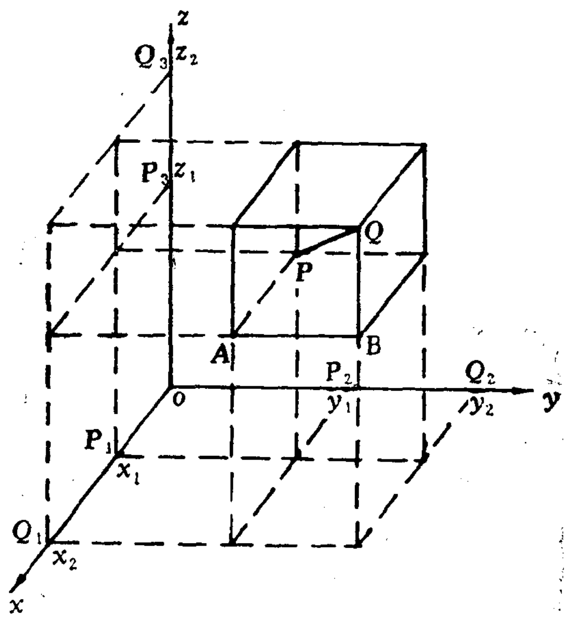


图 9.3

$$|PQ|^2=|PB|^2+|BQ|^2=|PA|^2+|AB|^2+|BQ|^2$$

而

$$|PA|=|P_1Q_1|=|x_2-x_1|$$
$$|AB|=|P_2Q_2|=|y_2-y_2|$$
$$|BQ|=|P_3Q_3|=|z_2-z_1|$$

故可得到两点间的距离公式：

$$|PQ|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

特别，点$M(x,y,z)$与坐标原点$O(0,0,0)$的距离为

$$r=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

例 已知$A(4,1,7)$，$B(-3,5,0)$，在y轴上求一点M使得$|MA|=|MB|$。

解 因点M在y轴上，设其坐标为$M(0,y,0)$，则由距离公式有

$$16+(y-1)^2+49=9+(y-5)^2$$

可解得$y=-4$，故所求的点为$M(0,-4,0)$。

习 题 9-1

1. 在空间直角坐标系中，定出下列点的位置：

   $A(1,\ 2,\ 1)$，$B(1,\ 2,\ -1)$，$C(-1,\ 2,\ -1)$，

   $D(1,\ 0,\ 1)$，$E(1,\ -2,\ 1)$，$F(-1,\ -2,\ 1)$。

2. 分别求点$M(-3,\ 4,\ 5)$到原点、y轴和yz平面的距离。

3. 在yz平面上，求与三个点$A(3,\ 1,\ 2)$，$B(4,\ -2,\ -2)$，$C(0,\ 5,\ 1)$等距离的点。

4. 如果$abc\neq 0$，有多少空间的点满足条件：

   $|x|=a$，$|y|=b$，$|z|=c$？

5. 求证以点$A(3,\ 1,\ 0)$，$B(2,\ 3,\ 2)$，$C(1,\ 2,\ 1)$为顶点的三角形是直角三角形。

6. 求证$(-4,0,2)$，$(-1,\ 3\sqrt{3},\ 2)$，$(2,0,2)$，$(-1,\sqrt{3},\ 2+2\sqrt{6})$

是一个正四面体的顶点；并求这个四面体的外接球心。

7. 满足下述条件

$$|x| \leq a,\quad |y| < b,\quad |z| < c$$

的点位于空间何处？

§9:2 向量及其加、减、数乘运算

1. 向量的概念

在研究物理学实际问题时，常会遇到一类既有大小、又有方向的量，如力、位移、速度、加速度、力距、电场强度、磁场强度等等，这类量叫做**向量**（也叫**矢量**）。另外还有一类只有数值大小而无方向的量，如质量、时间、长度、面积、密度、温度、能量等等，这类量叫做**数量**。向量通常用一有向线段表示，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向。以A为起点，B为终点的向量记作$\overrightarrow{AB}$，也可用上面加箭头的字母来表示，例如$\vec{F}$，$\vec{V}$，$\vec{a}$，$\vec{L}$等等。为排印方便，书中常用黑体字母表示，如$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{V}$等等。向量的大小叫做向量的**模**，记作$|\overrightarrow{AB}|$，$|\boldsymbol{F}|$，$|\vec{a}|$等等。

在实际问题中遇到的向量，有时与起点有关，有时与起点无关，在数学上只讨论与起点无关的向量（所谓**自由向量**），即只考虑向量的大小和方向，不考虑它的起点在何处，可任意作平行移动。因此，平移后能完全重合的向量都认为是相等的，所以很自然地定义两个向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$**相等**为：它们的模相等，方向相同。记作$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。

模为0的向量叫做**零向量**，记作$\boldsymbol{O}$（有时就写成0），零向量的方向可看作是任意的。

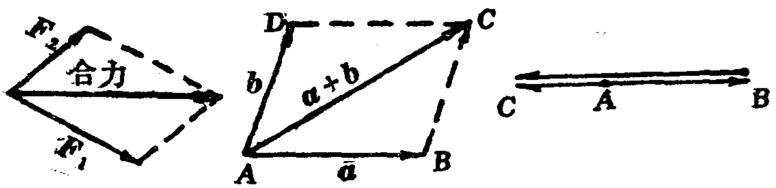
模为1的向量叫做**单位向量**。与非零向量$\boldsymbol{a}$同方向的单位长

向量记作a^0。

给定一向量a，与a的模相等而方向相反的向量叫做a的**负向量**，记作$-a$。

2. 向量的加减法

在力学中，求两力的合力用平行四边形法则(见图9.4(1))，在物理中出现的向量都用这个方法来合成或分解。因此，我们用这个**平行四边形法则**来定义向量的加法运算。如图9.4(2)，向量



(1)　　(2)　　(3)

图 9.4

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AC}$称为向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AD}$的**和**。又因为向量$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$，因此$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$，也就是说，若要求两个向量$a$，$b$的和$a+b$，只要先作$\overrightarrow{AB}=a$，再以其终点$B$作为$b$的起点作向量$\overrightarrow{BC}=b$，则连接$a$的起点$A$与$b$的终点$C$的向量$\overrightarrow{AC}$即是和$a+b$，这种法则叫做向量加法的**三角形法则**，当两个向量平行时，用这个法则求和也适用，如图9.4(3)。从图9.4可明显看出，这两个求和法则是一回事。

由图9.5,9.6可见，向量的加法满足以下运算规律：

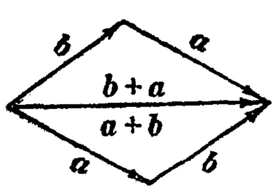


图 9.5

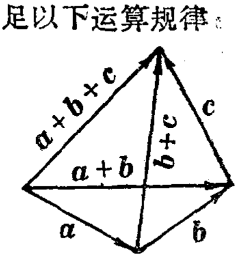


图 9.6

(1)交换律

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

(2) 结合律

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$$

根据零向量、负向量的定义及加法运算规律，立即可得

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，　$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$。

关于两向量的减法，我们规定$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$为：

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

向量的差的作图法为：$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$。

注意，以上加法可推广到求任意有限个向量的和。给定n个向量$\boldsymbol{a}_1$，…，$\boldsymbol{a}_n$，从A_0出发作折线$A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$，使$\overrightarrow{A_0A_1}=\boldsymbol{a}_1$，$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$，…，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$，则向量$\overrightarrow{A_0A_n}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$。如图9.7。

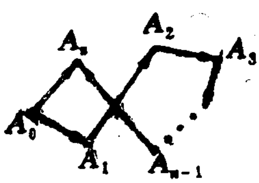


图 9.7

根据向量加法的三角形法则可得向量长度的三角不等式：

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

且等号只有当$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$中一个为零向量或者两者同向时成立。这个不等式可推广到有限个向量，有：

$$|\boldsymbol{a}_1+\cdots+\boldsymbol{a}_n|\leqslant|\boldsymbol{a}_1|+\cdots+|\boldsymbol{a}_n|$$

3. 向量与数的乘法(简称数乘)

设$\boldsymbol{a}$是一向量，λ是一实数，我们定义$\boldsymbol{a}$与λ的乘积$\lambda\boldsymbol{a}$为一向量，其大小为$|\lambda||\boldsymbol{a}|$，方向与$\boldsymbol{a}$平行，当$\lambda>0$时与$\boldsymbol{a}$同向，当$\lambda<0$时与$\boldsymbol{a}$反向。见图9.8。特别

$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，　$(-1)\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$

而当$\lambda=0$或$\boldsymbol{a}=0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$为零向量。

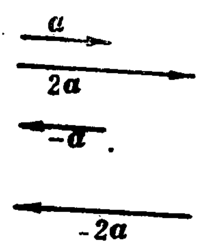


图 9.8

显然，数乘满足以下运算规律：

(1)结合律

$$\lambda(\mu \boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda \boldsymbol{a})$$

(2) 分配律

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda \boldsymbol{a}+\mu \boldsymbol{a}$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda \boldsymbol{a}+\lambda \boldsymbol{b}\text{(见图9.9)}$$

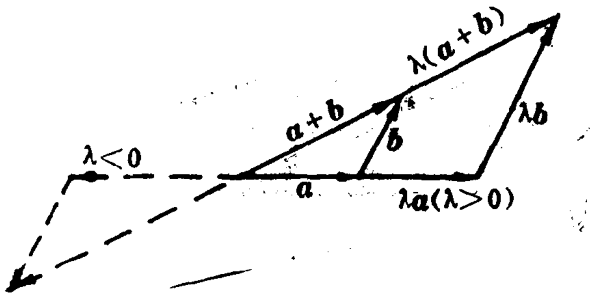


图 9.9

由定义可推出以下结论：

(1) 两个非零向量a，$\boldsymbol{b}$平行(记作$\boldsymbol{a}/\!/ \boldsymbol{b}$)必有关系式：

$$\boldsymbol{b}=\lambda \boldsymbol{a}\quad(\lambda\text{为非零实数})$$

事实上，若$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，或$\lambda$使$|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，$\lambda$的正负号依$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$同向或反向而定，因此有$\boldsymbol{b}=\lambda \boldsymbol{a}$；反而，若$\boldsymbol{b}=\lambda \boldsymbol{a}$，因$\lambda \boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{a}$，所以$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$。

(2) 对非零向量$\boldsymbol{a}$，有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0\text{或}\quad \boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

例 已知两个不平行的非零向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$|\overrightarrow{OA}|=a$，$|\overrightarrow{OB}|=b$。求证：向量$\overrightarrow{OC}=b\overrightarrow{OA}+a\overrightarrow{OB}$平分这两个向量的夹角$\angle AOB$。

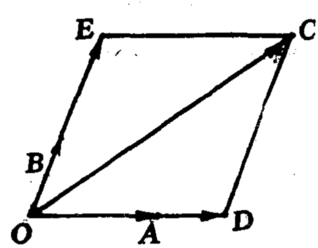


图 9.10

证 如图9.10，作$\overrightarrow{OD}=b\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OE}=a\overrightarrow{OB}$，则$|\overrightarrow{OD}|=b|\overrightarrow{OA}|=ba$，$|\overrightarrow{OE}|=a|\overrightarrow{OB}|=ab$，所以$|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{OE}|$.

又$\overrightarrow{OC}=b\overrightarrow{OA}+a\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$，所以$OC$是平行四边形$ODCE$的对角线，而$|OD|=|OE|$，因此，四边形$ODCE$是菱形，因为菱形的对角线平分顶角，所以$OC$平分$\angle DOE$，即$\overrightarrow{OC}$平分$\angle AOB$。

习　题　9-2

1．已知平行四边形$ABCD$的对角线为$\overrightarrow{AC}=a$，$\overrightarrow{BD}=b$，求$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DA}$；

2．设$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，证明：对任一点$O$，$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，

3．用向量运算证明：对角线相互平分的四边形是平行四边形，

4．用向量运算证明：任意三角形的三中线相交于一点，且此点位于离顶点$\frac{2}{3}$中线长处．

5．设M是三角形ABC的垂心，证明对任一点O，$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，

6．三个向量有公共的起点O，并分别以三角形ABC的顶点为终点，证明
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$$
的充要条件是：O点是三角形中线的交点，

7．设A，B，C，D是四面体的顶点，M，N分别是边AB，CD的中点，证明：$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$．

§9.3向量的坐标表示

1．向量在轴上的投影

（1）两个方向的夹角

我们先来定义空间两个向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的**夹角**θ：把两个向量平移到同一个起点O，如图9.11所示，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则$\theta=\angle AOB$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，通常把$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的夹角记作$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$或$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$。

空间向量与轴的夹角及两轴（不管是否相交）的夹角也如此定

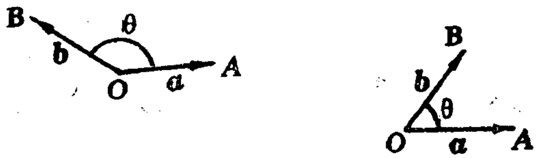
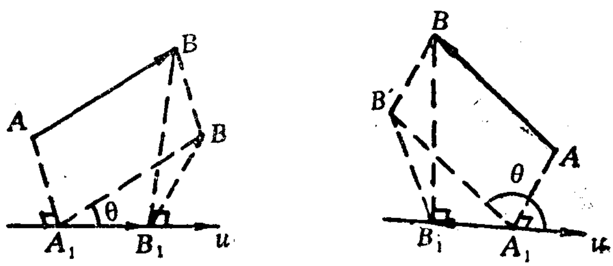


图 9.11

义，即是两个方向的夹角。

(2)向量$\overrightarrow{AB}$在轴u上的投影

过A，B各作轴u的垂线AA_1，BB_1，垂足为A_1，B_1，向量$\overrightarrow{A_1B_1}$的数值A_1B_1叫做$\overrightarrow{AB}$在轴u上的投影，记作$Prj_u\overrightarrow{AB}$。值$\overrightarrow{A_1B_1}$是这样的数，其大小为长度$|A_1B_1|$，其符号当$\overrightarrow{A_1B_1}$与轴u正向相同时取



(1)　　　　(2)

图 9.12

正，相反时取负。因此，由图9.12可见，若以θ表示$\overrightarrow{AB}$与轴u的夹角，则有

$$A_1B_1 = |A_1B'|\cos\theta = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta$$

即

$$Prj_u\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta \qquad (9.1)$$

对任意两个向量也有类似结果