能量变分原理在无缝线路稳定计算中的应用

许实儒 编

中国铁道出版社

1985年·北京

前　言

本书主要是作为铁道工程专业轨道课教学参考书而编写的，亦可供有关工程技术人员参考。笔者在本书中试图把力学基础理论与专业应用结合起来，使读者能加深对基础理论的理解，提高分析和解决实际工程问题的能力。

在基础理论方面，本书主要介绍了能量变分原理的基础知识及其在结构稳定问题方面的应用。在叙述及举例上尽量讲清基本概念，简化教学处理。由于学习能量理论需要一定的变分法的知识，故将此部分内容放在附录中。

关于无缝线路稳定性计算问题，国外早有多种计算公式。我国从六十年代以来先后也有不少同志提出了计算公式。1977年长沙铁道学院轨道教研室和铁道科学研究院无缝线路组及许多单位的同志，在总结前人工作的基础上提出了我国目前使用的《无缝线路稳定计算统一公式》。本书主要是介绍此公式的原理及推导，并对一些问题进行了较深入的讨论。

书后列有参考文献目录。本书曾在不同程度上引用了这些文献中的一些观点或材料，在此仅对上述作者表示感谢。另外，吴鸿庆和范俊杰老师以及清华大学龙驭球教授、支秉琛老师对此书进行了审阅并提出了不少宝贵意见，特此表示衷心感谢。

笔者学识疏浅，不当之处如蒙赐教，当不胜感激。

编　者

1983年

内 容 提 要

本书概括地介绍了能量变分原理的基础知识，及其在结构稳定问题方面的应用，并结合铁道线路专业，探讨了运用能量变分原理进行无缝线路的稳定性计算问题，以及有关计算公式的推导方法。

本书主要用作铁道工程专业轨道课教学的参考用书，亦可供有关工程技术人员、研究人员参考。

能量变分原理在无缝线路
稳定计算中的应用
许实儒 编
中国铁道出版社出版
责任编辑 陈 键 封面设计 王镛平
新华书店北京发行所发行
各 地 新 华 书 店 经 售
中国铁道出版社印刷厂印
开本：787×1092 1/32 印张：2.25 字数：50千
1 9 8 5 年 1 月 第 1 版 第 1 次印刷
印数：0001—2,000册 定价：0.50元

目　录

一、稳定问题的基本概念

稳定问题在自然界和人类社会是普遍存在的。稳定是指平衡的稳定而言的。稳定性问题就是一个系统是否容易脱离原有平衡状态的问题。原则上说，稳定问题必须在对比中来研究，其办法就是给该系统以一个假想的、但是可能的干扰，以分析其是否倾向于恢复原有的状态，从而判定其是否平衡或稳定。这种干扰在结构稳定问题中指的就是虚位移，用数学语言说就是位移的变分。至于如何判定结构物在产生虚位移后是否倾向于恢复原有状态，则须分析结构物的能量变化。

本书只研究结构的静力稳定问题。一个结构物在重力作用下具有位能，在外力作用下由于变形而在其内部储有形变能，我们称二者之和为总势能。因为任何系统总是力图释放其能量产生运动并做功的，因此结构物总是倾向于沿着能降低其总势能的方向运动，而在约束允许的条件下力图居于具有最小总势能的位置。

现以示意图1—1为例来讨论与判定结构平衡与稳定问题的能量准则。

图中的横坐标u表示结构物的变形。纵坐标Π表示结构的总势能，它由形变能U和外力位能V所组成，即

$$\Pi = U + V \qquad (1-1)$$

Π、U和V都是u的泛函。以$abcdef$线表示结构物总势能Π随变形u而变化的规律。

如结构物的变形为u时，具有总势能$\Pi[u]$，当给其以

微小虚位移 δu 时，其总势能成为 $\Pi[u+\delta u]$。根据泰勒级数，其总势能增量为

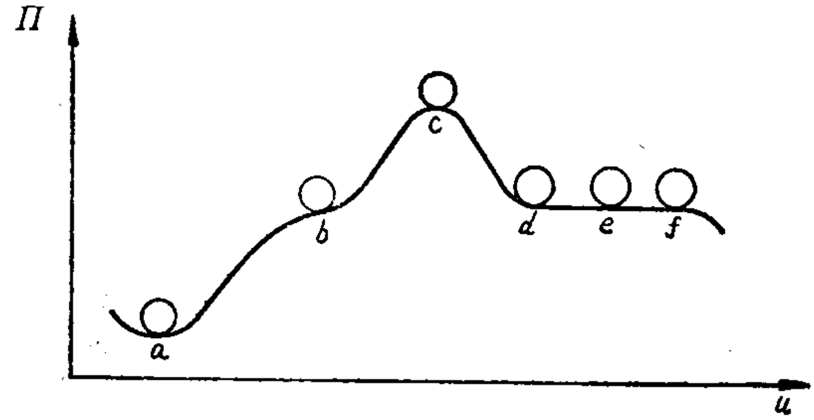

图 1—1

$$\Delta\Pi=\Pi[u+\delta u]-\Pi[u]$$

$$=\delta\Pi+\frac{1}{2!}\delta^2\Pi+\frac{1}{3!}\delta^3\Pi+\cdots \quad (1-2)$$

式中$\delta\Pi$为δu的一阶微量，称为Π的一阶变分；$\delta^2\Pi$为δu的二阶微量，称为Π的二阶变分。图中各小球位置都有水平切线，相当于 $\delta\Pi=0$，势能在此取驻值，亦即结构处于平衡状态。在$\delta\Pi=0$的条件下，$\delta^2\Pi$成为 $\Delta\Pi$ 的主部，并决定$\Delta\Pi$的符号。结构物产生虚位移后，如$\delta^2\Pi$为正，则总势能有所增加；当干扰消失后，它将回到原来的平衡位置，我们即说它处于稳定平衡状态，如小球 a 的位置。其它位置都属于不稳定平衡状态，现归纳如下：

（a）稳定平衡：$\delta\Pi=0$，$\delta^2\Pi>0$

（b）随遇平衡：$\Delta\Pi=0$，或$\delta\Pi=0$，$\delta^2\Pi=0$

（c）不稳定平衡：$\delta\Pi=0$，$\delta^2\Pi<0$

当求驻值时，$\delta\Pi=0$是平衡的充要条件；当求极值时，$\delta\Pi=0$是极值的必要条件，而$\delta^2\Pi$大于或小于0是极值的充分条件。上述事实亦说明，求驻值时，亦即求解平衡问题

时，只需研究一阶微量即可，从而大大简化了计算。在求极值时亦即求解稳定问题时，则需研究二阶微量。在此要特别指出，对于实际工程中的稳定问题，大多根据其问题的类型、特点，利用 $\delta\Pi=0$ 条件即可判定。而二阶微量$\delta^2\Pi$或由于不需应用，或由于不便应用，在实际稳定问题中很少使用，这将在以后予以说明。

二、两类稳定问题

在结构静力学范围内存在着两种性质不同的稳定问题。分清两者的不同特点是十分必要的，因为不同性质的问题解决的方法也各异。下面先以欧拉压杆和有初始弯曲的压杆为例进行计算，然后对它们的特点予以总结。

（一）第一类稳定问题

现用静力法解欧拉压杆问题（图２—１）。轴向压力P作用于两端铰支的理想直杆，当P达到某一数值时，杆件受一微小干扰即可平衡于微弯位置，这时我们就说它处于临界状态。根据静力平衡条件，可求其平衡微分方程式。外力P对任一截面的力矩为

$$M=Py \qquad (2.1-1)$$

杆件相应截面的抗弯力矩为

$$M=-EIy'' \qquad (2.1-2)$$

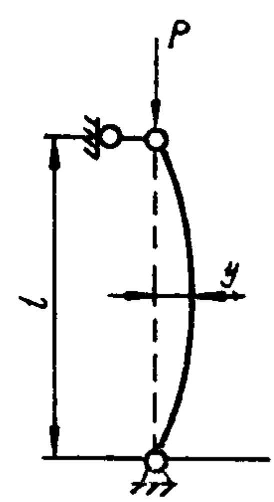

图 2—1

由于弯曲微小，式中用的是近似曲率y''。正弯矩M所造成的曲率半径与y轴正向方向相反，故EIy''前面用负号。将（2.1—2）式代入（2.1—1）式得

$$y''+k^2y=0 \qquad (2.1-3)$$

式中 $$k=\sqrt{\frac{P}{EI}} \tag{2.1—4}$$

（2.1—3）式是常系数线性齐次微分方程，其通解为

$$y=A\cos kx+B\sin kx \tag{2.1—5}$$

式中A，B为积分常数。

边界条件为：

$$\begin{aligned} &x=0\text{ 时，}y=0; \\ &x=l\text{时，}y=0。\end{aligned} \tag{2.1—6}$$

将其代入（2.1—5）式则得

$$\begin{cases} A \qquad\qquad\qquad = 0 \\ A\cos kl+B\sin kl=0 \end{cases} \tag{2.1—7}$$

（2.1—7）式是一线性齐次方程组，它的一个解是$A=B=0$，说明杆件的直线形式是它的一个解，叫做零解。如要求其非零解，就须令A，B系数的行列式等于0，即

$$D_et=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos kl & \sin kl \end{vmatrix}=0 \tag{2.1—8}$$

展开此行列式所得到的方程，称为特征方程，即

$$\sin kl=0 \tag{2.1—9}$$

从而有 $$kl=n\pi$$

将其代入（2.1—4）式得

$$P=\frac{n^2\pi^2EI}{l^2}$$

取$n=1$，得最小的P，即

$$P_{cr}=P_E=\frac{\pi^2EI}{l^2} \tag{2.1—10}$$

式中P_{cr}表示临界荷载；P_E称为欧拉荷载。由（2.1—5）式及（2.1—7）式知

$$y = B\sin\frac{\pi x}{l} \tag{2.1—11}$$

现将欧拉压杆的概念小结一下。杆件是绝对直的、中心受压的、毫无缺陷的理想杆件。在临界状态时，可以平衡于直线与微弯曲两种受力性质不同的状态。这是由于在临界力作用下，杆件以压缩形式所储存的形变能与以微弯曲形式储存的形变能相等，故而产生了弯曲的可能，而原有的铰支支承形式又不能约束这种新的变形形式。这类问题在数学上称做微分方程的特征值问题。其微分方程是线性齐次的，边界条件也是齐次的。不论P为任何值，$y=0$都是（2.1—3）式的一个解。要使其有非零解，亦即要使杆子能平衡于微弯形式，除非P取某些离散的特定的值，这些值就叫做特征值。对应特征值的曲线称为特征曲线。由（2.1—11）式知，这类问题的曲线幅值B是泛定的。如以f代表弯曲的幅值，可知欧拉杆具有图2—2的P-f关系曲线。当$P<P_E$时，f保持为0；当$P=P_E$时，f值不定。力与变形不成正比，即非线性的。这种不是由于材料性质引起的非线性叫做几何非线性。外力不变而杆子可平衡于任意有限小弯曲的位置，这就是随遇平衡状态。解决这类问题的方法可叫随遇平衡法。其要点是，由于已知直线是杆件必然存在的一种平衡形式，

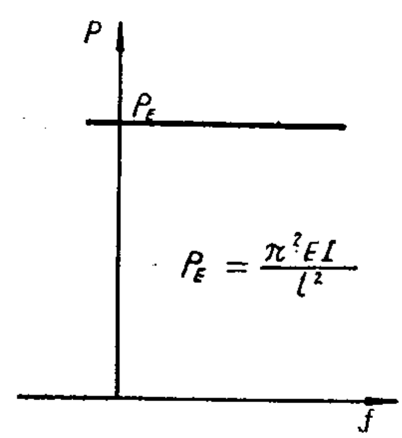

图 2—2

所以只要证明在多大轴压力作用下，杆件也能平衡于微弯形式即可。所以这类问题的临界荷载可定义为，足以保持杆件处于微弯曲形式的荷载，而这类稳定问题在计算上也就转化成为求平衡的问题。

如上所述，对第一类稳定问题可以称为理想杆子稳定性问题、丧失中心受压形式的稳定性问题、随遇平衡问题、特征值问题等。这些提法都从不同角度说明了这一类稳定问题的特点，也可称之为理想型稳定问题。

（二）第二类稳定问题

现以图 2—3 的具有初弯曲的柱为例，说明第二类稳定性问题*。

设杆件形心轴线在受载前即有微小弯曲。令其初始弯曲的形状为

$$y_0 = a_0 \sin\frac{\pi x}{l} \qquad (2.2—1)$$

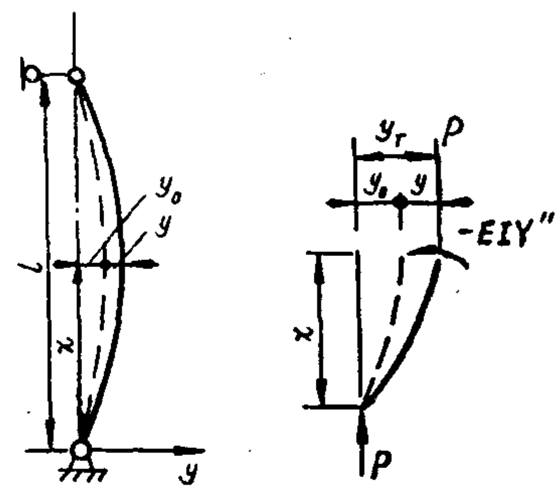

图 2—3

杆内任何截面的抗弯力矩不是由于y_0，而是由于 y 引起的，故

$$M = -EIy''$$

荷载P所产生的弯曲力矩为$P(y+y_0)$，故得

$$EIy'' + P(y+y_0) = 0 \qquad (2.2—2)$$

将（2.2—1）代入，并令

$$k^2 = \frac{P}{EI}$$

得

$$y'' + k^2 y = -k^2 a_0 \sin\frac{\pi x}{l} \qquad (2.2—3)$$

这个方程的解由余解y_c和特解y_p组成，即

$$y + y_c + y_p$$

---

* 这一证明引自〔6〕

余解为（2.2—3）式相应的齐次方程的通解，即

$$y_c = A\sin kx + B\cos kx$$

特解是（2.2—3）式的任何一个解，可写成如下形式：

$$y_p = C\sin\frac{\pi x}{l} + D\cos\frac{\pi x}{l} \qquad (2.2—4)$$

将（2.2—4）代入（2.2—3）式，合并同类项得

$$\left[C\left(k^2 - \frac{\pi^2}{l^2}\right) + k^2 a_0\right]\sin\frac{\pi x}{l} + \left[D\left(k^2 - \frac{\pi^2}{l^2}\right)\right]\cos\frac{\pi x}{l} = 0$$

只有两个方括号的值都为零时，此方程才能对任何 x 值都满足。因此有

$$C = \frac{a_0}{\dfrac{\pi^2}{k^2 l^2} - 1}$$

$$D = 0 \text{ 或 } k^2 = \frac{\pi^2}{l^2}$$

如取 $k^2 = \frac{\pi^2}{l^2}$，则得到 $P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = P_E$，这不是我们所要研究的情况，故必须取 $D = 0$。

引入符号

$$\alpha = \frac{P}{P_E}$$

于是有

$$C = \frac{a_0}{\dfrac{1}{\alpha} - 1} = \frac{a_0\alpha}{1-\alpha}$$

从而

$$y_p = \frac{a_0\alpha}{1-\alpha}\sin\frac{\pi x}{l} \qquad (2.2—5)$$

$$y = A\sin kx + B\cos kx + \frac{\alpha}{1-\alpha}a_0\sin\frac{\pi x}{l} \qquad (2.2—6)$$

式中的任意常数可根据边界条件求得。

由 $x=0$ 时，$y=0$，有

$$B=0$$

由 $x=l$ 时，$y=0$，有

$$A\sin kl=0$$

如 $A\neq 0$，其解又局限于 $P=P_E$，因此有

$$A=0$$

从而（2.2—6）成为

$$y=\frac{\alpha}{1-\alpha}a_0\sin\frac{\pi x}{l} \qquad (2.2—7)$$

于是得到总挠度 y_T 为

$$y_T=y_0+y=\left(1+\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)a_0\sin\frac{\pi x}{l}$$

$$=\frac{a_0}{1-\alpha}\sin\frac{\pi x}{l} \qquad (2.2—8)$$

以 f 表示杆件中点的总挠度，则

$$f=\frac{a_0}{1-\alpha}=\frac{a_0}{1-\dfrac{P}{P_E}} \qquad (2.2—9)$$

图 2—4 给出了两种初弯曲值时，f 随 P/P_E 而变化的情况。

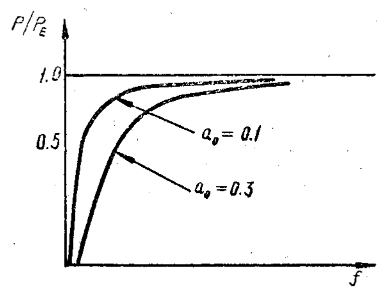

图 2—4

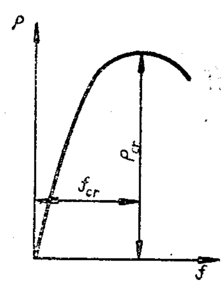

图 2—5

现在把这类稳定问题的特点小结一下。杆件只有微弯一种受力及变形形式，一旦受到荷载作用即开始弯曲变形，变形的结果增加了荷载的弯曲力臂，使得弯矩的增长率随变形而增加。如果将弯矩看做输入，变形看做输出，则可说变形对弯矩有反馈作用，从而使 P-f 曲线成为非线性。按（2.2—9）式计算，当P达到 P_E 时，变形将成为无穷大，这当然是不可能的。因为该式是按近似曲率及材料为线弹性条件推导的 只能在 f 不太大时有效。这类稳定问题有时其P-f曲线还可呈图 2 — 5 的形状。对比图 2 — 4 与图 2 — 5 ，可知前者在有效使用范围无极值点，而后者则有极值点。而实际工程问题则多如图 2 — 5 。原因是当变形发展到一定程度时（一般数值不大），就将产生材料进入塑性阶段，约束能力降低或破坏（如无缝线路道床阻力的破坏）等一系列问题，从而使结构物丧失承载能力，产生能量的突然释放。由于上述因素，所以实际结构的承载能力就由图 2 — 4 变成为图 2 — 5 。

第二类稳定问题可以称为非理想杆子问题，也可称之为实际型稳定问题。目的是为了更好地把这两类稳定问题的性质分清楚。第一类稳定问题的杆子只是一种理想化的模型，对它的研究更多的是具有理论上的指导意义；而对于实际工程问题则需要具体分析一些问题，至少有两方面的因素需要研究。以压杆问题为例，一方面是杆件偏离理想杆件的程度，如加压的偏心、杆件的初弯曲、材质不均、非理想铰支承、杆件内部有残余应力等；另一方面则是由于变形而产生的问题，如材料的屈服等。所以在钢结构学科中，将考虑了上述因素的杆子的承载能力问题称为压溃问题，而将欧拉杆件问题称为屈曲问题。目的就是将这两者明确区别开来。对于无缝线路稳定性问题同样如此，它必须考虑轨道的初始

不平顺，以及将轨道框架视为一根杆件而与理想杆件的差别，同时还要考虑由于变形而造成的道床约束力的变化和破坏等，所以它属于第二类稳定问题。

三、静力平衡与势能驻值

在上一节求解两个压杆稳定问题时用的都是静力法，即先根据静力平衡条件得出平衡微分方程，然后按定解条件求解。这样求出的解是精确解，但对大多数实际工程问题来说，其微分方程比较复杂，难于或根本无法求得其精确解，从而不得不求其近似解。求近似解的主要方法之一就是能量法。由上节我们还知道，无论求解那类稳定问题都要用静力平衡条件，而静力平衡与势能驻值这两个条件是等价的。下面将对这一论断进行证明。

（一）刚体虚功原理

我们的主要目的是要研究可变形体的虚功原理，但为了对虚功原理问题有一个全面概念，先回顾一下质点及刚体虚功原理。设质点M在一力系作用下处于平衡状态（图3－1），如给质点以任意微小可能的虚位移δu，力系中各力在虚位移方向之分力对虚位移所作之功称为虚功。则质点虚功原理表述为：质点处于力的平衡状态时的充要条件是力系各力所作虚功之和等于0。

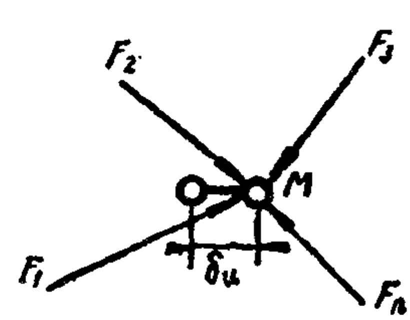

图 3－1

用δW表示虚功之和，则从图3－1可知

$$\delta W=\sum_{1} F_i\cos\theta_i\,\delta u=0 \qquad (3.1-1)$$

式中$\cos\theta_i$是F_i方向与δu方向夹角的方向余弦。如已知 $\delta W=0$，由于 δu 为任意非零虚位移，故必有$\sum_{1}^{n}F_i\cos\theta_i=0$，即$M$处于平衡状态。反之，如已知$\sum_{1}^{n}F_0\cos\theta_i=0$，则必有$\delta W=0$。所以虚功原理与力的平衡等价。

刚体是一个质点系，各质点间距离固定不变，因此只要把质点换成刚体，则上述虚功原理亦完全适用于刚体。不过为了减少计算的自由度，要求虚位移应满足位移的约束条件。

应用虚功原理时应注意：

（1）虚位移不是由力系本身引起的，与系统的实际运动无关，它应是无限小的，或说足够小，以致在虚位移过程中可以把力的大小和方向当作是不变的；同时又是为约束条件所允许的任意可能的位移。它必须沿任意可能的虚位移方向δW都等于0，刚体才能处于平衡状态。虚位移δu用了变分符号，一方面表示u可能是某个自变量的函数，例如是时间t的函数或是某个泛函自变函数，另外表示为虚的。以后凡提到虚位移时，就一定包含上述含义，不再重复。

（2）力系中各力在虚位移过程中其大小及方向不变。具体解释如下：在图3—2中有一重量为Q的刚体球，静止于刚度系数为K的弹簧上，弹簧反力为R。球在Q、R作用下处于平衡状态。如按虚功原理给球以约束所允许的虚位移δu，在此过程中令Q

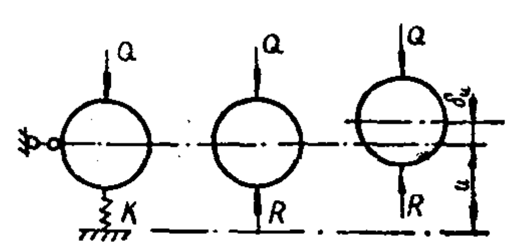

图 3—2

及R不变，则得

$$\delta W = R\delta u - Q\delta u = (R-Q)\delta u = 0 \qquad (3.1—2)$$

但从实际情况来看，在球产生微小可能位移时，重力Q不变是符合实际的，而对弹簧反力R来说，不论位移多小，R总是要随之而变的。那么虚功原理规定力不变的实际意义是什么呢？

现以另一方式处理此问题，即令反力R随小球位移而变化，当发生虚位移时，其虚功以$\varDelta W$表示，这时有

$$\begin{aligned}
\varDelta W &= \int_u^{u+\delta u} R\,du - Q\delta u \\
&= \int_u^{u+\delta u} Ku\,du - Q\delta u \\
&= \frac{1}{2}Ku^2\Big|_u^{u+\delta u} - Q\delta u \\
&= \frac{1}{2}K[(u+\delta u)^2 - u^2] - Q\delta u \\
&= Ku\delta u + \frac{1}{2}K(\delta u)^2 - Q\delta u \\
&= (R-Q)\delta u + \frac{1}{2}K(\delta u)^2 \qquad (3.1—3)
\end{aligned}$$

比较（3.1—2）式与(3.1—3)式可知，虚功原理中的δW相当于$\varDelta W$的线性主部，即与δu成正比的部分，只要这部分等于0,体系即处于平衡状态。而与δu^2成比例的高阶项对于研究平衡问题并没有作用，所以虚功原理规定在虚位移过程中力的大小是不变的。这样做的结果，就使得力的系统与虚位移系统成为相互独立而无关的了。

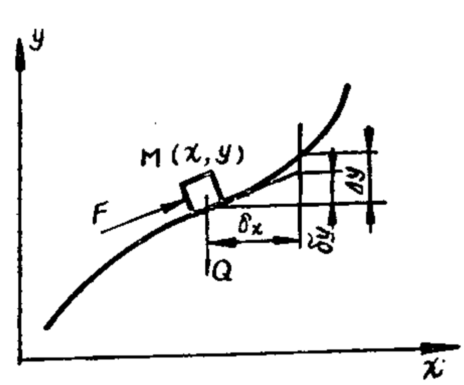

图 3—3

关于力的方向问题与此类似。在图3—3中，刚体M在

力系F，Q作用下平衡于（x_1，y_1）点。M只能沿约束曲线$y(x)$运动。如给M以微小虚位移δx，则M仍应在约束曲线上，即应满足

$$\begin{aligned}\Delta y &= y(x+\delta x)-y(x)\\ &= \frac{dy}{dx}\delta x+\frac{1}{2!}\ \frac{d^2y}{dx^2}(\delta x)^2+\cdots\end{aligned}$$

因δx很小，可以略去高阶微量，于是得

$$\delta y=\frac{dy}{dx}\delta x$$

$\frac{dy}{dx}$是(x_1，y_1)点切线的斜率，则略去高阶微量的结果，是使虚位移$\delta u=\sqrt{\delta x^2+\delta y^2}$发生在切线方向上，从而当虚位移很小时，刚体$M$与力系的相对方向保持不变。同样道理，如约束为一曲面，则虚位移应取在过初始点的切平面上。由上可知，变分符号δ具有与微分符号d类似的线性含义。

（二）可变形体虚功原理

可变形体指包括线弹性体在内的具有各种应力应变特性的可变形连续体。由于此一力学模型与离散质点力学模型根本不同，故可变形体虚功原理很难从质点虚功原理直接推出。近年来国内已有不少文献对此问题进行了讨论。鉴于可变形体虚功原理的重要性。本节将对其进行较详细的讨论。

可变形体虚功原理可表述为：可变形体平衡的必要与充分条件是对任意微小虚位移，外力虚功等于可变形体的虚变形功，即

$$\delta W_{外}=\delta W_{变} \qquad (3.2-1)$$

式中　$\delta W_{外}$——外力对可变形体所作虚功；