最优化方法

解可新　韩立兴　林友联

天　津　大　学　出　版　社

最优化方法

解可新　韩立兴　林友联

天津大学出版社

内容提要

最优化方法是一门新兴的应用数学分支。本书是根据“工科硕士研究生最优化方法课程基本要求”为工科硕士研究生及本科生编写的该课程教材。内容包括线性规划、非线性规划、多目标规划与动态规划四部分。每部分内容着重阐明基本理论与基本方法，也给出了很有实用价值的新方法，并辅之以相应的例子和习题。

本书经“工科研究生课程指导委员会数学课程指导小组”评审，得到众多同行专家的肯定并加以推荐。评语为：“概念清晰，重点突出，选材针对性较强，理论分析详简合适，对于优化及其应用问题阐明清楚，便于教学，具有较好的可读性。”

最优化方法

解可新　韩立兴　林友联

*

天津大学出版社出版

（天津大学内）

邮编：300072

河北省永清县印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本：850×1168　毫米 1/32　印张：10 3/8　字数：243 千

1997 年 1 月第一版　　1997 年 1 月第一次印刷

印数：1－3000

ISBN 7-5618-0940-9

O·91　定价：10.80 元

前　言

追求最优目标是人类的理想，最优化方法就是从众多可能方案中选择最佳者，以达到最优目标的科学。它是一门新兴的应用数学分支。近二、三十年来随着电子计算机的普遍应用而迅猛发展，已经广泛地应用于国民经济各个部门和科学技术的各个领域中。

最优化理论和方法的内容极其广博，由于篇幅和学时所限，根据工科研究生课程指导委员会制定的“工学硕士研究生最优化方法课程教学基本要求”，结合天津大学为本校硕士研究生和本科生编写的最优化理论与方法教材及多年来教学实践的体会，我们选取了线性规划、非线性规划、多目标规划与动态规划四部分。每部分内容着重阐明基本理论与基本方法。既阐述了经过长期考验被认为是有效的方法，也给出了很有实用价值的新方法，并辅之以相应的例题和习题，以便给读者在该领域的深入学习和研究打下良好的基础。对于一些证明较冗长和复杂的定理，我们只给出定理的内容，证明从略。

本书力求深入浅出，通俗易懂。凡是学过高等数学和线性代数的读者均能学习。本书既可作为工科硕士研究生和高年级大学生学习本门课程的教材，也可以作为从事应用数学、管理工程、系统工程及工程设计方面工作的广大科技人员的参考书。

1994 年应工科研究生课程指导委员会数学课程指导小组的征稿，我们将本书稿向该课程指导小组投标。经过全国多名同行专家的评审及课程指导小组全体委员的认真讨论得以通过，并给予高度评价：“概念清晰，重点突出，选材针对性较强，理论分析详简合适，对于优化及其应用问题阐明清楚，便于教学，具有较好的可读性。”

由于编者水平所限，缺点和错误在所难免，敬请读者予以批评指正。

作者

一九九六年四月

于天津大学数学系

符号说明

$A\backslash B$	集合 A 和集合 B 的差集
$A\cup B$	集合 A 和集合 B 的并集
$A\cap B$	集合 A 和集合 B 的交集
$A\subset B$	集合 B 包含集合 A
$A-\{p\}$	从集合 A 中删除元素 p 后的集合
$A+\{q\}$	对集合 A 添加元素 q 后的集合
$\boldsymbol{x}$	n 维列向量
$\boldsymbol{R}^n$	n 维向量空间
$\Vert\cdot\Vert$	向量的范数或矩阵的范数
$\boldsymbol{a}^T$	向量的转置
B^T	矩阵的转置
B^{-1}	矩阵 B 的逆矩阵
$f(\boldsymbol{x})$	目标函数
$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$	向量目标函数 $F(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x}))^T$
$\nabla f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$	函数 $f(\boldsymbol{x})$的梯度向量 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\nabla f(\boldsymbol{x})=(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n})^T$
$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}),G(\boldsymbol{x})$	$f(\boldsymbol{x})$的Hesse矩阵，其第 i 行第 j 列的元素为$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i\partial x_j}$
$c_i(\boldsymbol{x})$	第 i 个约束函数
$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})$	向量约束函数，例如 $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})=(c_1(\boldsymbol{x}),\cdots,c_l(\boldsymbol{x}))^T$
$\nabla c_i(\boldsymbol{x})$	第 i 个约束函数的梯度向量
$\nabla c(\boldsymbol{x})$	以$\nabla c_i(\boldsymbol{x})$为列的矩阵，例如

$\nabla \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})=(\nabla \boldsymbol{c}_1(\boldsymbol{x}),\cdots,\nabla \boldsymbol{c}_l(\boldsymbol{x}))$

$\boldsymbol{x}^*$ 最优化问题的最优解

$\boldsymbol{x}_k$ 解 $\boldsymbol{x}^*$ 的第 k 次近似

$s=\{x|x$ 所满足的性质$\}$

满足某些性质的 x 的全体(集合)

$x\in s$ x 属于集合 s

$x\overline{\in}s$ x 不属于集合 s

目　　录

第一章　最优化问题概述

最优化理论和方法是第二次世界大战后迅速发展起来的一个新学科，随着现代化生产的发展和科学技术的进步，最优化理论和方法日益受到人们的重视。现在它已渗透到生产、管理、商业、军事、决策等各领域。本章由几个实例入手，说明最优化问题的数学模型及有关的概念，并叙述求解最优化问题的迭代算法。最后给出一维搜索的几个方法。

§1.1　最优化问题的数学模型与基本概念

最优化问题的实例一般都比较复杂，为了便于理解，我们只举几个简单的例子。

例1.1.1　运输问题　设有m个水泥厂 $A_1,A_2,\cdots A_m$，年产量各为 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 吨。有 k 个城市 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 用这些水泥厂生产的水泥，年需求量各为 $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 吨。再设由 A_i 到 B_j 每吨水泥的运价为 c_{ij}元。假设产销是平衡的，即 $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i=\sum\limits_{j=1}^{k}b_j$。试设计一个调运方案，在满足需要的同时使总运费最省。

设 A_i 调往 B_j 的水泥为 x_{ij}吨，则问题化为求总运费

$$S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}c_{ij}x_{ij}$$

的极小值，且满足下面的条件

$$\sum_{j=1}^{k}x_{ij}=a_i,\quad i=1,2,\cdots,m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j \quad ,j=1,2,\cdots k;$$

$$x_{ij}\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots m,\quad j=1,2,\cdots,k。$$

例 1.1.2 生产计划问题 设某工厂有 m 种资源 $B_1,B_2,\cdots,B_m$，数量各为 $b_1,b_2,\cdots,b_m$。用这些资源生产 n 种产品 $A_1,A_2,\cdots,A_n$。每生产一个单位的 A_j 产品需要消耗资源 B_i 的量为 a_{ij}。根据合同规定，产品 A_j 的量不少于 d_j。再设 A_j 的单价为 c_j。问如何安排生产计划，才能既完成合同，又使该厂总收入最多？

设产品 A_j 的计划产量为 x_j，总产值 $y=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$，则问题化为求总产值

$$y=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

的极大值，且满足条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leqslant b_i,\quad i=1,2,\cdots,m;$$

$$x_j\geqslant d_j,\quad j=1,2,\cdots,n。$$

例 1.1.3 指派问题 设有四项任务 B_1,B_2,B_3,B_4，派四个人 A_1,A_2,A_3,A_4 去完成。每个人都可以承担四项任务中的任何一项，但所耗费的资金不同。设 A_i 完成 B_j 所需资金为 c_{ij}。如何分配任务，使总支出最少？

$$设变量\ x_{ij}=\begin{cases}1, & 指派\ A_i\ 去完成\ B_j;\\ 0, & 不派\ A_i\ 去完成\ B_j。\end{cases}$$

总支出为 $S=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij}$，则问题化为使总支出 S 最小且满足条件

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij}=1,\quad i=1,2,3,4;$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij}=1,\quad j=1,2,3,4。$$

$$x_{ij}=0\ 或\ 1\ .$$

这里的变量 x_{ij} 叫 0－1 变量。

例 1.1.4 数据拟合问题 在实验数据处理或统计资料分析中常遇到如下问题。设两个变量 x 和 y，已知存在函数关系，但其解析表达式或者是未知的或者虽然为已知的但过于复杂。设已取得一组数据。

$$(x_i, y_i), \quad i=1,2,\cdots,m。$$

根据这一组数据导出函数 $y=f(x)$ 的一个简单而近似的解析表达式。

取一个简单的函数序列 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$，比如取幂函数列 $1,x,x^2,\cdots,x^n$，作为基本函数系。求 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 的一个线性组合 $\sum\limits_{j=0}^{n}\alpha_j\varphi_j(x)$，作为函数 $f(x)$ 的近似表达式。而系数 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的选取要使得平方和

$$Q=\sum_{i=1}^{m}[y_i-\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\varphi_j(x_i)]^2$$

最小。此问题的变量为 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$。对这些变量没有限制。这种问题又叫最小二乘问题。

例 1.1.5 两杆桁架的最优设计问题

两杆桁架由两根等长的园钢管组成，如图 1-1 所示。图 1-2 是钢管的截面图。设桁架的跨度为 $2s$，钢管壁厚为 t，抗压强度为 Δ_0，弹性模量为 E。求钢管的直径 d 及桁架的高度 h，使得桁架在点 A 处承受垂直载荷 $2P$ 时不出现屈曲或弹性变形，并使桁架尽可能轻。

此问题中 s,t,Δ_0,E,P 都是已知量，设计变量是变量 d 和 h。

设计的目标是使桁架的重量最轻，这等价于使桁架的体积最小，所以求函数

$$f(d,h)=2\pi dt(h^2+s^2)^{\frac{1}{2}}$$

的极小值。对于变量 d 和 h 的限制可做如下考虑。

当桁架于 A 点承受垂直载荷 $2P$ 时，每根钢管所受的压力是

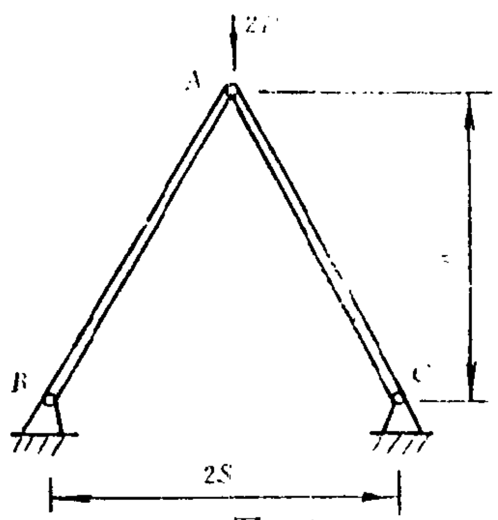

图 1-1

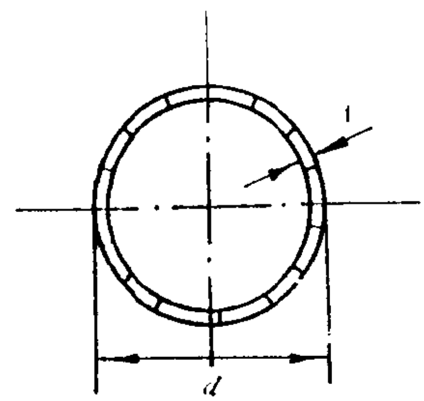

图 1-2

$P(h^2+s^2)^{\frac{1}{2}}/h$，因而杆件的单位截面积所受的压力为

$$\Delta=\frac{P(h^2+s^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi dth}。$$

根据结构力学原理，对于选定的钢管，不出现屈曲的条件是 $\Delta<\Delta_0$，即需满足不等式

$$\Delta_0-\frac{P(h^2+s^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi dth}\geqslant 0,$$

而不出现弹性弯曲的条件为

$$\Delta\leqslant\frac{\pi^2E(d^2+t^2)}{8(h^2+s^2)},$$

再考虑到 d 和 h 的选择还受到尺寸的限制，这可用下面的不等式表示

$$d_1\leqslant d\leqslant d_2,\quad h_1\leqslant h\leqslant h_2。$$

由上面的几个例子可以看出，最优化问题的一般数学模型为

$$\min \quad f(\boldsymbol{x}) \tag{1.1}$$

$$(P)\quad \text{s.t.}\quad h_i(\boldsymbol{x})=0,\quad i=1,\cdots,m; \tag{1.2}$$

$$g_j(\boldsymbol{x})\geqslant 0,\quad j=1,\cdots,p。 \tag{1.3}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in R^n$，即 $\boldsymbol{x}$ 是 n 维向量。在实际问题中也常常把变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 叫决策变量。$f(\boldsymbol{x})$，$h_i(\boldsymbol{x})$，$(i=1,\cdots,m)$，$g_j(\boldsymbol{x})$，$(j=1,\cdots,p)$为 $\boldsymbol{x}$ 的函数。*s.t.* 为英文“*subject to*”的缩写，表示

受限制于。

求极小值的函数 $f(\boldsymbol{x})$ 称为目标函数，$h_i(\boldsymbol{x})(i=1,\cdots,m)$，$g_j(\boldsymbol{x})$，$(j=1,\cdots,p)$ 称为约束函数，其中 $h_i(\boldsymbol{x})=0$ 称为等式约束，而 $g_j(\boldsymbol{x})\geqslant 0$ 称为不等式约束。对于求目标函数极大值的问题，由 $\max f(\boldsymbol{x})=\min[-f(\boldsymbol{x})]$ 化为求极小值问题。

前面所举的几个例子都可用最优化问题的数学模型表示。如其中的例 1.1.1 运输问题可表示为

$$
\begin{aligned}
\min \quad & S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}c_{ij}x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{k}x_{ij}=a_i, \quad i=1,2,\cdots,m; \\
& \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j, \quad j=1,2\cdots,k; \\
& \quad x_{ij}\geqslant 0, \quad i=1,\cdots,m, \quad j=1,\cdots,k。
\end{aligned}
$$

例 1.1.4　数据拟合问题的数学模型为

$$
\min \quad Q=\sum_{i=1}^{m}[y_i-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\varphi_j(x_i)]^2。
$$

例 1.1.5　桁架问题的数学模型为

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(d,h)=2\pi dt(h^2+s^2)^{\frac{1}{2}}, \\
\text{s.t.} \quad & \Delta_0-\frac{P(h^2+s^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi dth}\geqslant 0, \\
& \frac{\pi^2E(d^2+t^2)}{8(h^2+s^2)}-\frac{P(h^2+s^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi dth}\geqslant 0, \\
& d-d_1\geqslant 0, \\
& d_2-d\geqslant 0, \\
& h-h_1\geqslant 0, \\
& h_2-h\geqslant 0。
\end{aligned}
$$

满足约束条件(1.2)和(1.3)的 $\boldsymbol{x}$ 称为可行解，或可行点，或容许解。全体可行解构成的集合称为可行域或容许集，记为 D，即

$$D=\{x \mid h_i(x)=0, \quad i=1,\cdots,m, \quad g_j(x)\geqslant 0,$$
$$j=1,\cdots, \quad P, \quad x\in R^n\}$$

若 $h_i(x)$，$g_j(x)$ 是连续函数，则 D 是闭集。

定义 1.1.1 若 $x^*\in D$，对于一切 $x\in D$ 恒有 $f(x^*)\leqslant f(x)$，则称 x^* 为最优化问题(P)的整体最优解。

若 $x^*\in D$，对于一切 $x\in D$，$x\neq x^*$，恒有 $f(x^*)<f(x)$，则称 x^* 为问题(P)的严格整体最优解。

定义 1.1.2 若 $x^*\in D$，存在 x^* 的某邻域 $N_\varepsilon(x^*)$，使得对于一切 $x\in D\cap N_\varepsilon(x^*)$ 恒有 $f(x^*)\leqslant f(x)$ 则称 x^* 为最优化问题(P)的局部最优解。其中 $N_\varepsilon(x^*)=\{x \mid \|x-x^*\|<\varepsilon,\varepsilon>0\}$。$\|\cdot\|$ 是范数。

当 $x\neq x^*$，且上面的不等式为严格不等式 $f(x^*)<f(x)$ 时，则称 x^* 为问题(P)的严格局部最优解。

显然，整体最优解一定是局部最优解，而局部最优解不一定是整体最优解。求解最优化问题(P)，就是求目标函数 $f(x)$ 在约束条件(1.2)、(1.3)下的极小点，实际上是求可行域 D 上的整体最优解。但是，在一般情况下，很不容易求出整体最优解，往往只能求出局部最优解。

最优解 x^* 对应的目标函数值 $f(x^*)$ 称为最优值。常用 f^* 表示。

在定义 1.1.2 中我们用到了范数 $\|\cdot\|$。范数是最优化方法中常遇到的一个概念，为此下面给出范数的定义。

定义 1.1.3 在 n 维线性空间 R^n 中，定义实函数 $\|x\|$，使其满足以下三个条件：

(1)对任意 $x\in R^n$ 有 $\|x\|\geqslant 0$，当且仅当 $x=\mathbf{0}$ 时 $\|x\|=0$；

(2)对任意 $x\in R^n$ 及实数 α 有 $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$；

(3)对任意 $x,y\in R^n$ 有 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$

则称函数 $\|x\|$ 为 R^n 上的向量范数。

对于任意 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T\in R^n$，$1\leqslant p<\infty$，称$(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p}$为向

量 x 的 p-范数，记作 $\|x\|_p$，即

$$\|x\|_p=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p}, \qquad (1\leqslant p<\infty)$$

称 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$ 为 ∞-范数，记作 $\|x\|_\infty$，即

$$\|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|。$$

在 p-范数中，用得最多的是 2-范数，即

$$\|x\|_2=(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^{\frac{1}{2}}。$$

因此常记 $\|\cdot\|_2$ 为 $\|\cdot\|$。

根据目标函数与约束函数的不同形式，可以把最优化问题分为不同的类型。

若根据数学模型中有无约束函数分类，可分为有约束的最优化问题和无约束的最优化问题。在数学模型中 $m=0,p=0$，即不存在约束的最优化问题称为无约束最优化问题，否则称为约束最优化问题。

亦可根据目标函数和约束函数的函数类型分类。若 $f(x)$、$h_i(x)$，$(i=1,\cdots,m)$ 与 $g_j(x)$，$(j=1,\cdots,p)$ 都是线性函数，则最优化问题(P)称为线性规划。若其中至少有一个为非线性函数，则称问题(P)为非线性规划。

另外，对于某些特殊类型的 $f(x)$，$h_i(x)$ 和 $g_j(x)$ 而言，还有一些特殊类型的最优化问题。如目标函数为二次函数，而约束函数全部是线性函数的最优化问题称为二次规划。当目标函数不是数量函数而是向量函数时，就是多目标规划。还有用于解决多阶段决策问题的动态规划等。前面所给出的几个例子中，例 1.1.1、例 1.1.2 及例 1.1.3 是线性规划。其中例 1.1.3 因为其变量只取 0 和 1 两个值，又叫 0－1 规划。例 1.1.4 是无约束的非线性规划问题。例 1.1.5 是有约束的非线性规划问题。

§ 1.2 最优化问题的一般算法

求解最优化问题(P)的基本方法是给定一个初始可行点 $x_0 \in D$，由这个初始可行点出发，依次产生一个可行点列 $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$，记为 $\{x_k\}$，使得或者某个 x_k 恰好是问题的一个最优解，或者该点列 $\{x_k\}$ 收敛到问题的一个最优解 x^*。这就是我们平时所说的迭代算法。在迭代算法中由点 x_k 迭代到 x_{k+1} 时，要求 $f(x_{k+1}) \leqslant f(x_k)$，称这种算法为下降算法。点列 $\{x_k\}$ 的产生，通常采取两步来完成。首先在可行域内 x_k 点处求一个方向 p_k，使得 $f(x)$ 沿方向 p_k 移动时函数值有所下降，一般称这个方向为下降方向或搜索方向。其次以 x_k 为出发点，以 p_k 为方向作射线 $x_k + \alpha p_k$，其中 $\alpha > 0$，在此射线上求一点 x_{k+1}，$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$，使得 $f(x_{k+1}) < f(x_k)$，其中 α_k 称为步长。

定义 1.2.1 在点 x_k 处，对于向量 $p_k \neq 0$，若存在实数 $\bar{\alpha} > 0$，使任意的 $\alpha \in (0, \bar{\alpha})$ 有

$$f(x_k + \alpha p_k) < f(x_k)$$

成立，则称 p_k 为函数 $f(x)$ 在点 x_k 处的一个下降方向。

当 $f(x)$ 具有连续的一阶偏导数时，并记 $f(x)$ 在 x_k 处的梯度为 $\nabla f(x_k) = g_k$。由 Taylor 公式，

$$f(x_k + \alpha p_k) = f(x_k) + \alpha g_k^T p_k + o(\alpha)$$

当 $g_k^T p_k < 0$ 时，有 $f(x_k + \alpha p_k) < f(x_k)$，所以 p_k 是 $f(x)$ 在 x_k 处的一个下降方向。反之，当 p_k 是 $f(x)$ 在 x_k 处的下降方向时，有 $g_k^T p_k < 0$。所以也称满足

$$g_k^T p_k < 0$$

的方向 p_k 为 $f(x)$ 在 x_k 处的下降方向。

定义 1.2.2 已知区域 $D \subset R^n$，$x_k \in D$，对于向量 $p_k \neq 0$，若存在实数 $\bar{\alpha} > 0$，使得任意的 $\alpha \in (0, \bar{\alpha})$ 有

$$x_k + \alpha p_k \in D,$$