电动力学教程

李承祖　赵凤章　编著

国防科技大学出版社

[湘]新登字第009号

内 容 简 介

书中系统阐述了电动力学的基本理论和方法。内容包括：数学准备，电动力学的理论基础，静电场，稳恒电场和稳恒磁场，电磁波的传播，电磁波的辐射和散射，狭义相对论和相对论电动力学，微观电磁现象的经典近似理论等。全书结构严谨，主线条清晰，注重数学工具的掌握和分析能力的训练。

本书可作为理工科大学本科生电动力学课教材，也可供综合大学、高等师范院校物理专业的学生选用。亦可供有关专业研究生、教师参考。

电动力学教程

李承祖　赵凤章　编著

责任编辑　李　毅

责任校对　陈文宽

*

国防科技大学出版社出版

（长沙市砚瓦池正街47号）

邮编：410073　电话：4436564

新华书店总店科技发行所经销

湖南大学印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　　印张：10.75　字数：270千

1994年8月第1版第1次印刷　印数：1000册

ISBN　7-81024-295-4

O.33　　　定价：9.8元

JY1/111/12

前　　言

本书是作者在国防科技大学应用物理系多年讲授电动力学讲稿的基础上修改补充而成的。

全书共分八章。第一章介绍了书中使用的主要数学工具。第二章通过对电磁现象实验规律的分析概括，总结出电磁现象的普遍规律。第三～六章由这些普遍规律出发，分别讨论了静电场，稳恒电磁场，电磁波的传播，电磁波的辐射和散射。第七章阐明狭义相对论的基本原理、狭义相对论对物理规律可能的数学形式的限制，并由此讨论了相对论电动力学和相对论力学等内容。第八章把宏观电动力学理论作为微观电磁现象的近似理论，讨论了带电粒子和电磁场的相互作用，并用电子与电磁场相互作用这种微观机制，解释介质的某些宏观电磁性质。

在本书编写过程中，作者致力于以下几点：

1. 努力把教材内容纳入主线条清晰、结构严谨、内在逻辑性强的理论体系。作者认为这样不仅有利于学生把握电动力学理论、方法，而且有助于对学生加强科学方法的训练。

2. 注重数学工具的掌握和分析能力的训练。书中一些关键之点都给出了详尽的数学推导。

3. 努力加强理论与实际联系。在强调基本理论训练的同时，也讨论了诸如各向异性媒质中的波，多层介质中的波，辐射和散射问题的积分方程等工程实际问题。比较详细地讨论了波导管和谐振腔。为了适应高速计算机出现后电磁场数值分析的需要，还尽量使

表述和结论适合于数值计算。比如采用传输矩阵方法分析多层介质中的波，采用纵向场方法处理波导问题就是基于这种考虑。辐射和散射问题的积分方程都有有效的数值解法，静电场和稳恒电磁场的泊松方程本身就很适合数值分析。

4. 精选了和教学内容进度配合比较密切、深浅较为适宜的例题和习题。

我们希望通过上述努力，在加强基本理论训练的同时，进一步缩小电动力学理论与实际应用之间的距离。

本书第三、四章由赵凤章起草，其余各章由李承祖执笔。李承祖负责全书的统一、整理。

白铭复教授审阅了全部书稿，并对整体结构，内容安排，数学推导以及文字叙述提出了许多重要修改意见和建议。况蕙孙教授对全书结构也提出了许多宝贵意见。作者在此表示衷心感谢。

由于时间仓促，编者学识、水平有限，书中错误，不当之处在所难免。诚恳欢迎读者批评指正。

作　者

1993 年 12 月

目　　录

第二章　电动力学的理论基础

第三章　静电场

第六章　电磁波的辐射和散射

第七章　狭义相对论和相对论电动力学

*第八章　微观电磁现象的经典近似理论

附　录

第一章 数学准备

§1.1 场、梯度、散度和旋度

一、场

如果在一个空间区域中，某个物理量在其中每一点都取确定值，就称这个空间区域存在该物理量的场。如果这个物理量是数量，就称这个场是数量场或标量场；这个物理量若为矢量，就称这个场是矢量场。例如，温度场、电势场是标量场，而电场、磁场是矢量场。

二、数量场的方向导数和梯度

由上述数量场的定义，分布在数量场中各点的物理量 u 是场中点坐标的单值函数：

$$u = u(x) \tag{1.1.1}$$

给定了函数 u 的具体形式，数量 u 在场中的分布就完全确定。在研究数量场时，常常还需要知道 u 在场中各点沿各个方向的变化情况。u 在场中的变化情况往往有更重要的物理意义。例如，若 u 就是电势 φ，φ 在场中各点的变化就决定了各点的电场强度。若 u 是温度，u 在各点的变化就决定了这些点上热传导进行的方向和速度。为了讨论场在空间各点的变化，首先引入方向导数的概念。

方向导数　在场中取一点 M_0，由 M_0 点引射线 l，其方向由方向余弦 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 确定。在 l 上取另一点 M（如图 1.1.1 所示），记 $\Delta u = u(M) - u(M_0)$，$\rho = \overline{M_0M}$. 定义 u 在 M_0 点沿 l 的方向导数为：

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0} = \lim_{M \to M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\overline{M_0 M}}$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta u}{\rho} \tag{1.1.2}$$

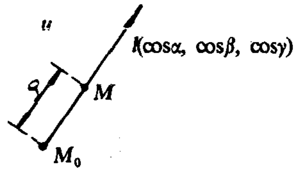

图 1.1.1

方向导数刻画 u 在 M_0 点沿 l 方向的变化率。

设函数 u 在 M_0 点可微，在直角坐标系下

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \omega\rho$$

其中 ω 是在 $\rho \to 0$ 时亦趋于零的小数。将上式代入式(1.1.2)中，注意到 $\Delta x/\rho, \Delta y/\rho, \Delta z/\rho$ 就是直线 l 的方向余弦，得方向导数的计算公式

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \tag{1.1.3}$$

此式对 l 上任意点成立。

一般说来，在场中一点沿着不同的方向 l，场量 u 有不同的方向导数。如果在数量场 u 中定义一个矢量 $\boldsymbol{G}$：

$$\boldsymbol{G} = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{1.1.4}$$

$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 是沿坐标轴 x, y, z 方向的单位矢量，在场中任意点，矢量 $\boldsymbol{G}$ 是唯一的。记沿 l 方向的单位矢量为 $\boldsymbol{l}_0$，由式(1.1.3)得

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{l}_0 = |\boldsymbol{G}|\cos(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{l}_0) \tag{1.1.5}$$

这表明式(1.1.4)定义的 $\boldsymbol{G}$ 具有这样的意义：它在任意方向的投影就给出沿这个方向 u 的方向导数。因此，**矢量 $\boldsymbol{G}$ 的方向就是 u 变化率最大的方向，其模就是变化率的最大值**。式(1.1.3)的 $\boldsymbol{G}$ 称为数量场 u 的**梯度**，记为 $\mathrm{grad}u = \boldsymbol{G}$。引进矢量微分算子 (del operator)

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.1.6}$$

就可把梯度记为

$$\nabla u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.1.7}$$

三、矢量场，纵场、横场

在研究矢量场时，为形象起见，常引进矢量线描述矢量场。矢量线上每一点的切线方向即为该点矢量场的方向。每一点矢量场的大小，由过该点且与该点矢量场垂直的单位面积上穿过的矢量线条数表示。矢量线的疏密分布形象地反映了矢量场强度的分布。

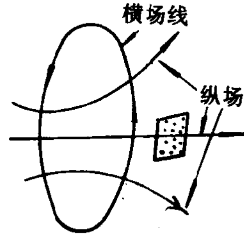

图 1.1.2

可以有两种不同的矢量场，如图 1.1.2 所示，一种矢量场它的矢量线从场中一些点发出，终止在另外一些点上或无穷远处，这类矢量场称为**纵场**。另外一类矢量场，其矢量线没有起点，终点，是无头无尾的闭合回线，这类矢量场称为横场。横场和纵场具有完全不同的物理意义和数学性质。

四、矢量场的通量和散度

矢量场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 沿场中任一有向曲面 S 的积分

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \tag{1.1.8}$$

称为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 穿过曲面 S 的**通量**。

散度 当式(1.1.8)中的 S 为一小闭合曲面时，取曲面法向由内向外，记 S 包围的空间区域为 Ω，其体积为 ΔV。由于横场矢量线是闭合曲线，横场对任何闭曲面的通量为零，仅纵场对式(1.1.8)的积分贡献才可以是非零的。当式(1.1.8)中 Φ 为正值，表明有纵场矢量线从 Ω 中发出，Ω 中有纵场源；若 Φ 为负，表明有纵场线终止在 Ω 中，Ω 中有吸收矢量线的汇。如果把汇看作是负源，穿过闭合曲面 S 的通量 Φ 不为零，就表明 Ω 中存在纵场源。

定义矢量场的散度如下：在矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中取一点 $\boldsymbol{x}_0$，作一包围 $\boldsymbol{x}_0$

点的闭合有向曲面 S，设 S 包围的空间区域为 Ω，体积为 ΔV（图 1.1.3）。以 $\Delta\Phi$ 记穿过 S 的通量，当 Ω 以任意方式缩向 x_0（$\Delta V \to 0$）时，极限值

$$\lim_{\Omega\to x_0}\frac{\oint A\cdot d\sigma}{\Delta V}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta V}\quad(1.1.9)$$

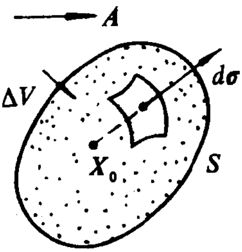

图　1.1.3

称为矢量场 A 在 x_0 点的**散度**，记为 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$.

由此可见，矢量场中任一点的散度，就表示该点作为纵场源的强度。

在直角坐标系中矢量 A 可表示为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=A_x(\boldsymbol{x})\boldsymbol{i}+A_y(\boldsymbol{x})\boldsymbol{j}+A_z(\boldsymbol{x})\boldsymbol{k}$$

A_x, A_y, A_z 是矢量场 A 沿坐标轴的三个分量。A 穿过任一小闭合有向曲面 S 的通量为

$$\Delta\Phi=\oint_S A\cdot d\sigma=\oint_S(A_x\cos\alpha+A_y\cos\beta+A_z\cos\gamma)d\sigma$$

利用高斯积分变换公式有

$$\begin{aligned}\Delta\Phi&=\int_\Omega\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)d\tau\\&=\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)_{x^*}\cdot\Delta V\end{aligned}$$

其中第二步利用了积分中值定量，x^* 为区域 Ω 中某一点，ΔV 是 Ω 的体积。将上式代入式（1.1.9）中，得

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\qquad(1.1.10)$$

即为散度在直角坐标系下的表达式。引用 del 算子，式（1.1.10）可简化为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}\qquad(1.1.11)$$

五、矢量场的环量、环量面密度和旋度

设有矢量场 A，称 A 沿场中任一有向闭曲线 L 的积分

$$\Gamma = \oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.1.12}$$

为矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿 L 的**环量**。可以证明只有横场才有不为零的环量（见下节），纵场对任意闭合回路的环量恒取零值。

为了看出环量的意义，取 $\boldsymbol{A}$ 为磁场 $\boldsymbol{H}$，根据安培环路定理，(1.1.12) 式的积分就表示沿与 L 成右手螺旋方向，通过 L 所围任一曲面的电流强度。电流是激发磁场的源，所以若 Γ 不为零，表明 L 所围横场 $\boldsymbol{A}$ 的源不为零。为了刻画场中一点作为横场源的强度，我们首先引进环量面密度的概念。

取矢量场中一点 $\boldsymbol{x}_0$，在 $\boldsymbol{x}_0$ 点取定方向 $\boldsymbol{n}$，过 $\boldsymbol{x}_0$ 点作一微小曲面 ΔS，以 $\boldsymbol{n}$ 为其在 $\boldsymbol{x}_0$ 点的法矢。取 ΔL 为 ΔS 的周界，ΔL 绕行方向与 $\boldsymbol{n}$ 成右手螺旋关系（图 1.1.4）。定义矢量场沿 ΔL 的环量与面积 ΔS 之比，在 ΔL 缩向 $\boldsymbol{x}_0$ 点（$\Delta S \to 0$）情况下的极限

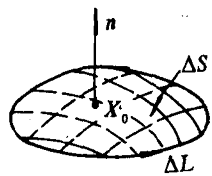

图 1.1.4

$$\lim_{\Delta L \to x_0} \frac{\oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \Gamma}{\Delta S} \tag{1.1.13}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的**环量面密度**。显然环量面密度依赖于方向 $\boldsymbol{n}$。

由此可见，环量面密度刻画场中各点横场源强度沿指定方向的投影。

在直角坐标系中，$\boldsymbol{A}$ 沿 ΔL 的环量利用斯托克斯积分变换公式可以写作

$$\begin{aligned}\Delta\Gamma &= \oint_{\Delta L} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \\ &= \int_{\Delta S}\left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos\beta + \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos\gamma\Big]\mathrm{d}\sigma \\ &= \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]_{x^*} \Delta S\end{aligned}$$

这里第二步利用了积分中值定理。$\boldsymbol{x}^*$ 是 ΔS 面上某一点，($\cos\alpha$,

$\cos\beta, \cos\gamma$) 是法向 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦。把上式代入式(1.1.13) 中，并注意当 ΔL 缩向 x_0 时，$\boldsymbol{x}^*$ 亦趋向 x_0，于是

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta S}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos\gamma \tag{1.1.14}$$

由(1.1.14) 看出，如果定义矢量 $\boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{R}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \tag{1.1.15}$$

$\boldsymbol{R}$ 在场中任一给定点是个确定的矢量，由(1.1.13) 式，场中一点 A 沿任意方向 $\boldsymbol{n}$ 的环量面密度可通过 $\boldsymbol{R}$ 求出

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta S}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n} \tag{1.1.16}$$

这表明(1.1.15) 中的 $\boldsymbol{R}$ 具有这样的性质：它在任意方向上的投影就给出沿该方向的环量面密度，从而 **$\boldsymbol{R}$ 的方向就是环量面密度取最大值的方向，$|\boldsymbol{R}|$ 就是环量面密度的最大值**。$\boldsymbol{R}$ 称为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的**旋度**，记为 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$，(1.1.15) 式就是旋度在直角坐标系下的表达式。引用 del 算子 ∇，可把旋度表示为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix} \tag{1.1.17}$$

由上述，旋度刻画场中各点作为横场源的强度。与纵场源强度不同，横场源强度是一个矢量。

§1.2 矢量微分算子 ∇

一、∇ 算子

∇ 算子是一个微分算子，同时又是一个矢量算子，具有微分运算和矢量运算的双重性质。一方面它作为微分算子对被它作用的函数求导，另一方面这种运算又必须适合矢量运算法则。本节就

来说明 ∇ 算子的运算性质，并给出一些常用公式。必须指出，虽然作为例子用直角坐标系给出了一些公式的证明，但这些公式的正确性与坐标系选择无关。

上一节已引进 ∇ 算子表示标量场的梯度，矢量场的散度和旋度：

$$\nabla u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.2.1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.2.2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\boldsymbol{i} + (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\boldsymbol{j} + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\boldsymbol{k} \tag{1.2.3}$$

∇ 算子还可以按下述方式构成一个纯标量算子

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.2.4}$$

称为拉普拉斯算子，可作用在标量或矢量函数上。

二、关于 ∇ 算子的计算公式

1. 设 u 是标量场，则有

$$\nabla f(u) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\nabla u \tag{1.2.5}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(u) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u} \cdot \nabla u \tag{1.2.6}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A}(u) = \nabla u \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u} \tag{1.2.7}$$

把 ∇ 算子写成分量形式，可直接证明这些公式.

例：
$$\begin{aligned}\nabla f(u) &= (\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z})f(u) \\ &= \boldsymbol{i}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial z} \\ &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\nabla u\end{aligned}$$

2. 设 u, v 是标量场，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是矢量场，则